Lehrbuch

der

descriptiven Geometrie

von

Dr. Bernhard Gugler,
Professor an der K. polytechnischen Schule zu Stuttgart.

Zweite, umgearbeitete Auflage.

Mit 12 Kupfertafeln und 22 eingedruckten Holzschnitten.

Stuttgart.
Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.
1857.

Vorwort.

Die neue Auflage ist durch Ueberarbeitung und Vermehrung fast zu einem neuen Buche geworden, obwohl die ursprüngliche Anlage im Wesentlichen dieselbe geblieben ist. Reingeometrischen Untersuchungen wurde mehr Raum gegeben; sie stehen mit der nächsten (praktischen) Aufgabe einer im engsten Sinne gefaßten „descriptiven Geometrie" in steter Beziehung, und es dürfte manchem Studirenden willkommen sein, wenn in einem Buche, welches blos Elementarkenntnisse voraussetzt, auch solche Sätze und Constructionen erwiesen werden, deren Herleitung gewöhnlich mit analytischen Mitteln geschieht, während sie (wie z. B. die strenge Bestimmung von Krümmungshalbmessern) dem zeichnenden Geometer noch wichtiger sind als dem rechnenden.

Durch eine eingänglichere Behandlung der Linien und Flächen zweiter Ordnung ist es möglich geworden, den Inhalt des der ersten Auflage beigegebenen Anhangs fast ganz in das Buch selbst zu verweben. Den schönen elementaren Beweis für die Haupteigenschaft sphärischer Kegelschnitte, der jetzt (Nr. 438) an die Stelle des in jenem Anhang gegebenen analytischen Beweises getreten ist, danke ich Herrn Professor v. Staudt.

Ein kurzer Anhang hat sich übrigens auch für die zweite Auflage ergeben. Das dort begründete Verfahren zur genäherten Rectification von Curvenbögen stammt von Lambert; doch habe ich die Giltigkeit desselben, soweit sich's nicht um Kreisbögen handelt, anders als Lambert bewiesen.

Das „Lehrbuch der descriptiven Geometrie“ von T. Franke, dessen erstes Heft im Jahr 1849 erschien, ist bedauerlicherweise unvollendet geblieben und jenes Heft selbst scheint deshalb weniger verbreitet worden zu sein. Ihm ist die Auflösung der Aufgabe entnommen, aus den drei Winkeln eines Dreikants die Seiten direkt zu bestimmen (Nr. 114).

Der in der ersten Auflage gemachte Versuch, ein besonderes Kapitel über die Veränderung des Grundsystems aufzunehmen, mochte damals etwas gewagt scheinen. Seitdem sind Oliviers Schriften erschienen, in denen, wenn auch zum Theil mit etwas andern Mitteln, jene Systemsänderungen in umfassender Weise abgehandelt, sogar als Grundlage für die Lösungen der Hauptaufgaben über Gerade und Ebene an die Spitze gestellt werden. In einigen einem früheren Kapitel angefügten Beispielen habe ich Oliviers Methode gezeigt.

Die in der Vorrede zur ersten Auflage gegebene Rechtfertigung für die Wahl des Namens „Grundschnitt“ wird jetzt keiner Wiederholung mehr bedürfen, nachdem derselbe in mehreren andern Lehrbüchern angenommen worden ist.

Stuttgart, im Sept. 1856.

Gugler.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Punkt, gerade Linie und Ebene, mit ihren Gebilden.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Lehrsätze und Aufgaben über gerade Linien und Ebenen.

Drittes Kapitel.

Ueber Raumecke.

Viertes Kapitel.

Veränderung des Grundsystems.

Fünftes Kapitel.

Polygone und Polyeder.

Zweite Abtheilung.

Krumme Linien und krumme Flächen.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Erzeugung und graphische Darstellung krummer Flächen.

Drittes Kapitel.

Aufgaben über Berührungsebenen an krummen Flächen.

Viertes Kapitel.

Schnitte krummer Flächen durch Ebenen und gerade Linien.

Fünftes Kapitel.

Schnitte krummer Flächen durch krumme Flächen und krumme Linien.

Anhang.

Erste Abtheilung.

Punkt, gerade Linie und Ebene,

mit ihren Gebilden.

Erste Abtheilung.

Erstes Kapitel.

Einleitung.

1. Setzt man im Raum eine unbegrenzte Ebene G fest, so kann jeder außerhalb derselben liegende Punkt A auf sie bezogen werden mittels eines Lothes L, welches aus A auf die Ebene gefällt wird. Der Fußpunkt a dieses Lothes heißt die Projection des Punkts, das Loth selbst die projicirende Linie oder der Projectionsstrahl, die Ebene G die Projectionsebene oder Grundebene.

Die Projection eines Systems von Punkten auf eine Ebene G ist der Inbegriff der Projectionen aller einzelnen Punkte, und kann als eine Abbildung dieses Systems auf die Grundebene angesehen werden. Man gebraucht für eine Abbildung solcher Art zuweilen den Namen Grundriß.

2. In Vorstehendem liegt zunächst nur die Erklärung des Projicirens im engern Sinne; an das Wort „Projection" knüpfen sich aber noch weitere Bedeutungen.

Nimmt man außerhalb einer Grundebene G eine gerade Linie R, welche der Grundebene nicht parallel ist, als gegeben an, und legt durch beliebige Punkte des Raumes Parallelen zu R, so ergeben die Schnittpunkte dieser Parallelen mit der Grundebene die schiefen Parallelprojectionen der betreffenden Punkte. Dabei heißt die Gerade R die Richtungslinie der Projection. Die Richtungslinie wird entbehrlich, wenn man weiß daß sie senkrecht zur Grundebene stehen soll. Mit diesem besondern Falle der Parallelprojection, welcher als orthogonale Projection unterschieden wird, kommt man auf die in Nr. 1 erklärte Projection im engern Sinne zurück.

Statt der Geraden R sei außerhalb der Grundebene ein Punkt C gegeben. Legt man nun durch verschiedene Punkte des Raumes gerade Linien so, daß sie zugleich durch den Punkt C gehen, so liefern die Schnittpunkte dieser Linien mit der Grundebene abermals eine Projection des durch jene Punkte des Raums gebildeten Systems, und diese Projection heißt eine centrale. Der Punkt C ist das Projectionscentrum. Sollen sämmtliche Punkte des Systems wirkliche Centralprojectionen haben, so muß das Projectionscentrum C so liegen, daß keiner jener Punkte in eine durch C parallel zur Grundebene geführte Ebene fällt. *

Der Name projicirende Linien oder Projectionsstrahlen verbleibt auch bei der schiefen Parallelprojection und der Centralprojection denjenigen Geraden, deren Schnitte mit der Grundebene die Projectionen für Punkte des Raums geliefert haben.

3. Soll ein Gegenstand auf einer Ebene perspectivisch abgebildet werden, d. h. so, wie er aus einem gewissen Standpunkte dem Auge wirklich erscheint, so kann dieß nur durch eine Centralprojection geschehen, wobei man das Centrum im Auge annimmt. Gleichwohl zieht man es für technische Zwecke allgemein vor, einen darzustellenden Gegenstand in seiner orthogonalen Projection oder als geometrisches Bild zu geben, weil sich daraus leichter und einfacher auf seine wahren Dimensionen und übrigen geometrischen Eigenschaften schließen läßt. Zur schiefen Parallelprojection greift man nur in seltenern Fällen, namentlich dann wenn es sich blos um bequeme Uebersichtlichkeit des beabsichtigten Bildes handelt, ohne daß an dieses Bild weitere geometrische Untersuchungen angeknüpft werden sollen.

4. Ein gegebenes geometrisches Gebilde auf eine gegebene Ebene in orthogonale Projection zu legen, macht einen Theil der Aufgabe aus, mit der sich die descriptive Geometrie (darstellende Geometrie, beschreibende Geometrie) beschäftigt. Außerdem aber zeigt dieser Zweig

---

* Stellt man auf einer und der nämlichen Grundebene zwei Projectionen einer und derselben im Raume gegebenen Figur dar, nämlich eine Parallelprojection und eine Centralprojection, und verlegt man dabei das Centrum C der letztern auf die Richtungslinie R der erstern, so wird die Centralprojection der Figur sich der Parallelprojection um so mehr nähern, je weiter das Centrum C von der Grundebene absteht, und man kann diese Annäherung beliebig weit treiben, wenn man C auf der R in einem von der Grundebene abgewendeten Sinne fortrücken läßt.

der Mathematik, wie man aus den gegebenen Projectionen verschiedener Raumgebilde die Beziehungen auffindet, in denen diese Gebilde selbst unter sich stehen, und lehrt die Aufgaben, auf welche die gegenseitige Stellung von Punkten, Linien und Flächen im Raume führt, durch Zeichnungsoperationen lösen, welche in einer und derselben Ebene ausgeführt werden können.

Da die descriptive Geometrie sich der orthogonalen Projectionsmethode fast ausschließlich bedient, so soll künftig immer diese gemeint sein, wenn das Wort Projection ohne nähere Bestimmung steht.

5. Von mathematischen Vorkenntnissen verlangt die descriptive Geometrie blos Bekanntschaft mit den wesentlichsten Lehren der elementaren Geometrie (Planimetrie und Stereometrie).

Behufs künftiger Citate sollen diejenigen stereometrischen Sätze, auf welche man am häufigsten zurückweisen muß, hier zusammengestellt werden.

I. Eine Ebene wird von einer bewegten Geraden beschrieben, wenn diese eine andere Gerade fortwährend schneidet und zugleich mit einer gegebenen Richtung parallel bleibt; oder wenn sie zwei parallele oder sich schneidende Gerade beständig schneidet.

II. Eine Ebene ist bestimmt durch zwei parallele oder sich schneidende Gerade, oder durch drei Punkte, die nicht in einerlei Richtung liegen.

III. Eine Ebene kann von einer Geraden nur in einem Punkte geschnitten werden.

IV. Zwei Ebenen können sich nur nach einer Geraden schneiden.

V. Gehen drei Ebenen nicht durch eine und dieselbe Gerade, so bilden sie drei geradlinige Durchschnitte, welche alle entweder unter sich parallel sein oder in einem und demselben Punkte zusammenkommen müssen.

VI. Eine Gerade liegt ganz in einer Ebene, wenn sie zwei Punkte mit dieser gemein hat; oder wenn sie durch einen Punkt der Ebene geht und zugleich einer in der Ebene gezogenen Geraden parallel ist.

VII. Eine Gerade ist senkrecht auf einer Ebene, d. h. auf allen Geraden, die man durch ihren Fußpunkt in der Ebene ziehen kann, wenn sie auf zwei solchen Geraden senkrecht steht.

VIII. Sind mehrere Gerade auf einer andern Geraden in demselben Punkte senkrecht, so liegen sie in einer Ebene. (Oder: wird ein rechter Winkel um seinen einen Schenkel gedreht, so beschreibt der andere Schenkel eine auf dem ersten senkrechte Ebene.)

IX. Auf eine Ebene ist durch einen in oder außer ihr gegebenen Punkt nur eine einzige Senkrechte möglich.

X. Fällt man aus einem und demselben Punkte eine Senkrechte auf eine Ebene und eine zweite auf eine in der Ebene gezogene Gerade, so ist die Verbindungslinie beider Fußpunkte senkrecht auf jener Geraden.

XI. Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so sind auf dieser Ebene alle durch die Gerade gehenden Ebenen senkrecht.

XII. Die Schnittlinie zweier Ebenen, welche auf einer dritten Ebene senkrecht sind, ist senkrecht zu dieser.

XIII. Schneiden zwei Ebenen sich senkrecht, so ist jede Gerade, welche man in der einen senkrecht zur Schnittlinie ziehen kann, senkrecht zur andern.

XIV. Zwei auf einerlei Ebene senkrechte Gerade sind parallel.

XV. Ist eine von zwei parallelen Geraden senkrecht auf einer Ebene, so ist auch die andere senkrecht auf dieser Ebene.

XVI. Ist eine Gerade senkrecht auf zwei Ebenen, so sind diese parallel.

XVII. Zwei parallele Ebenen werden von einer dritten nach Parallellinien geschnitten.

XVIII. Eine Gerade ist einer Ebene parallel, wenn sie mit einer in der Ebene gezogenen Geraden parallel läuft.

XIX. Ist eine Gerade zweien Ebenen parallel, so ist sie auch der Durchschnittslinie derselben parallel.

XX. Sind die Schenkel eines Winkels den Schenkeln eines andern parallel, so sind die Ebenen beider Winkel parallel (oder können auch zu einer einzigen Ebene zusammenfallen). Die Winkel selbst sind entweder einander gleich oder der eine ist das Supplement des andern.

Von der Darstellung des Punkts, der geraden Linie und Ebene.

6. Durch die Projection eines Punkts ist eine Gerade (das projicirende Loth) gegeben, in welcher er liegt (Nr. 5, IX); der Punkt selbst aber ist nicht bestimmt, da er noch in jeder beliebigen Entfernung von der Grundebene angenommen werden kann. Jene Projection gehört demnach allen möglichen Punkten der projicirenden Linie gemeinschaftlich an, d. h. sie ist die Projection dieser Linie selbst. Die Projection irgend einer andern (nicht zur Grundebene senkrechten) Geraden oder einer Curve wird man erhalten, wenn man ihren Anfangspunkt projicirt, die projicirende Linie (welche als solche immer senkrecht zur Grundebene, also parallel mit ihrer ursprünglichen Lage bleiben muß) an der gegebenen Linie bis zum Endpunkte fortgleiten läßt und den Weg des Fußpunktes verfolgt. (Anfangs- und Endpunkt können dabei auch in unendlicher Entfernung gedacht werden.) Ist nun die gegebene Linie gerade, so beschreibt das bewegte Projectionsloth eine Ebene (Nr. 5, I); daher müssen die verschiedenen Lagen ihres Fußpunktes sämmtlich in der Geraden (Nr. 5, IV) enthalten sein, nach welcher diese projicirende Ebene von der Grundebene geschnitten wird; woraus unmittelbar folgt, daß die Projection einer Geraden ihrer Richtung

nach gegeben ist, wenn man die Projectionen von zweien ihrer Punkte kennt, — und auch ihrer Größe nach, wenn diese Punkte die Endpunkte sind. Ist die gegebene Linie krumm, so kann das Projectionsloth in besondern Fällen ebenfalls eine Ebene beschreiben; im Allgemeinen aber wird es eine krumme Fläche erzeugen, welche der projicirende Cylinder* heißt und von der Grundebene nach einer krummen Linie geschnitten wird.

7. Gleichwie ein Punkt durch seine Projection noch nicht bestimmt ist, so reicht auch zur Bestimmung einer geraden oder krummen Linie eine Projection nicht hin; denn durch diese ist blos die projicirende Ebene oder der projicirende Cylinder gegeben, und sie entspricht allen möglichen Geraden oder Curven, die man in dieser Ebene — oder allen krummen Linien, die man auf diesem Cylinder ziehen kann. Kennt man aber außerdem noch die Projection des Punkts oder der Linie auf einer zweiten Ebene, die mit der ursprünglichen Grundebene nicht parallel ist, so bestimmt sich der Punkt als Durchschnitt zweier Projectionslothe, die Gerade als Durchschnitt zweier Ebenen, die Curve als Durchschnitt zweier Cylinderflächen oder einer Cylinderfläche und einer Ebene.

Die descriptive Geometrie nimmt deßhalb immer zwei (unbegrenzte) Grundebenen an, und zwar rechtwinkelig verbunden, weil so die vorkommenden Constructionen am einfachsten werden. Man bezeichnet die eine als horizontale, die andere als verticale (obgleich sie nicht nothwendig horizontal und vertical im physikalischen Sinne liegen müssen), und unterscheidet durch diese Beiworte auch die auf ihnen gezeichneten Projectionen. Unter {horizontal / vertical}-projicirender Linie oder Ebene hat man diejenige zu verstehen, mittels deren man die {Horizontal / Vertical}-Projection eines Punkts oder einer Linie erhält. Die Durchschnittslinie der Grundebenen heißt Grundschnitt (Projectionsaxe, Basis). Beide Grundebenen in Verbindung bilden das Grundsystem.

Die Grundebenen bringen den Raum in vier Abtheilungen, und jede Ebene scheidet die andere in zwei Theile, so daß man eine vordere und hintere Horizontalebene und eine obere und untere Verticalebene hat.**

* Die höhere Geometrie nimmt die Namen Cylinder und Kegel in weiterer Bedeutung, als die elementare (s. II. Abtheilung).

** Die Bedeutung der in der Folge öfters gebrauchten Abkürzungen HE, VE, GE ist augenfällig; GS = Grundschnitt.

Von den beiden Grundebenen hat keine vor der andern etwas voraus. Sie können ihre Namen tauschen, ohne daß dadurch die Sache selbst eine Aenderung erleidet.

8. Um mittels der Grundebenen die Lage einer unbegrenzten Ebene anzuzeigen, kann man nicht, wie bei der Linie, ihre sämmtlichen Punkte projiciren, indem man dadurch in allen Fällen die Grundebenen selbst als Projectionen der Ebene erhalten würde. Man hat für das Einfachste befunden, eine Ebene durch Angabe der beiden Geraden zu bestimmen, nach denen sie die Grundebenen schneidet, und diesen Geraden den Namen Spuren (Tracen, Risse) gegeben. Die Spuren einer Ebene müssen sich immer im Grundschnitte begegnen oder beide mit ihm parallel laufen (Nr. 5, v).

Spuren heißen auch die Durchschnittspunkte einer Linie mit den Grundebenen, so wie die Curven, nach welchen eine krumme Fläche die Grundebenen schneidet.

Jede Spur einer Linie liegt stets in der gleichnamigen Projection der Linie.

9. Soll eine geometrische Aufgabe mittels der Projectionsmethode gelöst werden, so sind die nöthigen Constructionen zum Theil auf der Horizontalebene, zum Theil auf der Verticalebene auszuführen. Damit dieß mit Bequemlichkeit und Genauigkeit geschehen könne, muß man die beiden Grundebenen durch eine einzige repräsentiren.

Denkt man sich in dieser Absicht die Verticalebene um den Grundschnitt so weit gedreht, daß ihr oberer Theil mit der vordern Horizontalebene einen flachen Winkel bildet, so haben sich in der That beide Grundebenen zu einer vereinigt, welche man die Zeichnungsebene nennt. Der ursprüngliche Grundschnitt muß aber in dieser Zeichnungsebene immer angegeben sein. Was diesseits des Grundschnitts liegt, ist zugleich vordere Horizontal- und untere Verticalebene; jenseits liegt die obere Vertical- und hintere Horizontalebene. Zur Vermeidung der hieraus entstehenden Zweideutigkeiten in den Zeichnungen denkt man sich die untere verticale Ebene durch die vordere horizontale verdeckt und ebenso die hintere horizontale durch die obere verticale, und zeichnet die auf den verdeckten Theilen gelegenen Projectionen und Spuren punktirt. Sind aber die Projectionen selbst Punkte, so kann man blos durch die Bezeichnung andeuten, welchen Ebenen sie an-

gehören. Ein im Raume gelegener Punkt soll hier immer durch einen Buchstaben des großen Alphabets und jede seiner beiden Projectionen durch denselben Buchstaben des kleinen Alphabets benannt sein, so jedoch, daß der an der Verticalprojection stehende einen Accent erhält. Sind x und x′ die Projectionen eines Punkts, so ist unter X oder (x, x′) immer dieser Punkt im Raume zu verstehen. Auf gleiche Weise zeigt XY oder (xy, x′y′) diejenige Linie im Raume an, deren Projectionen xy und x′y′ heißen.

Man darf übrigens niemals vergessen, daß das Umlegen einer Grundebene in die andere nur die Erleichterung der Zeichnungsoperationen bezweckt, und daß man, um sich über die Bedeutung dieser Operationen Rechenschaft zu geben, die Grundebenen immer in rechtwinkeliger Verbindung denken muß. So beziehen sich auch in Zukunft die Betrachtungen, durch welche man zur Auflösung einer vorgelegten Aufgabe zu gelangen sucht, überall auf den ursprünglichen Zustand des Grundsystems. Wenn daher z. B. von einer Geraden die Rede sein wird, welche einen in der Horizontalebene gelegenen Punkt mit einem Punkte der Verticalebene verbindet, so bedeutet dieß nicht die Linie welche in der Zeichnungsebene durch beide Punkte gezogen werden kann, sondern die Linie im Raume, wie sie vor dem Zurücklegen der Verticalebene sich darstellt. Oder wenn PO, OQ′ die Spuren einer Ebene sind, so hat man unter W. POQ′ nicht denjenigen Winkel zu verstehen, der durch beide Spuren in der Zeichnungsebene gebildet wird.

10. Von zwei beliebig auf den Grundebenen angenommenen Punkten läßt sich nicht voraussetzen, daß sie einem Punkte im Raume als Projectionen zugehören; denn die aus ihnen auf den entsprechenden Grundebenen errichteten Senkrechten werden sich in vielen Fällen nicht schneiden. Es muß daher zwischen den Projectionen eines Punktes eine gewisse Beziehung stattfinden, und diese ergibt sich aus folgender Betrachtung. Legt man durch die von einem Punkte ausgehenden Projectionslothe eine Ebene, so muß diese auf jeder Grundebene senkrecht stehen (Nr. 5, XI), also auch auf dem Grundschnitt (Nr. 5, XII). Die Spuren dieser Ebene, welche die Projectionen des Punktes enthalten, sind demnach ebenfalls senkrecht zum Grundschnitt und werden nach dem Zurücklegen der Verticalebene einen flachen Winkel bilden oder aufeinander fallen. Daraus folgt, daß die Richtung der Senk-

rechten, die man in der Zeichnungsebene aus der einen Projection eines Punktes auf den Grundschnitt fällt, auch durch die andere Projection gehen muß.

† Da bei der ursprünglichen Stellung der Grundebenen die oben erwähnten Spuren mit den beiden Projectionslothen ein Rechteck einschließen, so sieht man, daß die Verticalprojection des Punktes vom Grundschnitt eben so weit entfernt ist, wie der Punkt selbst von der Horizontalebene. Man nennt diese Entfernung seine Horizontaldistanz. Die Verticaldistanz (d. h. der Abstand des Punkts von der Verticalebene) ist gleich der Entfernung der Horizontalprojection vom Grundschnitt.

11. Liegt ein Punkt in der $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Ebene, so fällt er mit seiner $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Projection zusammen; seine $\left\{\frac{V}{H}\right\}$-Projection fällt in den Grundschnitt (denn die $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Distanz ist $= 0$).

Ein im Grundschnitt gelegener Punkt fällt mit seinen beiden Projectionen zusammen. Geht daher eine Linie durch den Grundschnitt, so müssen ihre Projectionen im Grundschnitt zusammentreffen.

12. Eine Gerade* in der $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Ebene ist ihre eigene $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Projection; ihre $\left\{\frac{V}{H}\right\}$-Projection fällt in den Grundschnitt (Nr. 11).

Liegt die Gerade selbst im Grundschnitt, so fallen ihre beiden Projectionen mit ihr zusammen.

13. Ist eine Gerade senkrecht zur $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Ebene, so ist ihre $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Projection ein Punkt (Nr. 6). Die sämmtlichen Punkte der $\left\{\frac{V}{H}\right\}$-Projection müssen in der Senkrechten liegen, welche man aus der $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Projection auf den Grundschnitt fällt (Nr. 10). Diese Senkrechte ist also selbst die $\left\{\frac{V}{H}\right\}$-Projection.

14. Ist eine Gerade parallel zur $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Ebene, so ist ihre $\left\{\frac{V}{H}\right\}$-Projection parallel zum Grundschnitt. Denn da zwei beliebige Punkte der Linie gleiche $\left\{\frac{H}{V}\right\}$-Distanz haben, so müssen die $\left\{\frac{V}{H}\right\}$-Projectionen dieser Punkte gleichweit vom Grundschnitt abstehen (Nr. 10, †).

Läuft demnach eine Gerade parallel mit beiden Grundebenen (oder

---

* Hier und im Folgenden ist jede Gerade immer als unbegrenzt zu denken, wenn es nicht ausdrücklich anders bemerkt wird.

mit dem Grundschnitt), so sind ihre beiden Projectionen dem Grundschnitt parallel.

15. Liegt eine Gerade in einer zum Grundschnitt senkrechten Ebene, so stehen ihre beiden Projectionen auf dem Grundschnitt in einem und demselben Punkte senkrecht, bilden also in der Zeichnungsebene eine einzige Linie. Die Gerade selbst kann sich nicht als Durchschnitt zweier projicirenden Ebenen ergeben, weil diese Ebenen hier in eine zusammenfallen. Sie ist daher nur dann bestimmt, wenn noch weitere Angaben hinzukommen; z. B. wenn ihre Spuren gegeben sind; oder die $\left\{{H \atop V}\right\}$-Distanzen, welche den $\left\{{H \atop V}\right\}$-Projectionen von zweien ihrer Punkte entsprechen; oder wenn man die Projection der Geraden auf einer dritten Grundebene hat, welche zu keiner der ursprünglichen parallel ist.

16. Im Allgemeinen kann man zwei in den Grundebenen beliebig gezogene Gerade als Projectionen einer Linie betrachten, weil die durch sie geführten projicirenden Ebenen sich immer schneiden werden.* Nur wenn man die eine Projection senkrecht zum Grundschnitt angenommen hat, ist die andere nicht mehr ganz willkürlich (Nr. 13, Nr. 15).

17. Liegt eine Ebene parallel zum Grundschnitt, so können ihre Spuren diesen nicht treffen, müssen also mit ihm parallel laufen.

Ist dabei die Ebene zugleich parallel mit einer der Grundebenen, so hat sie nur eine einzige Spur.

18. Die $\left\{{H \atop V}\right\}$-Spur einer zur $\left\{{V \atop H}\right\}$-Ebene senkrechten Ebene steht senkrecht auf dieser (Nr. 5, XII), also auch auf dem Grundschnitt.

Steht eine Ebene auf beiden Grundebenen (oder auf dem Grundschnitt) senkrecht, so sind beide Spuren senkrecht zum Grundschnitt.

19. Geht eine Ebene durch den Grundschnitt, so fallen ihre Spuren beide mit diesem zusammen, und zu ihrer Bestimmung ist noch eine Angabe nöthig. Gewöhnlich nimmt man eine dritte Grundebene zu Hülfe.

20. Zwei Gerade, die sich im Grundschnitte treffen oder beide mit ihm parallel laufen, kann man immer für Spuren einer Ebene nehmen,

---

* Will man die Linie als eine begrenzte darstellen, so hat man für die Projectionen der Grenzpunkte den in Nr. 10 enthaltenen Satz zu beachten.

weil durch ein solches Linienpaar eine Ebene stets möglich und auch völlig bestimmt ist.

21. Man kann sich leicht überzeugen, daß die in Nr. 11—14, 17, 18 aufgeführten Sätze auch umgekehrt (indem man aus den Projectionen oder Spuren auf die Lage der Linien oder Ebenen selbst schließt) Geltung haben.*

22. Ein Punkt oder eine Linie wird als gegeben betrachtet, wenn die beiden Projectionen des Punkts oder der Linie bekannt sind (vorausgesetzt daß bei einer Geraden nicht der in Nr. 15 besprochene Fall stattfindet). Eine Ebene ist gegeben, wenn man ihre Spuren kennt.

---

* Es ist nöthig, daß der Anfänger diese umgekehrten Sätze für sich streng beweise.

Zweites Kapitel.

Lehrsätze und Aufgaben über gerade Linien und Ebenen.

23. Fallen die Spuren einer geraden Linie in die Spuren einer Ebene, so liegt die Linie selbst in der Ebene (Nr. 5, VI).

Umgekehrt: Eine in einer Ebene gezogene Linie hat ihre Spuren in den gleichnamigen Spuren der Ebene.

24. Die gleichnamigen Spuren paralleler Ebenen sind parallel (Nr. 5, XVII).

Umgekehrt: Haben zwei gegen den Grundschnitt geneigte Ebenen parallele Spuren, so sind sie selbst parallel (Nr. 5, XX). (Sind die Spuren zweier Ebenen dem Grundschnitt parallel, so können zwar die Ebenen selbst parallel sein; sie können sich aber auch nach einer mit dem Grundschnitt parallelen Geraden schneiden.)

25. Die gleichnamigen Projectionen paralleler Linien sind parallel. Denn nimmt man in jeder der Linien einen beliebigen Punkt an und fällt aus diesen Punkten Lothe auf eine Grundebene, so sind diese parallel (Nr. 5, XIV); daher sind die durch sie gehenden projicirenden Ebenen parallel (Nr. 5, XX); mithin auch deren Spuren.

Sind in beiden Grundebenen die Projectionen zweier Geraden parallel und nicht zum Grundschnitte senkrecht, so müssen die Geraden im Raume selbst parallel sein. Denn es sind die gleichnamigen projicirenden Ebenen parallel (Nr. 5, XIV. XX); die Durchschnitte der beiden Systeme projicirender Ebenen sind daher sämmtlich unter sich parallel (Nr. 5, XVII); unter diesen Durchschnitten befinden sich aber die fraglichen Linien. (Sind die Projectionen senkrecht auf dem Grundschnitt, so ist ein Parallelsein der Linien im Raume möglich, aber nicht nothwendig.)

26. Zwei Linien, deren Projectionen sich schneiden, treffen sich nur dann, wenn die Verbindungslinie der Schnittpunkte gleichnamiger Projectionen senkrecht auf dem Grundschnitt steht. Denn es ist klar, daß nur in den genannten Schnittpunkten der gemeinsame Punkt der wirklichen Linien projicirt sein könnte; findet nun zwischen jenen Punkten die in Nr. 10 angegebene Beziehung nicht statt, so kann ein solcher gemeinsamer Punkt im Raume nicht existiren.

Zwei Linien müssen sich nothwendig treffen, wenn die Verbindungslinie ꝛc.

27. Steht eine gerade Linie senkrecht auf einer Ebene, so sind ihre Projectionen senkrecht auf den gleichnamigen Spuren der Ebene. Denn es steht die {H./V.}-Spur der Ebene senkrecht auf der durch die Linie gelegten {horizontal/vertical}-projicirenden Ebene (Nr. 5, XI. XII).

Sind die Projectionen einer geraden Linie senkrecht auf den gleichnamigen Spuren einer gegen den Grundschnitt geneigten Ebene, so ist die Linie selbst senkrecht auf der Ebene. Denn die beiden projicirenden Ebenen stehen auf den entsprechenden Spuren der Ebene senkrecht (Nr. 5, XIII), also auf der Ebene selbst (Nr. 5, XI); mithin steht auch ihre Durchschnittslinie auf der Ebene senkrecht (Nr. 5, XII). (Ist eine Ebene dem Grundschnitt parallel, und man zieht in einer zum Grundschnitt senkrechten Ebene eine beliebige Gerade, so sind ihre Projectionen immer senkrecht auf den Spuren der erstern Ebene, obgleich die Gerade selbst jede denkbare Neigung gegen die Ebene haben kann.)

28. Ist eine begrenzte Gerade in einem beliebigen Verhältniß getheilt, so wird ihre Projection durch die Projection des Theilungspunktes in demselben Verhältniß getheilt. Denn die projicirenden Lothe aus den Endpunkten und dem Theilungspunkte sind parallel, und die Elementargeometrie beweist, daß ein System von drei Parallelen alle ihm begegnenden Geraden nach einem und demselben Verhältniß schneidet.

29. Ist eine begrenzte gerade Linie parallel zu einer Grundebene, so hat ihre Projection auf dieser Ebene einerlei

Länge mit ihr. Denn die Linie und ihre Projection sind parallele Seiten in einem Rechteck, dessen beide andere Seiten durch die aus den Endpunkten gefällten Projectionslothe gebildet werden.

30. Die Projection einer begrenzten Geraden kann nie größer sein, als die Gerade selbst. Denn zieht man durch den einen Endpunkt der Geraden eine Parallele mit ihrer Projection, so ist das zwischen die Projectionslothe beider Endpunkte fallende Stück derselben der Projection gleich und stellt die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks vor, dessen Hypotenuse die Gerade im Raume ist.

31. Die Projection irgend einer (geradlinigen oder krummlinigen) Figur, welche in einer zur Grundebene parallelen Ebene liegt, ist der Figur selbst congruent. Denn bewegt man die Ebene der Figur parallel mit ihr selbst gegen die Grundebene hin, so daß jeder Punkt der Figur in seinem Projectionslothe bleibt, so werden die Grunddistanzen der einzelnen Punkte immer unter sich gleichbleiben. Wird daher endlich für einen solchen Punkt diese Distanz Null, so wird sie auch für jeden andern Punkt Null, d. h. fällt ein Punkt der Figur in seine Projection, so geschieht dasselbe zugleich mit allen übrigen Punkten, oder die Figur und ihre Projection decken sich.

Nimmt man auch die zweite Grundebene hinzu, so muß sich auf diese die Figur als eine mit dem Grundschnitt parallele Gerade projiciren.

Eine gerade Linie erhält man überhaupt immer als Projection einer beliebigen ebenen Figur, deren Ebene senkrecht zur Grundebene steht; und zwar fällt diese Projection stets in die Spur der die Figur enthaltenden Ebene.

32. Aufgabe. Die Projectionen einer Geraden zu zeichnen, welche durch zwei gegebene Punkte (a, a′), (b, b′) geht.

Auflösung. Verbindet man die gleichnamigen Projectionen der Punkte, so sind die erhaltenen Linien ab, a′b′ die verlangten Projectionen (Nr. 6).

33. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu einer gegebenen Geraden zu legen.

Aufl. Man ziehe durch die Projectionen des Punktes Parallelen mit den gleichnamigen Projectionen der Geraden (Nr. 25).

34. Aufg. Aus den Projectionen St, s'T' einer Geraden ihre Spuren zu finden.

Fig. 1, 2. Aufl. Errichtet man aus den Punkten s', t, in denen die gegebenen Projectionen dem Grundschnitt begegnen, Senkrechte s'S, tT' auf diesen, so sind St, tT' die Spuren der horizontalprojicirenden und Ss', s'T' die der verticalprojicirenden Ebene. Da die gegebene Linie beiden projicirenden Ebenen angehört, so muß ihre H-Spur in den H-Spuren tS und s'S beider Ebenen zugleich liegen (Nr. 23), kann also kein anderer Punkt sein, als der Durchschnitt S dieser Spuren. Ebenso ergibt sich die V-Spur T' der Linie als Durchschnitt von s'T' und tT'.

† Läuft eine der gegebenen Projectionen mit dem Grundschnitt parallel, so findet man nur eine Spur, was mit Nr. 14 übereinstimmt.

Gar keine Spur hat eine Gerade, deren beide Projectionen dem Grundschnitt parallel sind.

Anmerk. Die vorstehende Auflösung paßt nicht mehr, wenn die Projectionen der Geraden senkrecht zum Grundschnitt stehen (vgl. Nr. 15). Ist dabei zur völligen Bestimmung der Geraden ihre Projection auf eine dritte Grundebene gegeben, so wird die Behandlung der Aufgabe aus späteren Betrachtungen (im vierten Kapitel) hervorgehen. Wie man bei andern Bestimmungsmitteln verfährt, soll bei schicklicher Gelegenheit angegeben werden (Nr. 37, Nr. 60).

35. Aufg. Aus den Spuren S, T' einer Geraden ihre Projectionen zu finden.

Fig. 1, 2. Aufl. Ist T't ⊥ GS, so sind t und S die H-Projectionen zweier Punkte der Geraden (Nr. 11), also St die H-Projection der Geraden selbst. Auf ähnliche Weise erhält man ihre V-Projection T's'.

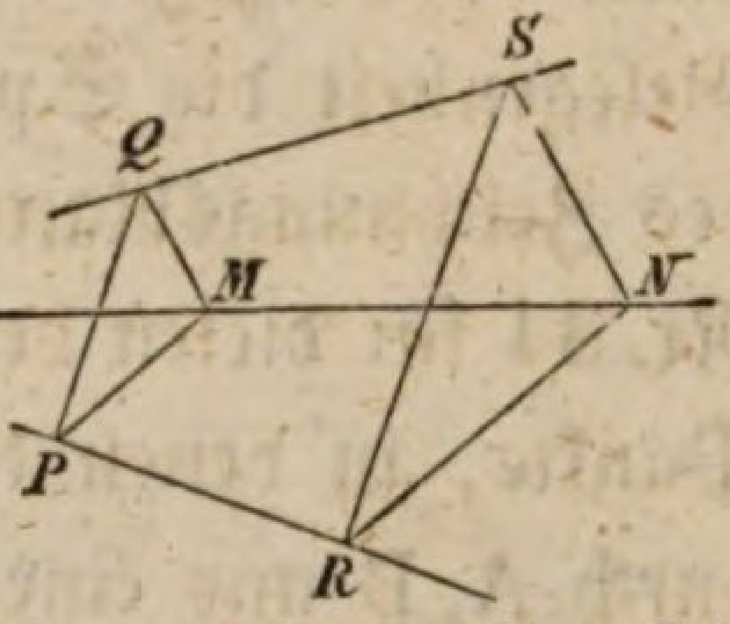
36. Aufg. Eine Spur PO einer Ebene POQ' ist gegeben und ein Punkt Q' der andern Spur; man soll die andere Spur selbst finden.

Aufl. Man verbinde den gegebenen Punkt Q' mit dem Punkte O, in welchem PO den Grundschnitt trifft. Ist PO parallel zum Grundschnitt, so ziehe man durch Q' ebenfalls eine Parallele mit dem Grundschnitt (Nr. 8).

Fällt O nicht mehr in das Zeichnungsblatt, so nehme man in OP einen Punkt A willkürlich und zeichne die Projectionen der Linie AQ', welche

in A und Q′ ihre Spuren hat (Nr. 35), also in der Ebene POQ′ liegt. Ferner wähle man in OP einen zweiten Punkt (B, b′) (Nr. 11) und ziehe entweder durch ihn eine Parallele mit AQ′ (Nr. 33) oder verbinde ihn mit einem beliebigen Punkte der AQ′ (Nr. 32, Nr. 10). Jene Parallele oder diese Verbindungslinie liegt in der Ebene POQ′ (Nr. 5, VI); ihre mit Q′ gleichnamige Spur ist also ein zweiter Punkt der gesuchten Spur dieser Ebene.

Zusatz. Wenn O über die Grenzen des Zeichnungsblattes hinausfällt, so hat man eigentlich die Aufgabe zu lösen: Aus einem gegebenen Punkte eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkte zweier gegebenen Geraden zu ziehen, — eine Aufgabe, auf welche man überhaupt bei graphischen Arbeiten häufig stößt. In Obigem ist diese Aufgabe auf dem Wege der descriptiven Geometrie gelöst, wie er sich aus der Natur des vorliegenden Falles ergibt. Für die Aufgabe gewährt aber schon die elementare Geometrie der Ebene mehrere Lösungen, von denen eine der einfachsten und zugleich praktisch brauchbarsten die folgende ist. Sind RP, NM die gegebenen Geraden, Q der gegebene Punkt, so bilde man aus Q und den auf RP und NM willkürlich gewählten Punkten P, M ein Dreieck, ziehe zu PM die beliebige Parallele RN und durch die Schnittpunkte R, N die Parallelen RS, NS zu PQ, MQ; der Schnittpunkt S liegt dann auf der gesuchten Geraden.



Der dieser Lösung zu Grunde liegende Lehrsatz der ebenen Geometrie (welcher sich unter verschiedenen Formen aussprechen läßt), kann auch durch räumliche Anschauung unter Benützung einiger Begriffe der descriptiven Geometrie sehr leicht bewiesen werden. Drei Gerade in der Ebene, welche sich in einem Punkte schneiden, lassen sich immer als die Projectionen dreier im Raume liegenden und in einem Punkte zusammentreffenden Geraden auffassen. Denkt man sich nun die drei von diesen Geraden im Raum bestimmten Ebenen durch zwei parallele Ebenen geschnitten, so entstehen zwei Dreiecke, deren Seiten beziehungsweise parallel sind. Es werden also auch die Projectionen dieser Dreiecke die entsprechenden Seiten parallel haben (Nr. 25).

37. Aufg. Die Spuren einer Ebene zu zeichnen, welche durch eine gegebene Gerade beliebig geht.

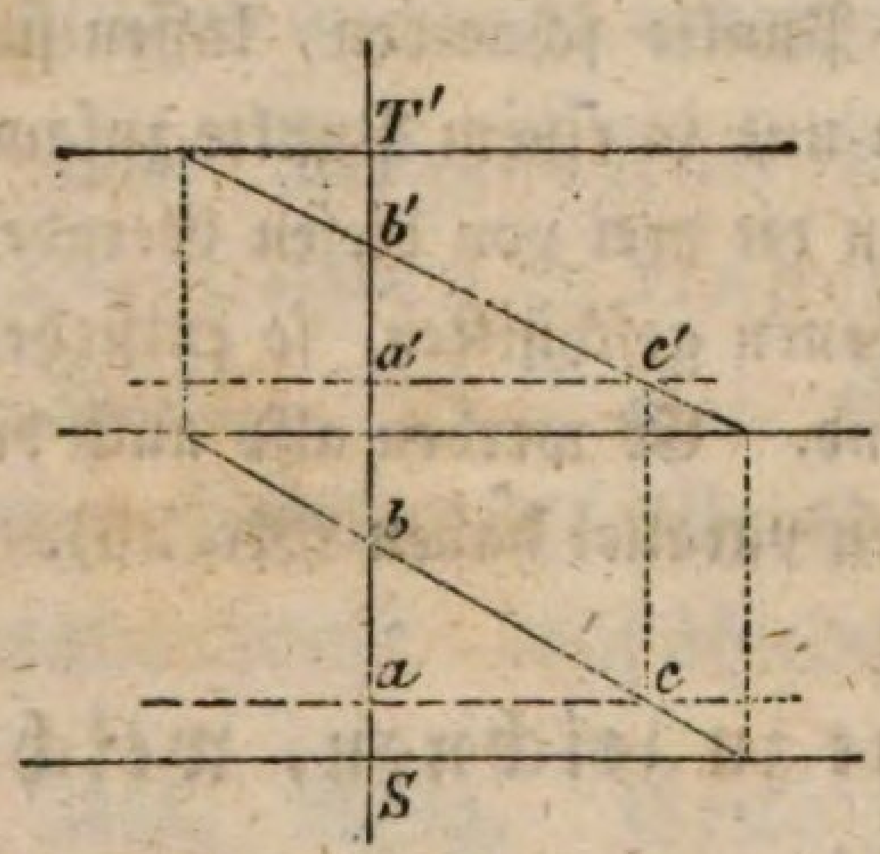
Aufl. Man bestimmt die Spuren der Geraden (Nr. 34) und verbindet sie mit einem beliebigen Punkte des Grundschnitts (oder zieht durch sie Parallelen zum GS, in welchem Falle man aber die besondere Lage der Ebene erhält, welche dem GS parallel ist).

† Fällt eine der Linienspuren, oder beide, über die Grenzen des Zeichnungsblattes hinaus, so führt eine spätere Aufgabe zum Ziel. Man legt nämlich durch zwei schicklich gewählte Punkte in der Linie und einen dritten Punkt außer ihr eine Ebene (Nr. 50).

†† Hat die gegebene Gerade nur eine $\begin{Bmatrix}V\\H\end{Bmatrix}$-Spur, d. h. ist sie parallel zur $\begin{Bmatrix}H\\V\end{Bmatrix}$-Ebene, so ist die $\begin{Bmatrix}H\\V\end{Bmatrix}$-Spur jeder durch sie gelegten Ebene parallel mit ihr, also auch mit ihrer $\begin{Bmatrix}H\\V\end{Bmatrix}$-Projection.

††† Liegt die gegebene Gerade parallel zum Grundschnitt, so ist auch jede durch sie gehende Ebene dem Grundschnitt parallel (Nr. 5, XVIII). Man zieht hier durch einen beliebigen Punkt der gegebenen Geraden eine andere Gerade von solcher Lage, daß sich ihre Spuren bequem bestimmen lassen und dann durch diese Spuren Parallelen zum Grundschnitt.

Zusatz. Sind die Projectionen der gegebenen Geraden senkrecht zum Grundschnitt, und ist die Gerade dadurch bestimmt, daß für zwei ihrer Punkte A, B je die zusammengehörigen Projectionen ausdrücklich bezeichnet sind, so läßt sich die Aufgabe so behandeln, wie in dem oben unter (†) angegebenen Falle. Zugleich aber findet man dann bei dieser Gelegenheit die Spuren der gegebenen Geraden (falls sie innerhalb des Zeichnungsblattes liegen), kann also nachträglich die Aufgabe der Nr. 34 für diesen besondern Fall auflösen; denn diese Spuren sind die Punkte, in denen die Projectionen der Geraden von den Spuren einer durch A, B und einen beliebigen Punkt außerhalb der Geraden geführten Ebene getroffen werden. Statt einer wiederholten Hinweisung auf Nr. 50 soll hier die Lösung unter der besondern Annahme folgen, daß die durch AB gelegte Ebene dem Grundschnitt parallel sei. Legt man durch A eine Parallele zum Grundschnitt, wählt in dieser beliebig einen Punkt C, verbindet ihn mit B, sucht die Spuren der BC und zieht durch dieselben Parallelen zum Grundschnitt, so sind diese Parallelen die Spuren eine Ebene, welche durch AC und durch BC, also auch durch AB geht.



Die Spuren der AB sind hiedurch bestimmt.

38. Aufg. Die Spuren einer Ebene zu zeichnen, welche durch einen gegebenen Punkt beliebig geht.

Aufl. Man legt durch den gegebenen Punkt eine beliebige Gerade und durch diese eine Ebene (Nr. 37).

39. Aufg. Die Projectionen einer Geraden zu zeichnen, welche in einer gegebenen Ebene beliebig liegt.

Aufl. Man nehme in jeder der gegebenen Spuren willkürlich einen Punkt, betrachte beide Punkte als Spuren einer Geraden und suche ihre Projectionen (Nr. 35).

† Ist die gegebene Ebene senkrecht zur $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$-Ebene, so ist ihre $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$-Spur die gemeinschaftliche $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$-Projection aller möglichen in ihr gezogenen Linien.

40. Aufg. Die Projectionen eines Punktes anzugeben, der in einer gegebenen Ebene beliebig liegt.

Aufl. Man zieht in der Ebene eine beliebige Gerade (Nr. 39) und nimmt in derselben einen beliebigen Punkt (Nr. 10).

† Steht eine Ebene senkrecht zur einen Grundebene, so fällt auf dieser GE die Projection jedes in ihr liegenden Punkts in ihre Spur; denn die Ebene enthält das projicirende Loth des Punktes. Umgekehrt: Geht die eine Spur einer Ebene durch die gleichnamige Projection eines in ihr gelegenen Punktes, so steht die Ebene senkrecht zur betreffenden Grundebene.

Die Projectionen eines Punktes fallen daher beide in die gleichnamigen Spuren einer Ebene, die durch ihn senkrecht zum Grundschnitt gelegt ist. Umgekehrt: Gehen die Spuren einer Ebene durch die gleichnamigen Projectionen eines in ihr liegenden Punktes, so steht die Ebene senkrecht zum Grundschnitt.

41. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt eine beliebige Parallellinie mit einer gegebenen Ebene zu ziehen.

Aufl. Zieht man in der gegebenen Ebene eine beliebige Gerade (Nr. 39) und mit dieser eine Parallele durch den gegebenen Punkt (Nr. 33), so ist das Verlangte geschehen (Nr. 5, XVIII).

42. Aufg. Zu entscheiden, ob zwei Gerade in einerlei Ebene liegen.

Aufl. A) Sind die Projectionen der Geraden bekannt, so ist nach Nr. 26 und Nr. 25 zu ersehen, ob die Linien im Raume sich schneiden oder parallel sind. Ist keines von beiden der Fall, so können die Geraden nicht in einerlei Ebene liegen.

Wenn die gleichnamigen Projectionen der Geraden nicht parallel sind, aber erst außerhalb des Zeichnungsblatts zum Durchschnitt kommen (oder auch innerhalb des Blatts unter einem sehr spitzen Winkel), so verbinde man zwei Punkte

der einen Geraden mit zwei schicklich gewählten Punkten der andern. Je nachdem diese Verbindungslinien sich schneiden oder nicht schneiden, werden auch die beiden gegebenen Geraden sich schneiden oder nicht.

B) Sind die Geraden durch ihre Spuren gegeben, so verbinde man je die zwei gleichnamigen. Treffen beide Verbindungslinien im Grundschnitte zusammen oder sind sie beide diesem parallel, so liegen die Geraden in einerlei Ebene.

Schneiden sich aber diese Verbindungslinien nicht mehr innerhalb des Zeichnungsblattes, so zeichnet man die Projectionen entweder der gegebenen Linien oder derjenigen, welche die gegebenen H-Spuren mit den verwechselten V-Spuren verbinden.

43. Aufg. Gegeben ist die Projection eines Punkts auf eine der Grundebenen und seine Distanz von dieser Grundebene. Man soll seine Projection auf der zweiten Grundebene finden.

Aufl. Fällt man aus der gegebenen Projection eine Senkrechte auf den Grundschnitt und nimmt in der Richtung dieser Senkrechten einen Punkt, der vom Grundschnitt um die gegebene Distanz entfernt ist, so ist dieser die zweite Projection (Nr. 10, †).

Man sieht, daß man zwei Auflösungen erhält, wofern nicht bestimmt ist, auf welcher Seite der ersten Grundebene der Punkt im Raume liegt.

44. Aufg. Es ist auf der einen Grundebene die Projection einer Geraden und auf der andern die Projection eines in der Geraden liegenden Punktes gegeben. Man soll die zweite Projection des Punktes finden.

Aufl. Die gesuchte Projection muß in der gleichnamigen Projection der Geraden liegen und zugleich in der Senkrechten, welche aus der bekannten Projection auf den Grundschnitt gefällt ist (Nr. 10); sie ist also der Durchschnitt dieser beiden Linien.

45. Aufg. Eine Ebene POR′ und eine Projection einer in ihr liegenden Geraden sind gegeben. Man soll die zweite Projection finden.

Fig. 3. **Aufl.** Die gegebene Projection sei die horizontale ab. Da sowohl diese als auch die horizontale Spur der Ebene die H-Spur der Linie enthalten muß, so ist P diese Spur. Die V-Spur der Linie hat in r (wo ab den Grundschnitt trifft) ihre H-Projection (Nr. 11), liegt also in der Senkrechten, die aus r auf dem Grundschnitt errichtet

wird; und da sie zugleich in die verticale Spur OR′ der Ebene fallen muß, so ist R′ ihre Lage. Aus den beiden Spuren P, R′ der Linie findet man nun die gesuchte V-Projection nach Nr. 35 *.

Ist ab ‖ OP, so muß auch AB ‖ OP sein, also a′b′ ‖ GS. Fig. 6.

Ist ab ‖ GS, so ist AB ‖ OR′, also auch a′b′ ‖ OR′.

46. Aufg. Eine Ebene POR′ und eine Projection eines in ihr liegenden Punktes sind gegeben; man soll die andere Projection des Punktes finden.

Aufl. Ist die gegebene Projection die horizontale a, so betrachte man eine beliebig durch sie gelegte Gerade ab als H-Projection einer in der Ebene durch A gezogenen Linie, suche deren V-Projection a′b′ (Nr. 45) und bestimme die zu a gehörige V-Projection a′ (Nr. 44) **. Fig. 3, 6.

Gewöhnlich zieht man ab ‖ OP (wie in Fig. 6), wobei man den Vortheil hat, daß die beiden Geraden, deren Durchschnitt die gesuchte Projection a′ liefert, sich unter rechtem Winkel begegnen. Doch ist diese Lage der Hülfslinie nicht zu brauchen, wenn die gegebene Ebene dem Grundschnitt parallel liegt. Auch könnte (bei andern Stellungen der gegebenen Ebene) trotz des rechten Winkels bei a′ das Resultat der Construction ungenau werden, wenn (Fig. 6) ar den Grundschnitt oder rR′ die Verticalspur der Ebene unter einem sehr spitzen Winkel träfe. In solchen Fällen wendet man zur Controle eine zweite Lage der ab an.

47. Aufg. Die Durchschnittslinie zweier gegebenen Ebenen zu projiciren.

Aufl. Da die Durchschnittslinie sowohl der einen als der andern der gegebenen Ebenen angehört, so muß ihre H-Spur in den H-Spuren beider Ebenen zugleich liegen, ihre V-Spur in den V-Spuren beider Ebenen. Die Spuren der Durchschnittslinie sind demnach

---

* Da die Linien Pr, rR′ Spuren einer projicirenden Ebene sind, so erscheint die vorstehende Aufgabe als besonderer Fall der allgemeineren, welche in Nr. 47 gelöst wird.

** Wie man auch die H-Projection ab durch a legen mag, so muß die zugehörige V-Projection a′b′ immer durch denselben Punkt a′ gehen. Darin liegt ein Lehrsatz für die ebene Geometrie, welchen der Schüler in Worte zu fassen suche.

Der Fall, daß die descriptive Geometrie auf Lehrsätze der reinen Geometrie leitet, kommt häufig vor, und das Aufsuchen solcher Sätze sammt ihren (von der descriptiven Geometrie unabhängigen) Beweisen kann Stoff zu nützlichen Uebungen abgeben.

die Durchschnitte gleichnamiger Ebenenspuren, und die gesuchten Projectionen findet man nach Nr. 35.

Fig. 28. † Sind zwei gleichnamige Spuren der Ebenen parallel, z. B. die V-Spuren OP′ und QP″, so ist auch die Durchschnittslinie mit ihnen parallel (Nr. 5, v). Da nun OP′ ihre eigene V-Projection ist und ihre H-Projection in den Grundschnitt fällt (Nr.12), so muß die V-Projection der Durchschnittslinie || OP′, die H-Projection || GS sein. (Nr. 25.)

†† Ist eine der gegebenen Ebenen parallel zu einer Grundebene (etwa zur HE, wie die Ebene B′R′ in Fig. 4), so ist die Durchschnittslinie beider parallel mit der entsprechenden Spur der andern Ebene; ihre eine Projection ist daher ebenfalls mit dieser Spur parallel, ihre andere fällt mit der Spur der erstern Ebene zusammen. (In Fig. 4 sind ab, a′B′ die Projectionen der Schnittlinie.)

Fig. 5. ††† Sind die gegebenen Ebenen (PR, P′R′), (TU, T′U′) beide dem Grundschnitt parallel, so ist es auch ihre Schnittlinie. Diese hat demnach weder H- noch V-Spur, und kann nach der oben gegebenen Regel nicht gefunden werden.

Schneidet man nun beide Ebenen durch eine beliebige dritte Ebene VWV′, so werden die erhaltenen Schnittlinien sich in einem Punkte (a, a′) begegnen, welcher auf dem Durchschnitte der gegebenen Ebenen liegt; man hat daher nur noch durch a und a′ Parallelen mit dem Grundschnitt zu ziehen.

*† Gehen die beiden gegebenen Ebenen durch einen und denselben Punkt des Grundschnitts, so geht durch diesen Punkt auch ihre Schnittlinie. Einen zweiten Punkt der Schnittlinie findet man durch Anwendung einer Hülfsebene, ganz so wie sich im vorigen Falle der Punkt (a, a′) ergeben hat.

Fig. 4. *†† Fällt eine Spur der Durchschnittslinie nicht mehr in das Zeichnungsblatt, wie in Fig. 4 die vertikale, so nimmt man eine Hülfsebene VWV′ parallel zu einer der gegebenen Ebenen an und projicirt ihre Schnittlinie mit der andern. Diese Schnittlinie wird der gesuchten parallel sein (N. 5, XVII); wenn man daher mit ihren Projectionen Parallelen durch P und p′ zieht, so sind diese die verlangten Projectionen. — Statt der Ebene VWV′ kann man auch eine mit einer Grundebene parallele Ebene zu Hülfe nehmen. Ist z. B. die Ebene B′R′ der HE parallel, so schneidet sie die gegebenen Ebenen nach zwei Hori-

zontallinien (ab, R′B′), (ar, B′R′), deren Durchschnitt (a, a′) nothwendig auf der Schnittlinie der gegebenen Ebene liegen muß, so daß aP, a′p′ die Projectionen dieser Schnittlinie sind.

Fallen beide Spuren der gesuchten Schnittlinie über die Grenzen des Blattes hinaus, so schneide man die gegebenen Ebenen entweder durch zwei Hülfsebenen, welche den beiden Grundebenen oder auch einer und derselben Grundebene parallel sind; oder man nehme nur eine Hülfsebene dieser Art an und ersetze die zweite durch eine andere Ebene, welche einer der gegebenen parallel ist.

In dem zuletzt genannten Falle kann es übrigens geschehen, daß die ebengenannten Mittel gar kein oder nur ein unsicheres Resultat geben. Es könnten z. B. (Fig. 4) die Winkel OQP und QOP so groß werden, daß nicht blos der Punct P sondern auch der Durchschnittspunkt a über das Zeichnungsblatt hinaus fällt, selbst dann, wenn man die B′R′ bis an den obersten Rand des Blattes hinaufrückt; oder daß die Linien ba, ra sich zwar noch innerhalb des Blattes, aber unter einem zu spitzen Winkel treffen. Führen zugleich auch die zur V-Ebene parallelen Hülfsebenen auf ähnliche Uebelstände, so hat man sich nach anderweitigen Auskunftsmitteln umzusehen.

In der horizontalen Hülfsebene B′R′ (Taf. XII, 1), welche die gegebenen Ebenen nach der Geraden (bc, B′R′), (re, R′B′) schneidet, ziehe man eine Gerade (ce, B′R′) parallel zum Grundschnitt; diese begegnet den beiden zuvor genannten Geraden in zwei Punkten C, E, deren H-Projectionen in c und e liegen. Eine durch CE und den Grundschnitt geführte Ebene X schneidet die gegebenen Ebenen nach den Linien OC, QE, welche sich auf der Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen treffen müssen; die H-Projectionen Oc, Qe liefern somit einen Punkt d für die H-Projection dieser gesuchten Linie. (Die V-Projectionen der OC und QE wären leicht zu erhalten, würden aber nichts nützen, da ihr Schnittpunkt d′ über das Blatt hinausfällt.) In der nämlichen horizontalen Hülfsebene B′R′ wählt man nun eine zweite zum Grundschnitt parallele Linie (ce, B′R′) und erhält durch Wiederholung des vorigen Verfahrens einen zweiten Punkt b für die H-Projection der verlangten Durchschnittslinie. (Es ist immer möglich, die Linien CE und EE so zu wählen, daß sich die Punkte d und b genau und in gehörigem Abstand von einander ergeben. Die horizontale Ebene B′R′ nimmt man zweckmäßig in möglichster Entfernung vom Grundschnitt an.)

Durch ein entsprechendes Verfahren (indem man von einer zur V-Ebene parallelen Hülfsebene ausgeht) lassen sich Punkte für die V-Projection der verlangten Durchschnittslinie finden.

*††† Die letzten Bemerkungen leiten zugleich auf eine Auflösung unserer Aufgabe für den besondern Fall, wo eine der gegebenen Ebenen durch den Grundschnitt und einen außerhalb desselben gegebenen Punkt (z, z′) gelegt ist. Diese Ebene sei durch X bezeichnet, während PO, OB′ die Spuren der andern Ebene sind (Taf. XII, 1). Eine Ebene, durch Z parallel zur H-Ebene geführt, schneidet die X nach

der zum Grundschnitt Parallelen (zc, z'B'), die POB' nach der Geraden (bc, B'c'). Der Schnittpunkt C der ZC und B'C liegt in der verlangten Durchschnittslinie der beiden gegebenen Ebenen; folglich sind Oc, Oc' die Projectionen dieser Linie. (Die durch Z gelegte Hülfsebene könnte man ebensowohl parallel zur V-Ebene annehmen.)

48. Aufg. Den Durchschnittspunkt einer gegebenen Geraden (ac, a'c') und einer gegebenen Ebene POR' zu projiciren.

Aufl. Dieser Punkt muß in der Linie liegen, nach welcher eine durch AC gehende Ebene die POR' schneidet. Man lege daher durch AC eine beliebige Ebene E (Nr. 37) und projicire den Schnitt L von E und POR' (Nr. 47), so sind die Punkte, in welchen l und l' die ac und a'c' treffen, die Projectionen des gesuchten Durchschnittspunkts. (Probe für die Genauigkeit der Zeichnung aus Nr. 10.)

Fig. 3. Am einfachsten wird in der Regel die Construction, wenn man für die Ebene E eine der projicirenden Ebenen von AC nimmt. In Fig. 3 ist PrR' die horizontalprojicirende Ebene, (Pr, p'R') ihr Schnitt mit POR', also a' die V-Projection des verlangten Punkts, dessen H-Projection a man nach Nr. 44 erhält.

Wie verfährt man, wenn (Fig. 3) der Punkt R' oder auch r nicht mehr im Zeichnungsblatt liegt und auch die verticalprojicirende Ebene keine bequeme Construction gewährt?

49. Aufg. Zu untersuchen, ob eine gegebene Gerade einer gegebenen Ebene parallel sei oder nicht.

Aufl. I. Man lege durch die Gerade eine beliebige Ebene E und projicire ihren Schnitt mit der gegebenen Ebene. Sind die erhaltenen Projectionen den gleichnamigen Projectionen der gegebenen Geraden parallel, so ist die Gerade selbst der Ebene parallel (Nr. 5, XVIII).

Läßt man für die Ebene E eine der projicirenden Ebenen gelten, so hat man nur ein einziges Linienpaar zu vergleichen. Wäre z. B. in Fig. 3 a'b' || a'c', so wäre AC || POR'.

Aufl. II. Man wähle in der {H/V}-Spur der gegebenen Ebene einen beliebigen Punkt, zeichne die Projectionen einer Linie, welche durch diesen Punkt geht und der gegebenen Geraden parallel ist, und bestimme die {V/H}-Spur dieser Linie. Fällt diese in die {V/H}-Spur der gegebenen Ebene, so ist die gegebene Gerade der Ebene parallel.

50. Aufg. Die Spuren einer durch drei gegebene Punkte bestimmten Ebene zu zeichnen.

Aufl. Es ist klar, daß statt dreier Punkte ebensowohl ein Punkt und eine Gerade, oder zwei sich schneidende Gerade, oder zwei Parallelen gegeben sein können. In den beiden letztern Fällen hat man die Spuren der Geraden zu suchen (Nr. 34) und die gleichnamigen zu verbinden; die Verbindungslinien sind die verlangten Spuren der Ebene. (Nr. 20.)

Sind drei Punkte gegeben, so verbinde man einen derselben mit den beiden andern, oder man lege durch zwei eine Gerade und durch den dritten eine Parallele mit ihr, und verfahre mit dem erhaltenen Linienpaare wie vorhin.

(Probe für die Genauigkeit der Construction: die gefundenen Spuren müssen sich im Grundschnitte begegnen.)

† Liegen die drei gegebenen Punkte (also auch ihre gleichnamigen Projectionen) in gerader Linie, so sind unendlich viele Ebenen durch sie möglich.

†† Wenn eine von den vier Spuren der gegebenen Geraden außerhalb des Zeichnungsblattes liegt, so hat man die Aufgabe der Nr. 36 zu lösen.

Fallen die vier Spuren über die Grenzen des Blattes hinaus, so kann der Fall eintreten, daß die Spuren der gesuchten Ebene selbst ganz außerhalb des Blattes liegen, also der Aufgabe auf dem disponibeln Raume nicht genügt werden kann. Läßt aber die Lage der gegebenen Linien vermuthen, daß der Zeichnungsraum noch Stücke jener Spuren aufnimmt, so wählt man zwei Punkte in der einen und einen dritten Punkt in der zweiten Linie so, daß die Verbindungslinien eines solchen Punkts mit den beiden andern die Grundebenen noch innerhalb des Blattes schneiden. Da diese Verbindungslinien in derselben Ebene mit den gegebenen Linien liegen, so erhält man durch Verbindung ihrer gleichnamigen Spuren die verlangten Ebenenspuren. Man kann auch, wenn die gegebenen Linien nicht selbst parallel sind, in jeder derselben einen schicklichen Punkt wählen, durch ihn eine Parallele mit der andern ziehen und die Spuren dieser beiden neuen Linien bestimmen.

Wie hilft man sich, wenn a) zwei gleichnamige oder b) zwei ungleichnamige Spuren der gegebenen Linien außerhalb des Blattes liegen?

†) Einen besonders einfachen Fall der obigen Aufgabe bildet die

folgende: Man kennt die eine Spur einer Ebene und die Projectionen eines der Ebene angehörigen Punktes; die zweite Spur der Ebene zu finden.

51. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt (a, a′) eine Ebene parallel einer gegebenen Ebene TQT′ zu legen.

Aufl. Jede Gerade, welche durch den gegebenen Punkt geht und der gegebenen Ebene parallel ist, muß ganz in die gesuchte Ebene fallen. Zieht man also durch (a, a′) eine beliebige Gerade parallel zur Ebene TQT′ (Nr. 41), bestimmt ihre Spuren und zieht durch dieselben Parallelen zu TQ und T′Q, so sind diese die verlangten Spuren (Nr. 23, 24) (und müssen sich bei genauer Zeichnung im Grundschnitte begegnen).

Fig. 6. Die Construction wird am einfachsten, wenn man die mit TQT′ parallele Hilfslinie zugleich parallel mit einer Grundebene (also parallel mit einer der gegebenen Spuren) annimmt. Eine solche Linie hat zwar nur eine Spur, aber man reicht auch mit dieser einen aus, wenn nur die zuerst aufgefundene Ebenenspur den Grundschnitt noch innerhalb des Zeichnungsblattes trifft. In Fig. 6 ist (ar, a′R′) der H-Spur TQ parallel, R′ ihre Spur, R′O || T′Q, OP || QT, also POR′ die gesuchte Ebene.

Nicht anwendbar ist diese einfachste Construction, wenn die gegebene Ebene dem Grundschnitt parallel liegt.

† Ist die gegebene Ebene senkrecht zu einer Grundebene, so lassen sich die Spuren der verlangten Ebene unmittelbar zeichnen. (Vgl. Nr. 40, †.)

52. Aufg. Durch eine gegebene Gerade M eine Ebene parallel einer gegebenen Geraden N zu legen.

Aufl. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt P der M eine Parallele L zu N (Nr. 33) und lege durch M und L eine Ebene (Nr. 50), so ist diese die gesuchte (Nr. 5, XVIII).

Nimmt man den Punkt P so, daß seine eine Projection im Durchschnitt der gleichnamigen Projectionen von M und N liegt, so fällt die gleichnamige Projection der L mit der der N zusammen. Man wird deßhalb immer für P eine solche Lage wählen, wenn nicht etwa dadurch die Spuren der L ungeschickt zu liegen kommen.

† Sind M und N parallel, so ist die Ebene unendlich vieler Lagen fähig. Schneiden sie sich, so bestimmen sie unmittelbar die Ebene. (Das

Zusammenfallen einer Linie und einer Ebene ist ein besonderer Fall des Parallelseins der Linie und Ebene.)

53. Uebungsaufgaben.

1) Den Punkt zu finden, in welchem sich drei gegebene Ebenen schneiden.

2) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade parallel mit zwei gegebenen Ebenen zu ziehen.

3) Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel mit zwei gegebenen Geraden zu legen.

4) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß sie zwei gegebene Gerade schneidet.

5) Eine Gerade zu finden, welche zwei gegebene Gerade schneidet und mit einer dritten Geraden parallel ist.

54. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade senkrecht zu einer gegebenen Ebene zu ziehen.

Aufl. Die Projectionen der verlangten Geraden sind die beiden Senkrechten, die man aus den Projectionen des Punkts auf die gleichnamigen Spuren der gegebenen Ebene fällt (der Punkt mag in oder außerhalb der Ebene liegen). (Nr. 27.)

55. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt (a, a′) eine Ebene senkrecht zu einer gegebenen Geraden (cd, c′d′) zu führen.

Aufl. Da die Spuren der verlangten Ebene senkrecht zu den gleichnamigen Projectionen von CD sein müssen, so kann man die Projectionen einer Geraden, die mit einer dieser Spuren parallel ist, unmittelbar zeichnen. Eine solche Gerade fällt aber ganz in die gesuchte Ebene, verhilft also zur Auffindung der letztern. In Fig. 6 ist ar ⊥ cd, a′R′ ∥ GS, also AR′ parallel zur H-Spur der verlangten Ebene. Eine Gerade R′O, durch die V-Spur R′ der AR′ senkrecht zu c′d′ gezogen, ist die vertikale — eine Senkrechte durch O auf cd die horizontale Spur der gesuchten Ebene. Fig. 6.

Sollte das Zeichnungsblatt weder den Punkt R′ noch die H-Spur einer zu OR′ Parallelen aufnehmen, so wählt man in irgend einer zu CD senkrechten Ebene TQT′ eine Gerade so, daß sich mit Hülfe dieser Geraden eine Ebene durch A parallel zu TQT finden läßt.

Es ist für die Auflösung der Aufgabe gleichgiltig, ob A in oder außer BC liegt.

† Die Auflösung wird bedeutend einfacher, wenn die gegebene Gerade in einer Grundebene liegt. Ist z. B. OP (Fig. 9) diese Gerade, so geht die gesuchte Ebene durch das Projectionsloth Aa, mithin ihre H=Spur durch a; zugleich ist letztere senkrecht zu OP, die V=Spur senkrecht zum Grundschnitt. (Aehnlich verhält sich's, wenn die gegebene Gerade parallel zu einer Grundebene liegt.)

56. Aufg. Aus einem gegebenen Punkte A eine Senkrechte auf eine gegebene Gerade M zu fällen.

Aufl. Legt man durch A eine Ebene senkrecht zu M (Nr. 55) und bestimmt den Punkt B, in welchem sie von M getroffen wird (Nr. 48), so ist die Verbindungslinie AB die verlangte Senkrechte.*

† Wesentlich vereinfacht sich die Lösung, wenn M einer Grundebene parallel ist (vergl. Nr. 55, †).

57. Aufg. Aus einem gegebenen Punkte A einer gegebenen Geraden M eine Senkrechte auf ihr zu errichten, welche einer gegebenen Ebene E parallel ist.

Aufl. Man schneide die Ebene E durch irgend eine zu M senkrechte Ebene und ziehe durch A eine Parallele mit der Schnittlinie.

(In welchem Falle kann die gesuchte Linie unendlich viele Lagen haben?)

58. Aufg. Durch eine gegebene Gerade N eine Ebene senkrecht zu einer gegebenen Ebene E zu führen.

Aufl. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt der N eine Senkrechte K zu E (Nr. 54) und lege durch K und N eine Ebene (Nr. 50), so ist diese die verlangte (Nr. 5, XI).

Die Linie N kann auch in der Ebene E liegen.

(Wann läßt die Aufgabe unendlich viele Lösungen zu?)

59. Erklärung. Eine Ebene in eine der Grundebenen umklappen, heißt: sie um die betreffende Spur so lange drehen, bis sie mit dieser Grundebene zusammenfällt.

Es ist klar, daß man jede Ebene in eine und dieselbe Grundebene auf doppelte Weise umklappen kann, je nachdem man sie nach der einen oder andern Seite hin dreht.

---

* Eine andere Auflösung s. Nr. 68 Zus.

(Ein Beispiel von Umklappung ist bereits durch das Zurücklegen der Verticalebene gegeben.)

Unter der Umklappung eines Punkts mit einer durch ihn gehenden Ebene versteht man die Lage, welche der Punkt einnimmt, nachdem diese Ebene umgeklappt worden ist.

In ähnlichem Sinne ist die Umklappung einer Geraden mit einer durch sie gelegten Ebene zu verstehen. Jede solche Umklappung geht durch die betreffende Spur der Geraden.

60. Aufg. Eine Linie, welche in S und T′ ihre Spuren hat, soll mit ihrer horizontalprojicirenden Ebene StT′ einmal in die VE, das anderemal in die HE umgeklappt werden.

Aufl. Bei der Umklappung in die VE bleibt T′t (als Drehungsaxe) unbeweglich; St wird, da sie immer auf T′t senkrecht bleibt, während der Drehung in der HE hinstreifen; jeder ihrer Punkte beschreibt einen Kreis um t und kommt nach vollendeter Drehung in den Grundschnitt zu liegen; so der Punkt S nach S_1 (oder auch auf die andere Seite von t); daher ist $T'S_1$ die Lage der ST′ nach verticaler Umklappung der Ebene StT′. Fig. 17.

Wird StT′ in die HE umgeklappt, so bleibt St unbeweglich und T′t beständig senkrecht auf St; T′t wird also auch nach vollendeter Drehung noch senkrecht zu St sein. Ferner kann ein Punkt in T′t seine Entfernung von t während der Drehung nicht ändern. Macht man daher W. $StT_2' = 90^\circ$, $tT_2' = tT'$, so ist ST_2' die Lage der ST′ nach horizontaler Umklappung von StT′. (Man hätte auch tT_2' nach der entgegengesetzten Seite von St antragen können.)

(Zur Uebung: Eine Linie werde mit ihrer vertical-projicirenden Ebene in beide Grundebenen umgeklappt.)

61. Aufg. Zwei Punkte A, B sind durch ihre Projectionen gegeben; man soll die Gerade AB mit einer ihrer projicirenden Ebenen in die betreffende Grundebene umklappen.

Aufl. Es werde die AB mit ihrer horizontalprojicirenden Ebene in die HE umgeklappt. Liegen die gegebenen Punkte beide auf einerlei Seite der HE (wie es in Fig. 11 angenommen wurde), so bestimmen sie mit ihren H-Projectionen ein Trapez ABba, welches bei a und b rechte Winkel hat und dessen parallele Seiten die H-Distan- Fig. 11.

zen der Punkte A, B sind. Man kann nun dieß Trapez in horizontaler Umklappung zeichnen, wenn man

$$\text{W. } b a A_1 = \text{W. } a b B_1 = 90^{\circ}$$
$$a A_1 = m a'$$
$$b B_1 = n b'$$

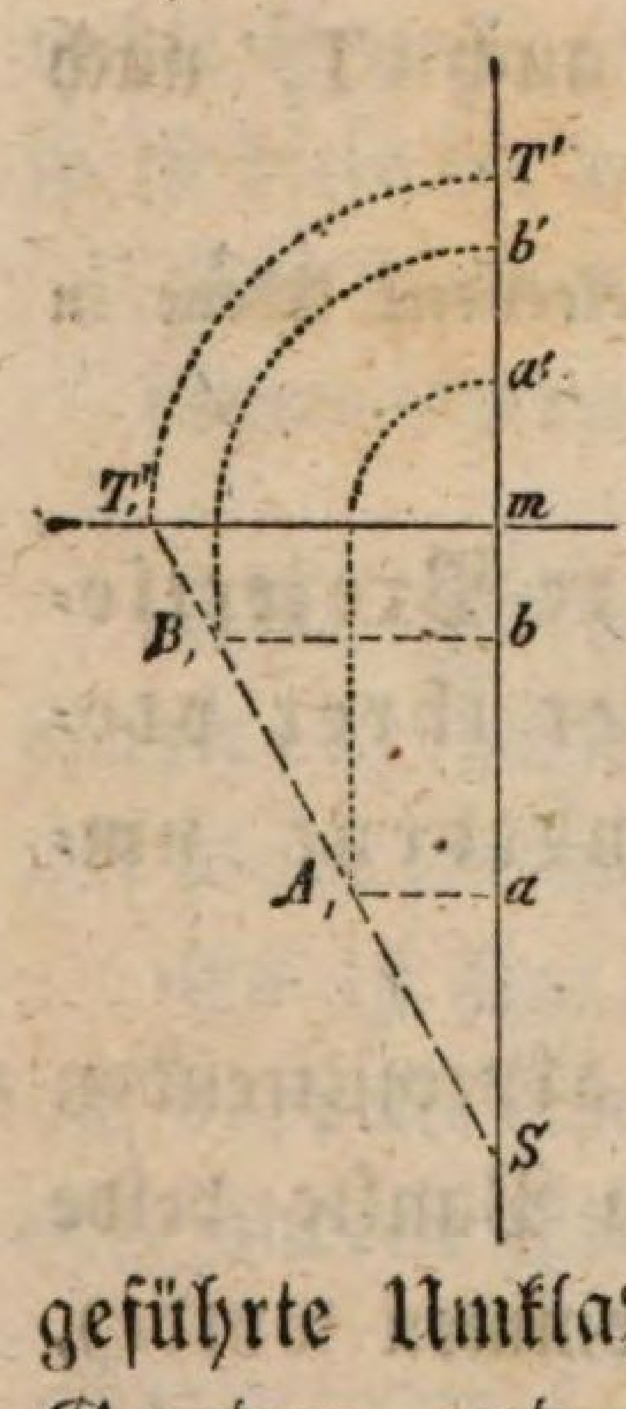
macht; dann ist $A_1 B_1$ die gesuchte Umklappung der AB.

(Probe für die Genauigkeit der Zeichnung: die verlängerte $A_1 B_1$ muß durch die H-Spur der AB gehen.)

Will man die AB mit ihrer verticalprojicirenden Ebene in die VE umklappen, so hätte man ganz den vorigen Fall, wenn die Punkte A, B auf einerlei Seite der VE lägen. In der angenommenen Figur aber liegen sie auf entgegengesetzten Seiten derselben, so daß die Verbindungslinie AB (unverlängert) die VE schneidet, und statt eines Trapezes erscheint in der Umklappung die Gestalt $a' b' B_2 A_2$, welche man erhält, wenn man in den Endpunkten von $a' b'$ die V-Distanzen der Punkte A, B unter rechten Winkeln, aber nach entgegengesetzten Richtungen aufträgt.

(Probe der Zeichnung: $S' s \perp GS$, d. h. S' muß die V-Spur der AB sein.)

Aus Vorstehendem ergibt sich folgende allgemein giltige Regel: In derjenigen Grundebene, in welche die Umklappung geschehen soll, setzt man an den Endpunkten der Projection von AB die betreffenden (aus der andern G-Ebene zu entnehmenden) Grunddistanzen rechtwinkelig an, und zwar nach einerlei oder nach entgegengesetzten Seiten hin, je nachdem in der andern G-Ebene jene Distanzen auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten des Grundschnitts erscheinen.



Zusatz. Da die oben ausgeführten Umklappungen der AB auf die Spuren dieser Geraden hinweisen, so stößt man hier auf eine Auflösung der in Nr. 34 enthaltenen Aufgabe für den besondern Fall, wo das dort gelehrte Verfahren nicht brauchbar ist (und welcher bereits im Zusatz zu Nr. 37 auf andere Art bereinigt wurde).

Sind nämlich (a, b), (a′, b′) zwei Punkte einer Geraden deren Projectionen senkrecht zum Grundschnitt liegen, so leitet die mit der h-projicirenden Ebene ausgeführte Umklappung der AB unmittelbar auf die H-Spur S dieser Geraden, und $m T_1'$ ist die Entfernung der V-Spur T′ vom Grundschnitt.

62. Aufg. Die Horizontalspur PO einer Ebene und die Projectionen a, a' eines in ihr liegenden Punktes sind gegeben. Man soll die Lage des Punktes angeben, nachdem die Ebene in die HE umgeklappt worden.

Aufl. I. Denkt man sich sowohl aus A als aus dessen Projection a Senkrechte auf OP gefällt, so werden beide einerlei Fußpunkt F haben (Nr. 5, x). Dreht man nun die gegebene Ebene um OP, so muß AF stets senkrecht auf OP bleiben, also nach vollendeter Drehung in die Richtung von aF fallen. Die Lage des Punktes A nach der Umklappung wird daher bestimmt sein, sobald man seine Entfernung von F kennt. Diese ist aber die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks AFa, dessen eine Kathete aF, dessen andere Aa = ma' ist. Macht man demnach mn = aF, FA_1 = a'n, so ist A_1 die Lage von A nach Umklappung der Ebene AOP.

† Fällt a in OP, d. h. ist die Ebene senkrecht zur HE, so fällt F mit a zusammen, und es ist AF = ma'.

†† Ist OP ⊥ GS, d. h. ist die Ebene senkrecht zur VE, so würde ihre V-Spur durch a' gehen und es ist AF = a'O (Nr. 29). Die Gerade aA_1 und der Bogen $a'a_1$ in der Figur stellen die Projectionen des Kreisbogens AA_1 dar, welcher von dem Punkte A während der Drehung der Ebene beschrieben wird (Nr. 31). Fig. 8

Aufl. II. Man denke sich wie vorhin die Linie AF senkrecht auf OP gefällt und außerdem noch in der umzuklappenden Ebene durch A eine Parallele AS mit der VE gezogen. Ist aS ∥ GS, Ss' ⊥ GS, so sind aS, a's' die Projectionen und S die H-Spur derselben. Die V-Projection a's' zeigt die wahre Länge von AS (Nr. 29). Um daher das (bei F rechtwinkelige) Dreieck AFS in umgeklappter Lage zu zeichnen, hat man aF zu verlängern und von S aus mit einem Kreisbogen vom Halbmesser a's' zu durchschneiden. Der Schnittpunkt A_1 ist die verlangte Umklappung des Punkts A. Fig. 7.

Zusatz. Soll neben A gleichzeitig noch ein zweiter Punkt B der gegebenen Ebene mit dieser umgeklappt werden, so hat man wohl zu beachten, ob B und A auf einerlei Seite der HE liegen oder nicht. Im ersten Falle kommen die Umklappungen B_1 und A_1 auf einerlei Seite der Spur OP zu liegen, im andern Fall auf entgegengesetzte Seiten.

63. Aufg. Ein Punkt A liegt in einer gegebenen Ebene E so, daß er nach horizontaler Umklappung derselben die Stelle A_1 einnimmt. Man zeichne seine Projectionen für die ursprüngliche Stellung der Ebene.

Fig. 9. **Aufl.** I) Die Ebene E sei durch ihre beiden Spuren PO, OR′ gegeben. Bei dem Zurückbewegen der umgeklappten Ebene bleibt A in der auf PO senkrechten Ebene FQR′, beschreibt hier einen Kreisbogen, und kommt endlich in der Geraden FR′ an, nach welcher diese Ebene die gegebene Ebene schneidet. Klappt man also das Dreieck FQR′, welches jene Schnittlinie FR′ zur Hypotenuse hat, in die HE um (Nr. 60) und macht $FA_{\prime\prime} = FA_1$, so ist $A_{\prime\prime}$ wieder eine Umklappung von A; und nun sieht man leicht, daß man mittels einer von $A_{\prime\prime}$ auf FQ gefällten Senkrechten die H-Projection a und die H-Distanz $A_{\prime\prime}$ a des Punktes A erhält, also auch (nach Nr. 43) seine V-Projection a′. Als Genauigkeitsprobe kann man die V-Projection f′R′ der Schnittlinie FR′ zeichnen und zusehen, ob sie durch a′ geht.

(Der Schüler löse die Aufgabe auch mittels verticaler Umklappung der Ebene FQR′.)

Anmerkung. Es ist hier stillschweigend vorausgesetzt worden, der Punkt A liege oberhalb der HE. Läge er unter der HE, so würde $A_{\prime\prime}$ auf die Rückverlängerung der R″F zu liegen kommen, und die übrigen Constructionen würden sich demgemäß abändern. — Ist nicht bestimmt auf welcher Seite der HE der in A_1 umgeklappte Punkt sich ursprünglich befand (oder in welchem Sinne die Umklappung der Ebene POR′ ausgeführt worden ist), so sind für A zwei Lagen möglich.

II) Ist die Ebene E durch ihre H-Spur und die Projectionen eines in ihr liegenden Punkts B gegeben, so bestimme man zuerst die Lage B_1 welche dieser Punkt nach horizontaler Umklappung der Ebene erhält (Nr. 62). Die Verbindungslinie A_1 B_1 führt zunächst auf die H-Spur der AB; mittels dieser Spur und ihrer (im Grundschnitt liegenden) V-Projection erhält man die beiden Projectionen der AB und dann ergeben sich auch leicht die Projectionen des Punkts A.

(Auch hier ist zu wissen nöthig, auf welcher Seite der HE ursprünglich der Punkt A lag, damit die im Zusatz zu Nr. 62 gegebene Weisung befolgt werden könne.)

64. Aufg. Es ist eine Gerade AB und auf ihr ein Punkt A gegeben. Man soll die h-projicirende Ebene der Geraden um das h-projicirende Loth des Punkts A so weit drehen, daß sie parallel zur V-Ebene wird, und die Projectionen für die neue Lage der Geraden zeichnen.

Aufl. Die H-Projection der neuen Lage ist offenbar die zum Grundschnitt Parallele ab_0. Um auch die V-Projection zu erhalten, bemerke man, daß ein auf der ursprünglichen Lage willkürlich genommener Punkt (b, b′) einen Kreisbogen in einer zur H-Ebene parallelen Ebene beschreibt, mithin seine V-Distanz nicht ändert. Macht man daher $ab_0 = ab$, $b'b_{\prime\prime} \parallel GS$, $b_0b_{\prime\prime} \perp GS$, so ist $a'b_{\prime\prime}$ die gesuchte V-Projection. (bb_0 und $b'b_{\prime\prime}$ sind die Projectionen des erwähnten Kreisbogens.) Fig. 12.

65. Aufg. Eine Ebene ist durch eine horizontale Linie (bc, b′c′) und einen Punkt (a, a′) bestimmt. Man soll die H-Projection angeben, welche diesem Punkte entspricht, wenn man die Ebene durch Drehung um (bc, b′c′) in horizontale Lage gebracht hat.

Aufl. I. Führt man durch A senkrecht zu BC eine Ebene E, so beschreibt A in derselben während der Drehung der gegebenen Ebene einen Kreisbogen, dessen H-Projection in ihre Spur fällt; also wird sich auch die neue Lage des Punkts A in diese Spur projiciren, welche man erhält, wenn man aus a eine Senkrechte aa_1 auf bc fällt (vgl. Nr. 55, †). Zeichnet man nun noch die Projectionen ac, a′c′ einer durch A gehenden Geraden, welche parallel zur VE ist und zugleich die BC in C schneidet, so stellt a′c′ die wahre Länge derselben oder die Entfernung des Punkts A von C vor (Nr. 29); und da diese Entfernung nach vorgeschriebener Drehung der gegebenen Ebene sich auch auf die HE in der wahren Größe projiciren muß, so findet man die verlangte neue Projection a_1 des bewegten Punkts A als Schnitt der aa_1 und eines Kreisbogens, welcher c zum Mittelpunkt und a′c′ zum Halbmesser hat. Fig. 10.

Aufl. II. Die vorhin erwähnte Ebene E schneidet die BC in einen Punkt F, dessen Horizontalprojection f ist und dessen V-Projection in b′ c′ liegt. Wäre die Entfernung AF bekannt, so würde man offenbar den gesuchten Punkt a_1 erhalten, wenn man $fa_1 = AF$ machte. Fig. 10.

Die Größe dieser Entfernung ist aber (wie die zweite Auflösung der nächstfolgenden Aufgabe zeigt) der Hypotenuse a′f,, des Dreiecks a′vf,, gleich, dessen einer Kathete vf,, man die Länge af gegeben hat.

66. Aufg. Die Entfernung zweier gegebenen Punkte (a, a′), (b, b′) darzustellen.

Fig. 11. **Aufl.** I. Zieht man die Verbindungslinie AB und klappt sie mit einer ihrer projicirenden Ebenen in die zugehörige Grundebene um (Nr. 61), so stellt sich die AB in wahrer Größe dar.

Fig. 12. **Aufl.** II. Dreht man die h-projicirende Ebene der Geraden AB um das h-projicirende Loth des Punkts A bis in die zur V-Ebene parallele Stellung und bestimmt die V-Projection b,, für die neue Lage des Punkts B (Nr. 64), so ist a′b″ die wahre Entfernung der gegebenen Punkte (Nr. 29).

Man sieht leicht, daß man hiebei weder die Gerade ab_0 der Fig. 12 noch den Bogen bb_0 nöthig hat; vielmehr reicht folgende Regel aus. Man ziehe durch die V-Projection von B eine Parallele zum Grundschnitt bis an die Gerade welche die beiden Projectionen des Punkts A verbindet, und trage von dort aus auf der Parallelen die H-Projection ab ab; der Endpunkt b,, des abgetragenen Stückes ist von a′ um die gesuchte Länge AB entfernt.

Verfährt man nach dieser Regel unter Vertauschung der Namen horizontal und vertical, so ergibt sich die Construction welche in Fig. 12 auf eine zweite Darstellung ab_1 der wahren Länge AB geführt hat.

(Diese Aufl. II ist in der Regel die bequemere.)

67. Aufg. Die Entfernung eines gegebenen Punktes A von einer gegebenen Ebene ROP′ anzugeben.

Aufl. I. Man fälle aus A eine Senkrechte auf ROP′ (Nr. 54), projicire deren Fußpunkt B (Nr. 48) und suche die Länge von AB (Nr. 66).

Fig. 13. **Aufl.** II. Eine durch AB und das Projectionsloth Aa gelegte Ebene RQP′ ist senkrecht auf OR (Nr. 5, XI. XII) und schneidet die gegebene nach einer Geraden RP′, welche den Fußpunkt B der AB enthält. Zeichnet man (nach Nr. 55, †) die Spuren dieser Ebene, klappt dieselbe in die HE um und bestimmt hier die Lage RP,, der Schnittlinie RP′ (Nr. 60), so wie die Lage A_1 des Punkts A (Nr. 62, †), so gibt die von A_1 auf RP,, gefällte Senkrechte $A_1 B_1$ die verlangte Entfernung an.

Zur Uebung suche man diese Entfernung auch mittels der verticalen Umklappung von RQP'.

(Wie erkennt man in jeder Auflösung, ob der gegebene Punkt über oder unter der gegebenen Ebene liegt?)

68. Aufg. Die Entfernung eines gegebenen Punkts A von einer gegebenen Geraden M anzugeben.

Aufl. I. Man fällt aus A eine Senkrechte zu M (Nr. 56) und bestimmt die Entfernung des Fußpunkts derselben von A (Nr. 66).

Aufl. II. Man bestimme die H-Spur der durch A und M gehenden Ebene AM, klappe diese in eine Grundebene um, und fälle aus der Umklappung von A eine Senkrechte auf die Umklappung von M.

Zusatz. Hieraus ergibt sich auch eine zweite Auflösung für die Aufgabe der Nr. 56. Denn ist B_1 der Fußpunkt der in der umgeklappten Ebene AM gezogenen Senkrechten, so muß die H-Projection b dieses Punkts nach der Zurückbewegung der Ebene in der Senkrechten liegen, die man von B_1 auf die H-Spur der Ebene fällen kann; und da diese Projection b zugleich in die H-Projection der M fallen muß, so ist sie leicht zu bestimmen. Die zugehörige V-Projection b' ergibt sich nach Nr. 44, und die Projectionen der gesuchten Senkrechten sind dann die Verbindungslinien ab und a'b'.

69. Aufg. Die Entfernung zweier parallelen Ebenen POP', RQR' anzugeben.

Aufl. Man könnte in der einen Ebene einen beliebigen Punkt annehmen (Nr. 40) und seine Entfernung von der andern bestimmen (Nr. 67). Kürzer aber ist folgende Auflösung.

Zieht man TP ⊥ OP, TP' ⊥ GS, so ist die Ebene PTP' senkrecht zu OP und QR (Nr. 27), also auch senkrecht zu den beiden gegebenen Ebenen (Nr. 5, XI). Die Entfernung der letztern ist demnach gleich der Entfernung der beiden Linien, nach welchen sie durch die PTP' geschnitten werden. Klappt man die Ebene PTP' in die VE um, so stellt P_1 P' die eine dieser Schnittlinien vor (Nr. 60); die andere ließe sich (in der Fläche des umgeklappten Dreiecks PTP') eben so leicht angeben; da man aber nur einen ihrer Punkte zu kennen braucht und R' ein solcher Punkt ist, so fälle man R'E ⊥ P_1 P', um in R'E die gesuchte Entfernung zu haben. Fig. 14.

Es ist klar, daß man statt der PTP' auch eine Ebene senkrecht zu den V-Spuren der gegebenen Ebenen hätte zu Hülfe nehmen können.

† Stehen die gegebenen Ebenen beide senkrecht zu einer und derselben Grundebene, so ist ihre Entfernung gleich der Entfernung ihrer in dieser Grundebene liegenden H-Spuren.

70. Uebungsaufgaben.

1) Gegeben: Die wahre Länge einer Geraden, die Projectionen ihres Anfangspunkts und eine Projection ihres Endpunkts. Gesucht: die andere Projection des Endpunkts.

2) Gegeben: Die Projectionen einer Geraden und eines Punkts in ihr. Gesucht: die Projectionen eines zweiten Punkts auf der Geraden, der von jenem einen gegebenen Abstand hat.

3) Auf einer gegebenen Geraden einen Punkt zu finden, der von einem außerhalb der Geraden gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat.

4) Eine Ebene einer gegebenen in bestimmter Entfernung parallel zu legen.

5) Die V-Projection einer Geraden zu finden, welche eine gegebene H-Projection hat und einer gegebenen Ebene in gegebener Entfernung parallel ist.

6) Die H-Projection eines Punkts anzugeben, dessen V-Projection und dessen Entfernung von einer gegebenen Ebene bekannt sind.

71. Aufg. Die Entfernung zweier gegebenen Parallellinien (ab, a′b′), (cd, c′d′) anzugeben.

Aufl. Man nehme in der einen Linie willkürlich einen Punkt (am bequemsten eine Spur), und suche seine Entfernung von der andern (Nr. 68). Oder man lege eine Ebene senkrecht zu beiden Linien, bestimme die Schnittpunkte der Linien in ihr (Nr. 48) und klappe die Ebene mit diesen Schnittpunkten (deren Abstand der gesuchten Entfernung gleich ist) in eine Grundebene um (Nr. 62) (s. Fig. 16). Oder man klappe die durch die gegebenen Parallelen bestimmte Ebene um.

Fig. 15. Wenn der Raum des Zeichnungsblattes die Bestimmung zweier gleichnamigen Spuren der Parallelen gestattet, so ist das zuletzt genannte Verfahren das kürzeste. In Fig. 15 ist ST die H-Spur der durch AB und CD gehenden Ebene P, (a, a′) ein in AB beliebig gewählter Punkt, A_1 die Lage dieses Punkts nach Umklappung der P in die HE (vgl. Nr. 62), also SA_1 die Lage von SA (oder AB) in der umgeklappten P. Die (mit P umgeklappte) CD würde durch T gehen;

daher gibt die Länge TE einer von T auf SA_1 gefällten Senkrechten die gesuchte Entfernung.

72. Aufg. Die Projectionen einer Geraden CD zu finden, welche mit einer gegebenen Geraden AB auf einen gegebenen Abstand δ parallel ist und deren H-Projection durch den Punkt d geht.

Aufl. Zunächst kann man die H-Projection cd der gesuchten Geraden ziehen (Nr. 33). Fig. 16.

Denkt man die AB und die CD durch eine Ebene POP′ senkrecht geschnitten (Nr. 27) und diese in die HE umgeklappt, so müssen beide Schnittpunkte in die Projectionen ab und cd fallen und hier um die gegebene Entfernung δ von einander abstehen. Bestimmt man daher die Projectionen a, a′ und die umgeklappte Lage A_1 des Schnittpunktes A, welcher der AB entspricht (Nr. 48, 62) und durchschneidet die cd von A_1 aus mit δ, so ist der Durchschnitt C_1 die umgeklappte Lage des Punkts C, in welchem CD die Ebene POP′ trifft. Der Punkt P, wo die Verbindungslinie $A_1 C_1$ der Spur OP begegnet, ist die H-Spur einer durch A und C gehenden Geraden; also ist Pa die H-Projection dieser Geraden und c die H-Projection des Punkts C. Zeichnet man auch die V-Projection a′p′ der Geraden AP, so ergibt sich die V-Projection c′ des Punkts C nach Nr. 44, und eine durch c′ gelegte Parallele mit a′b′ ist die gesuchte V-Projection der CD. (Die Projectionen c und c′ lassen sich auch unabhängig vom Punkte P, der manchmal in unbequeme Entfernung fallen kann, auffinden. Hiezu folgende Andeutungen: Man hat behufs der Umklappung von POP′ ein Dreieck a′mv construirt, welches dem Dreieck Aaf congruent ist; letzteres ist aber offenbar dem Dreieck Ccg ähnlich; macht man daher $vw = C_1 g$, $wr \parallel a'm$, so ist $vr = cg$ und $wr = nc'$.)

Der um A_1 mit δ beschriebene Kreisbogen schneidet die cd außer in C_1 noch in einem zweiten Punkte, mit welchem man eben so verfahren kann, wie mit C_1. Die Aufgabe wird daher im Allgemeinen zwei Auflösungen zulassen.

73. Aufg. Den kleinsten Abstand zwischen zwei gegebenen Geraden M, N zu bestimmen.

Aufl. Sind die gegebenen Geraden parallel, so ist ihr Abstand überall derselbe und wird nach Nr. 71 gefunden. Schneiden

sie sich, so ist der kleinste Abstand = 0. Für jeden andern Fall erhält man die Länge des gesuchten Abstandes, wenn man durch die eine Gerade M eine Ebene E parallel zur andern Geraden N legt (Nr. 52) und die Entfernung der N von dieser Ebene bestimmt. Letzteres geschieht, indem man aus einem beliebigen Punkte A_0 der N eine Senkrechte auf die Ebene E fällt (Nr. 54), ihren Fußpunkt B_0 projicirt (Nr. 48) und die Größe A_0 B_0 zeichnet (Nr. 66).

Sollen in beiden Geraden die Punkte A und B selbst bestimmt werden, welche am nächsten beisammen liegen (deren Verbindungslinie also auf beiden Geraden zugleich senkrecht steht), so denke man sich die Senkrechte A_0 B_0 parallel mit ihr selbst so lange an N fortbewegt, bis der Fußpunkt B_0 in der M ankommt, in welchem Augenblicke A_0 mit A und B_0 mit B zusammen fallen muß. Da bei dieser Bewegung B_0 in der Ebene E eine Parallele mit N beschreibt, so wird man auf folgende Construction geführt. Sind a_0, b_0, m, n die H-Projectionen von A_0, B_0, M, N, so ziehe man durch b_0 eine Parallele zu n, welche die m in b schneidet; ferner durch b eine Parallele zu a_0 b_0, welche die n in a schneidet. Dann sind a, b die H-Projectionen der verlangten Punkte A, B. Die V-Projectionen erhält man nach Nr. 44; oder man sucht sie ganz ebenso wie man die H-Projectionen fand, und prüft die Genauigkeit der Zeichnung nach Nr. 10.

74. Aufg. Die Neigungen einer gegebenen Geraden gegen die Grundebenen darzustellen.

Aufl. Die Neigung einer Linie gegen eine Ebene ist (wie aus der Stereometrie bekannt) der Winkel der Linie mit ihrer Projection auf die Ebene.

Fig. 17. Sind S, T' die Spuren der gegebenen Geraden, so liegt zwischen S, t und T' ein rechtwinkeliges Dreieck, welches bei S den Neigungswinkel α gegen die HE enthält. Man hat daher nur dieses Dreieck in eine Grundebene umzuklappen (Nr. 60), um es in seiner wahren Gestalt zeichnen und den Winkel α angeben zu können. Zwischen S, s' und T' ist ein anderes rechtwinkeliges Dreieck enthalten, welches bei T' den Neigungswinkel β der gegebenen Geraden gegen die VE faßt. Klappt man dieses Dreieck ebenfalls um, so findet man auch den Winkel β. (In Fig. 17 ist jedes dieser Dreiecke in beide Grundebenen umgeklappt.)

† Läuft die gegebene Linie parallel mit einer der Grundebenen, so zeigen die Winkel ihrer Projectionen gegen den Grundschnitt die gesuchten Neigungen an (so nämlich, daß die H-Neigung in der VE und die V-Neigung in der HE zu erblicken ist).

†† Liegt die Linie in einer zum Grundschnitte senkrechten Ebene, so ergänzen sich beide Neigungswinkel zu einem rechten Winkel.

Fallen die Spuren der gegebenen Geraden, oder eine derselben, nicht mehr in das Zeichnungsblatt, so wähle man die Projectionen einer mit ihr parallelen so, daß man die Spuren dieser letztern bestimmen kann. Ihre Neigungswinkel gegen die Grundebenen werden mit den gesuchten übereinstimmen. Oder man nehme in der gegebenen Geraden zwei beliebige Punkte A, B an, denke sich durch B Parallelen BC, BD mit den Projectionen gezogen, bis sie die von A ausgehenden projicirenden Linien in C und D schneiden, und construire die Dreiecke ABC und ABD, wie es in Fig. 12 zu einem andern Zwecke bereits geschehen. Dann ist offenbar

$$W.\ a'b_{,,}c'\ (= W.\ ABC) = \alpha,$$
$$W.\ a\,b_1\,d\ (= W.\ ABD) = \beta.$$

Anmerkung. Eine Linie schließt mit ihrer Projection immer zwei Winkel ein, die sich suppliren. Von diesen soll aber hier immer der spitze vorzugsweise als Maß der Neigung betrachtet werden. Wenn man daher in spätern Aufgaben auf die Lage einer Linie aus den gegebenen Neigungswinkeln gegen die Grundebenen zu schließen hat, so sind beide stets als spitz vorausgesetzt. Der Allgemeinheit der Auflösung geschieht dadurch kein Eintrag, da man für einen gegebenen stumpfen Neigungswinkel immer sein Supplement einführen kann.

Dieselben Bemerkungen gelten zugleich für solche künftige Aufgaben, bei denen es sich um die Neigungswinkel einer Ebene gegen die Grundebenen handelt.

Der Kürze wegen sollen in der Folge sowohl bei Ebenen als bei Linien die Benennungen H-Neigung, V-Neigung, G-Neigung (statt: Neigungswinkel gegen die HE, VE, GE) gebraucht werden.

75. Uebungsaufgaben.

1) Gegeben: Die H-Projection einer Geraden, ihre H-Spur und ihre H-Neigung. Gesucht: ihre V-Projection.

2) Gegeben: Die H-Projection einer Geraden, ihre H-Spur und ihre V-Neigung. Gesucht: ihre V-Projection.

3) Gegeben: Die Spuren einer Ebene, eine Projection eines Punktes in ihr, und ein Winkel. Gesucht: die Projectionen einer

Geraden, welche in der Ebene durch jenen Punkt so gezogen ist, daß sie mit einer der Grundebenen den gegebenen Winkel bildet.

76. Aufg. Die H-Neigung α und die V-Neigung β einer Geraden nebst einem ihrer Punkte sind gegeben. Man soll ihre Projectionen finden.

Aufl. Betrachtet man zuerst einige besondere Fälle, so kann man leicht zur allgemeinen Auflösung übergehen.

1) Der gegebene Punkt sei die V-Spur T′ der Geraden.

Fig. 18. Man zeichne das Dreieck $T'S_0t$ so, daß W. $T'tS_0 = 90^\circ$ und W. $T'S_0t = \alpha$. Dann ist der mit tS_0 um t beschriebene Kreis der geometrische Ort für die H-Spur der gesuchten Geraden, und $T'S_0$ das zwischen die Grundebenen fallende Stück derselben. Errichtet man daher über $T'S_0$ einen Halbkreis und macht W. $S_0T'R = \beta$, so ist RS_0 die V-Distanz jener H-Spur und T′R die Länge der V-Projection des zwischen beiden Spuren enthaltenen Stücks der Geraden. Man hat demnach mit T′R einen Kreis um T′ zu beschreiben und im Punkte s′, wo er den Grundschnitt trifft, eine Senkrechte $s'S_1$ auf letzterem zu errichten, um die Lage S_1 oder S_2 der H-Spur zu finden. Da aber jener Kreis dem Grundschnitte noch in einem andern Punkte s‴ begegnet, so erhält man für die H-Spur noch zwei Lagen S_3 und S_4, welche zugleich in die Verlängerungen der Geraden S_2t und S_1t fallen müssen. (Die Punkte S_1, S_2, S_3, S_4 würden sich auch ergeben haben, wenn man zu beiden Seiten des Grundschnitts Parallelen S_1S_3, S_2S_4 mit ihm in der Entfernung S_0R gezogen hätte.)

Es gibt demnach vier Linien, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen; nämlich (S_1t, s′T′), (S_2t, s′T′), (S_3t, s‴T′), (S_4t, s‴T′).

† Ist $\beta = 90^\circ - \alpha$ (oder $\alpha + \beta = 90^\circ$), so ist $\triangle T'RS_0 \cong \triangle T'tS_0$, also $T'R = T't$. In diesem Falle berührt der um T′ beschriebene Kreis den Grundschnitt in t; man erhält nur zwei Linien, welche der Aufgabe Genüge leisten, und diese liegen in einer zum Grundschnitte senkrechten Ebene (vgl. Nr. 74, ††).

†† Ist $\beta > 90^\circ - \alpha$ (oder $\alpha + \beta > 90^\circ$), so ist $T'R < T't$ und die Aufgabe läßt keine Auflösung zu.

2) Die gesuchte Gerade begegne im Punkte C dem Grundschnitt.

Macht man W. $b_0 C B_0 = \alpha$, so kann man $C B_0$ als die Lage der Fig. 19.
gesuchten Geraden betrachten, nachdem sie mit ihrer h-projicirenden Ebene in die VE umgeklappt worden. Dreht man die projicirende Ebene wieder in ihre wahre Lage zurück, so bewegt sich die H-Projection b_0 eines beliebigen Punktes B_0 der Geraden in einem Kreise $b_0\, b_2\, b_4$ um C, die V-Projection des nämlichen Punktes in der mit dem Grundschnitt parallelen $B_0\, b'''$. Der Punkt B, welcher sich nach B_0 umgeklappt hat, kann nun entweder vor oder hinter der VE liegen. Will man ihn daher (durch Umklappung der v-projicirenden Ebene von CB) in die HE legen, so hat man durch C entweder vor oder hinter dem Grundschnitt eine Gerade unter dem Winkel β gegen letztern zu ziehen und auf ihr von C aus ein Stück $= C B_0$ abzutragen, wodurch man den Punkt B^0 oder $\mathfrak{B}^0$ erhält. Beiden Lagen entspricht aber offenbar eine und dieselbe V-Projection b^0, und diese wird beim Zurückdrehen der v-projicirenden Ebene in ihre wahre Stellung einen Kreis $b^0 b' b'''$ um C beschreiben. Die wahre Lage des Punkts B wird also zur V-Projection jedenfalls einen der Punkte b', b''' haben, in denen der Kreis $b^0 b' b'''$ die Gerade $B_0\, b'''$ schneidet. Die zugehörige H-Projection muß in dem Kreise $b_0\, b_2\, b_4$ liegen und zugleich in der aus der V-Projection auf den Grundschnitt gefällten Senkrechten. Jeder V-Projection entsprechen aber zwei H-Projectionen (da die erwähnte Senkrechte den Kreis zweimal trifft), so daß man für den Punkt B vier Lagen erhält. Die Aufgabe löst mithin jede der vier Geraden ($C b_1$, $C b'$), ($C b_2$, $C b'''$), ($C b_3$, $C b'''$), ($C b_4$, $C b'$).

(Die H-Projectionen b_1, b_2, b_3, b_4 müssen um $B^0 b^0$ vom Grundschnitt entfernt sein; also liegt B^0 mit b_1 und b_2 in gerader Linie, oder $\mathfrak{B}^0$ mit b_4 und b_3).

† Für $\alpha + \beta = 90^0$ ist $C b^0 = B_0\, b_0$; der Kreis $b^0 b'''$ berührt die Gerade $B_0\, b'''$ und es gibt nur zwei Auflösungen.

†† Für $\alpha + \beta > 90^0$ ist $B_0\, b_0 > C b^0$; der Kreis trifft die Gerade gar nicht, und die Aufgabe ist nicht zu lösen.

3) Liegt der gegebene Punkt (a, a') irgendwo im Raume, so nehme man vorläufig einen Punkt in einer Grundebene oder im Grundschnitt an, lege durch diesen Punkt eine Gerade unter den gegebenen G-Neigungen (nach 1 oder 2) und hierauf durch den Punkt (a, a') eine Parallele mit ihr.

Zusatz. Die Lösung vorstehender Aufgabe hat zu dem Lehrsatz ge-

führt, daß die Summe der Grundneigungen einer Geraden nie einen rechten Winkel überschreiten kann.

77. Lehrsätze.

I. Die Projectionen zweier gleichgroßen Linien auf eine Grundebene sind gleichgroß, wenn die Grundneigungen beider Linien gleich sind. Denn zieht man durch den Endpunkt jeder Linie eine Parallele mit ihrer Projection bis zum Durchschnitt mit der aus dem Anfangspunkte gefällten projicirenden Linie, so entstehen zwei rechtwinkelige Dreiecke, welche in der Hypotenuse und einem anliegenden Winkel übereinstimmen, also congruent sind. Die mit der Grundebene parallele Kathete jedes solchen Dreiecks hat aber die Länge der Projection der Hypotenuse, so daß mit der Gleichheit jener Katheten auch die Gleichheit dieser Projectionen erwiesen ist.

II. Linien sind gleichgroß, wenn sie sich auf eine Grundebene in gleicher Größe projiciren und gegen diese Ebene gleiche Neigung haben. Denn die vorhin erwähnten rechtwinkeligen Dreiecke haben eine Kathete und den anliegenden Winkel von gleicher Größe, also auch die Hypotenusen.

III. Zwei Linien haben gleiche Neigung gegen eine Grundebene, wenn sie bei gleicher Größe gleiche Projectionen haben. Denn die rechtwinkeligen Dreiecke haben die Hypotenuse und eine Kathete gleich, also auch den von beiden eingeschlossenen Winkel.

Zusatz 1. Also sind die gleichnamigen Projectionen gleichgroßer Parallellinien gleichgroß. Und zwei Linien sind gleich und parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und ihre gleichnamigen Projectionen gleich und parallel sind.

Zusatz 2. Der obige Satz III läßt sich zu folgendem verallgemeinern:

Zwei begrenzte Gerade haben gleiche G-Neigung, wenn sie sich verhalten wie ihre Projectionen. Denn die rechtwinkeligen Dreiecke, welche durch die Geraden und die Längen ihrer Projectionen bestimmt sind, haben zwei Seiten proportionirt und den Gegenwinkel der größern gleich, sind also ähnlich. Es folgt hieraus, daß die Größe der G-Neigung einer Linie blos vom Verhältniß der Linie zur Projection abhängt oder von dem Werthe des Bruches $\frac{1}{L}$, wo L die

Länge der wahren Linie und l die Länge der Projection bedeutet. Man nennt den Werth dieses Bruches den Cosinus der G-Neigung α, und schreibt

$$\frac{l}{L} = \cos \alpha.$$

Der Cosinus der G-Neigung einer unbegrenzten Geraden ergibt sich ebenso, wenn man ein beliebig in ihr begrenztes Stück mit der Projection dieses Stückes zusammenhält.

78. Aufg. Die Neigungswinkel einer gegebenen Ebene POP′ gegen die Grundebenen zu finden. Fig. 22.

Aufl. Die H-Neigung wird durch den Winkel der beiden Geraden gemessen, nach denen eine zur H-Spur senkrechte Ebene die gegebene Ebene und die HE schneidet. Die verticale Spur P′r′ einer solchen Schnittebene ist senkrecht zum Grundschnitt, die horizontale r′P senkrecht zu OP (Nr. 12. 27). In Pr′ hat man sogleich einen Schenkel und in P die Spitze des gesuchten Neigungswinkels; der andere Schenkel (die Schnittlinie der Ebene Pr′P′ und der gegebenen) hat den Punkt P′ zur V-Spur; der Winkel ist also in ein rechtwinkeliges Dreieck P′r′P geschlossen, und man erhält seine Größe α, wenn man dieses Dreieck in umgeklappter Lage $P'r'P_0$ zeichnet (Nr. 60).

Auf ähnliche Weise findet man die V-Neigung β.

† Steht eine Ebene senkrecht auf einer der Grundebenen, so sind ihre Grundneigungen den Winkeln gleich, welche ihre Spuren mit dem Grundschnitt einschließen (so nämlich, daß die Neigung gegen die eine Grundebene aus der andern Grundebene zu entnehmen ist).

†† Die G-Neigungen einer Ebene, welche dem Grundschnitt parallel ist, oder durch denselben geht, ergänzen sich zu einem rechten Winkel. Ist im letzteren Falle die Lage der Ebene dadurch bestimmt, daß man die Projection eines in ihr liegenden Punktes kennt, so findet man die G-Neigungen, indem man aus diesem Punkte eine Senkrechte auf den Grundschnitt fällt und deren Winkel gegen die Grundebenen bestimmt.

Zusatz. Die G-Neigung einer Ebene ist gleich der G-Neigung einer Geraden, welche in der Ebene senkrecht zu ihrer Spur gezogen wird. Hieraus und aus Nr. 77, Zus. 2 ist zu ersehen, was man unter dem Cosinus der G-Neigung einer Ebene zu verstehen habe.

79. Wirft man hier einen Blick auf die Aufgabe der Nr. 63 zurück, so sieht man, daß W. QFA,, (Fig. 9) die H-Neigung der Ebene POR' darstellt. Wäre daher dort die Ebene (statt durch beide Spuren) durch die H-Spur und die H-Neigung α gegeben gewesen, so hätte man $A_1F \perp OP$, W. $A_1FA_{,,} = \alpha$ gemacht; im Uebrigen bliebe das Verfahren ungeändert.

Eben so könnte bei der Aufgabe der Nr. 62 nur die H-Projection des Punkts A und statt der andern Projection die H-Neigung α der Ebene gegeben sein, und man wird nun leicht das Verfahren finden, mittels dessen man in diesem Falle die Umklappung A_1 des Punkts A erhält.

80. Uebungsaufgaben.

1) Gegeben: Die $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-Spur einer Ebene und ihre $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-Neigung. Gesucht: Die $\left\{\begin{smallmatrix}V\\H\end{smallmatrix}\right\}$-Spur.

2) Ggb.: Die $\left\{\begin{smallmatrix}H\\V\end{smallmatrix}\right\}$-Spur einer Ebene und ihre $\left\{\begin{smallmatrix}V\\H\end{smallmatrix}\right\}$-Neigung. Ges.: Die $\left\{\begin{smallmatrix}V\\H\end{smallmatrix}\right\}$-Spur.

(Wie verfährt man, wenn in beiden Aufgaben die gegebene Spur dem Grundschnitte nicht mehr innerhalb des Zeichnungsblattes begegnet?)

81. Aufg. Durch eine gegebene Gerade AB eine Ebene zu legen, welche gegen eine der Grundebenen eine gegebene Neigung hat.

Aufl. Der gegebene Neigungswinkel α beziehe sich auf die HE.

Fig. 20. Man denke von der V-Spur S' der gegebenen Linie eine Senkrechte auf die H-Spur der gesuchten Ebene gefällt, ihren Fußpunkt P mit s verbunden und das Dreieck S'sP in die VE umgeklappt. In dieser Lage kann man dasselbe zeichnen, wenn man W. $sS'P_1 = 90^0 - \alpha$ macht. Dreht man nun dieses Dreieck in seine ursprüngliche Lage zurück, so beschreibt P_1 um s einen Kreis, welcher die gesuchte H-Spur berühren muß, weil diese senkrecht auf sP stehen soll. Zieht man daher an den Kreis aus der H-Spur A der gegebenen Geraden eine Tangente AP und verbindet den Punkt O, wo sie den Grundschnitt trifft, mit S', so ist AOS' die verlangte Ebene. Da aber noch eine andere Tangente AT möglich ist, so gewährt die Ebene AMS' eine zweite Auflösung.

Geht der Kreis um s durch A (d. h. ist $\alpha =$ W. S'As), so gibt es nur eine Auflösung; gar keine, wenn A vom Kreise eingeschlossen wird (d. h. wenn $\alpha <$ W. S'As).

† Fällt O in zu große Entfernung, so lege man eine Ebene QrR'

senkrecht zu AP und denke sich das Dreieck, welches zwischen Qr, rR′ und dem Durchschnitte der QrR′ mit der gesuchten Ebene liegt, in die VE umgeklappt. Da dieses Dreieck bei Q den Winkel α enthalten muß, so hat man $rQ_1 = rQ$ und $Q_1R' \parallel P_1S'$ zu machen. Der Schnittpunkt R′ liegt dann auf der V-Spur der verlangten Ebene und bestimmt mit S′ diese Spur. Fig. 20.

†† Liegen die Spuren der gegebenen Geraden sehr weit entfernt oder gar nicht mehr im Zeichnungsblatte, oder fallen sie einander so nahe daß die Construction ungenau wird, so denke man sich aus einem beliebigen Punkte (a, a′) der Geraden eine Senkrechte auf die H-Spur der gesuchten Ebene gezogen, ihren Fußpunkt F mit der Projection a verbunden und das Dreieck AaF durch Drehung um Aa in eine zur VE parallele Stellung gebracht, zeichne für diese Stellung die V-Projection $a'mf_1$ des Dreiecks (indem man W. $ma'f_1 = 90^0 - \alpha$ macht) und bestimme die Stelle F_1, welche der Punkt F nach jener Drehung einnimmt. Dann ist der mit aF_1 um a beschriebene Kreis der geometrische Ort des Punktes F, und die H-Spur der gesuchten Ebene muß diesen Kreis berühren. Wiederholt man das ganze Verfahren für einen zweiten Punkt (b, b′) der gegebenen Geraden, so erhält man einen zweiten Kreis (um b), den die gesuchte H-Spur ebenfalls berühren muß. Eine gemeinschaftliche Tangente beider Kreise (und zwar eine äußere wenn A und B auf einerlei Seite der HE liegen, eine innere wenn diese Punkte auf entgegengesetzten Seiten der HE liegen) ist demnach diese Spur. Sind F und G die Berührungspunkte (also die Fußpunkte der aus A und B auf die H-Spur der Ebene gefällten Senkrechten), so erhält man die zugehörige V-Spur, wenn man die V-Projectionen und die V-Spuren F′, G′ der Linien FA und GB bestimmt und F′G′ zieht. Fig. 21.

Man sieht auch bei dieser Art der Auflösung, daß man im Allgemeinen zwei Ebenen erhält. Liegen die Punkte A, B auf einerlei Seite der HE, so erscheint eine einzige Ebene, wenn einer der um a und b beschriebenen Kreise den andern von innen berührt (was nur in der H-Spur der AB geschehen könnte); gar keine, wenn einer den andern umschließt ohne ihn zu berühren. Liegen A, B auf verschiedenen Seiten der HE, so gibt es eine Ebene, wenn die Kreise sich von außen berühren (wobei der Berührungspunkt wieder die H-Spur der AB wird); gar keine wenn der eine Kreis entweder den andern einschließt oder ihn schneidet.

82. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt (a, a') eine Ebene zu legen, welche gegen die HE die gegebene Neigung α, gegen die VE die gegebene Neigung β hat.

Fig. 22. **Aufl.** I. Man denke sich eine mit der gesuchten parallele Ebene POP' bereits vorhanden, und führe durch einen und denselben Punkt r' des Grundschnitts zwei Ebenen senkrecht zu ihren Spuren. Aus diesen Ebenen werden durch die POP' und die Grundebenen zwei rechtwinkelige Dreiecke Pr'P' und Rr'R' geschnitten, welche bei P und R' die Neigungswinkel α und β fassen. Die Gerade, nach welcher sich die Dreiecksebenen schneiden, geht durch r' und steht auf POP' senkrecht (Nr. 5, XII); sie stellt also die gemeinschaftliche Höhe beider Dreiecke vor, wenn man die Hypotenusen als die Basen betrachtet.

Um nun mit Hülfe der Winkel α, β die Spuren einer Ebene wie POP' auf der Zeichnungsebene wirklich zu finden, ziehe man durch einen beliebigen Punkt r' des Grundschnitts eine Gerade R℞ senkrecht zu diesem, mache W. $r'P_0P' = \alpha$ (wobei $r'P_0$ beliebig lang), beschreibe mit der Höhe $r'F_1$ des Dreiecks $P'r'P_0$ um r' einen Kreis, und lege an ihn eine Tangente R_0R unter dem Winkel β gegen den Grundschnitt. Dann sind $P'r'P_0$ und $Rr'R_0$ die Umklappungen der vorhin erwähnten Dreiecke P'r'P und Rr'R'. Die H-Spur der Ebene POP' geht daher durch R und berührt den mit $r'P_0$ um r' beschriebenen Kreis; die V-Spur verbindet den Punkt P' mit dem Punkte, in welchem die H-Spur den Grundschnitt trifft, und berührt zugleich den mit $r'R_0$ um r' beschriebenen Kreis. Da aber aus R an den Kreis P_0P zwei Tangenten RO und R𝔒 möglich sind, so kann man ebensowohl R𝔒P' als ROP' für die zunächst gesuchte Ebene nehmen. Da man ferner an den Kreis $F_1F_{\prime\prime}$ eine unter W. β gegen den Grundschnitt geneigte Tangente auch hinter dem Grundschnitte in der Lage R_0℞ ziehen kann, in welchem Falle man statt des Punkts R den Punkt ℞ erhält, und aus ℞ wieder zwei Tangenten ℞O und ℞𝔒 an den Kreis P_0P gelegt werden können, so ergeben sich noch zwei Ebenen ℞OP' und ℞𝔒P', welche (wie man leicht einsieht) ebenfalls die Winkel α und β mit den Grundebenen bilden.*

---

* Außer den Tangenten R_0R und R_0℞ ließen sich an den Kreis $F_1F_{\prime\prime}$ noch zwei andere unter der vorgeschriebenen Neigung ziehen, deren Berührungspunkte in die Quadranten P'r'N und Nr'M fielen. Diese würden aber auf keine neue Lage der

Man sieht hieraus, daß die Aufgabe im Allgemeinen vier Auflösungen gestatten wird. Um ihr völlig zu genügen, hat man nur noch durch den gegebenen Punkt (a, a′) vier Ebenen zu führen, deren jede mit einer der eben gefundenen parallel ist.

† Ist $\alpha + \beta = 90^\circ$, so ist $\triangle P'r'P_0 \cong \triangle R_0r'R \cong \triangle R_0r'\mathfrak{R}$, also $r'P_0 = r'R = r'\mathfrak{R}$, oder der Kreis P_0P geht durch R und $\mathfrak{R}$. Es ist daher sowohl durch R als durch $\mathfrak{R}$ nur eine Tangente an diesen Kreis möglich, und jede derselben ist dem Grundschnitt parallel. Mithin erhält man für diesen Fall nur zwei Ebenen, deren gemeinschaftliche V-Spur eine durch P′ mit dem Grundschnitt parallel gezogene Gerade ist.

†† Ist $\alpha + \beta < 90^\circ$ (also W. $F_{,,}r'R <$ W. $F_{,}r'P_0$), so ist $r'R < r'P_0$; dann liegen R und $\mathfrak{R}$ innerhalb des Kreises P_0P, und die Auflösung der Aufgabe wird unmöglich.

Aufl. II. Die Höhen $r'F_{,}$ und $r'F_{,,}$ der umgeklappten Dreiecke $P'r'P_0$ und $Rr'R_0$ schließen mit den Katheten $r'P_0$ und $r'R_0$ die Complemente der Winkel α und β ein. Werden beide Dreiecke in ihre ursprüngliche Lage zurückbewegt, so vereinigen sich $r'F_{,}$ und $r'F_{,,}$ zu einer auf der Ebene POP′ senkrechten Geraden r′F, deren Projectionen in die mit $r'P_0$ und $r'R_0$ identischen Katheten r′P und r′R′ fallen. Demnach wird man die verlangte Ebene auch erhalten, wenn man durch einen beliebigen Punkt r′ des Grundschnitts eine Gerade r′F legt, welche mit ihren Projectionen (oder den Grundebenen) die Winkel $90^\circ - \alpha$ und $90^\circ - \beta$ bildet (Nr. 76, 2) und senkrecht zu ihr eine Ebene durch den gegebenen Punkt (a, a′) führt (Nr. 55).

Man sieht auch hier, daß vier Auflösungen möglich sind, indem die Gerade r′F vier verschiedene Lagen haben kann. Die Zahl derselben reducirt sich (nach Nr. 76, 2) auf zwei, wenn $(90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta) = 90^\circ$, d. i. $\alpha + \beta = 90^\circ$; und die Aufgabe ist gar nicht zu lösen, wenn $(90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta) > 90^\circ$, d. i. $\alpha + \beta < 90^\circ$.

Zusatz. Aus der Schlußbemerkung folgt der Satz, daß die Summe der Grundneigungen einer Ebene nie unter einen rechten Winkel herabsinken kann.

---

gesuchten Ebene führen, da sie offenbar die Gerade $\mathfrak{R}$R wieder in den Punkten R und $\mathfrak{R}$ schneiden müssen.

83. Aufg. Den Winkel zu zeichnen, welcher im Raume von den Spuren OR, OP′ einer gegebenen Ebene eingeschlossen wird.

Aufl. Klappt man die Ebene in die HE um und bestimmt in der Umklappung die Lage eines in der V-Spur beliebig gewählten Punktes P′, so erhält man sogleich die umgeklappte Lage der V-Spur selbst und hat den verlangten Winkel unmittelbar vor Augen.

Fig. 23. Nachdem P′p ⊥ GS, pR ⊥ OR gefällt ist, braucht man hier nicht (wie in Aufl. I der Nr. 62) die wahre Länge von P′R zu suchen; vielmehr findet man die Umklappung P″ von P′ noch kürzer, wenn man die Rp von O aus mit dem Halbmesser OP′ durchschneidet (was, wie man leicht sieht, auf einen besonders einfachen Fall der Aufl. II in Nr. 62 hinauskommt). Der gesuchte Winkel ist ROP″.

84. Aufg. Den Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden (ab, a′b′), (ac, a′c′) zu zeichnen.

Fig. 24. **Aufl.** Bestimmt man die H-Spur ST der Ebene BAC, sucht die Lage A_1 des Punkts A in der horizontalen Umklappung dieser Ebene (Nr. 62) und verbindet A_1 mit den H-Spuren S und T der gegebenen Geraden, so ist SA_1T der gesuchte Winkel. (Eben so könnte man die verticale Spur von BAC und ihre verticale Umklappung benützen.)

Liegen die Spuren der gegebenen Geraden so, daß die Ausführung dieser Construction unbequem wird, so ersetze man die Geraden durch zwei ihnen parallele, die man durch einen passend gewählten Punkt legt; oder man nehme willkürlich einen Punkt B auf AB und einen zweiten C auf AC, und construire das Dreieck ABC in seiner wahren Gestalt. Zu dem Ende hätte man die Länge der drei Seiten zu suchen (Nr. 66); man kann aber einfacher zum Ziele kommen, wenn man den Punkt C so gewählt hat, daß er mit dem Punkte B einerlei H- oder V-Distanz hat. Denn sind z. B. die H-Distanzen einander gleich, wie in Fig. 24, so ist BC horizontal, und man erhält den gesuchten Winkel, wenn man seine Ebene um BC in horizontale Stellung dreht, die H-Projection a_1 des Punkts A nach der Drehung angibt (Nr. 65) und a_1 mit b und c verbindet. (Vgl. Nr. 31.)

Anmerk. Man spricht auch von dem Winkel zweier Geraden welche sich nicht schneiden. Dieser Winkel wird zur Anschauung gebracht, wenn man durch einen beliebigen Punkt eine Paralle mit jeder der beiden

Geraden (oder durch einen Punkt der einen Geraden eine Parallele mit der andern) zieht.

Ist nicht festgesetzt, in welchem Sinne die Richtung jeder Geraden betrachtet wird, so findet man immer zwei Winkel, welche sich suppliren.

85. Uebungsaufgaben.

1) Die V-Projection einer Geraden zu zeichnen, welche mit einer gegebenen Geraden einerlei H-Projection hat und jene in einem gegebenen Punkte unter einem gegebenen Winkel schneidet.

2) Ein Winkel ist durch die Projectionen seiner Schenkel gegeben; man soll die Projectionen seiner Halbirungslinie zeichnen.

3) Von einem Winkel kennt man die H-Spuren der Schenkel und die Lage der Spitze in der horizontalen Umklappung seiner Ebene (mithin auch seine Größe). Man soll diejenige Lage der Spitze projiciren, bei welcher die H-Projection des Winkels eine gegebene Größe enthält.

*** 86. Aufg.** In der HE von der H-Spur S einer gegebenen Geraden SA aus eine andere Gerade zu ziehen, welche mit SA einen gegebenen Winkel φ einschließt.

Aufl. Es sei SB die verlangte Linie. Wird auf sie aus einem Fig. 25. beliebigen Punkte A der AS eine Senkrechte AB gefällt, so bildet die Entfernung des Fußpunktes B der letzteren von S die Kathete eines Dreiecks, welches die Linie AS zur Hypotenuse hat und den Winkel φ enthält. Sucht man demnach die Länge von AS (Nr. 66), so findet man auch leicht die Länge BS. Der Punkt B muß nun in einem Kreise liegen, welcher mit SB um S beschrieben ist. Da aber die Gerade, welche ihn mit a verbindet, senkrecht auf SB stehen muß (Nr. 5, x), so ist seine Lage auf einen zweiten Kreis beschränkt, der die Linie aS zum Durchmesser hat. Beide Kreise schneiden sich in zwei Punkten B_1 und B_2, weshalb es zwei Lagen SB_1 und SB_2 (symmetrisch gegen Sa) für die gesuchte Linie gibt, welche jedoch in eine Linie (die gegebene H-Projection Sa) zusammenfallen wenn $SB = Sa$, d. h. $\varphi =$ der H-Neigung der SA ist. Die Auflösung wird unmöglich, wenn $SB > Sa$, d. h. $\varphi <$ W. ASa ist.

Anmerk. Der Winkel φ ist bei obigen Constructionen als spitz angenommen worden. Ist er stumpf, so nimmt man sein Supplement und verlängert zuletzt die erhaltene Linie rückwärts über S hinaus. Ist

φ ein rechter Winkel, so ergibt sich die gesuchte Linie unmittelbar als eine zu Sa Senkrechte.

87. Aufg. Es sind die beiden Projectionen einer Geraden AB und die H-Projection bc einer andern gegeben, welche die erste unter einem gegebenen Winkel φ schneidet. Man sucht die V-Projection der letztern.

Aufl. I. Schneidet eine zu AB senkrechte Ebene S diese im Punkte D und die Linie BC im Punkte X, so entsteht ein bei D rechtwinkeliges Dreieck BDX, welches bei B den gegebenen Winkel φ (oder sein Supplement) enthält und construirt werden kann, wenn man die Projectionen von D und die wahre Länge von DB sucht. * Denkt man sich nun die Ebene S in die HE umgeklappt, so ist der geometrische Ort für die Umklappung von X der Kreis K, der mit dem Halbmesser DX um die Umklappung von D beschrieben werden kann; der Punkt X muß aber zugleich in der Geraden G liegen, nach welcher die Ebene S von der horizontalprojicirenden Ebene der BC geschnitten wird, seine Umklappung also in der Umklappung von G; und da man die G leicht projiciren und mit der Ebene S umklappen kann, so findet man die Umklappung von X als Schnitt der umgeklappten Geraden G und des Kreises K. Aus dieser Umklappung des Punktes X lassen sich nun sehr einfach die Projectionen desselben und also auch die gesuchte V-Projection der BC bestimmen. (Da der Kreis K die umgeklappte G zweimal schneiden kann, so sieht man, daß im Allgemeinen zwei Auflösungen möglich sind.)

† Ist φ ein rechter Winkel, so hat man die Ebene S durch den Punkt B zu legen und erhält die verlangte Gerade unmittelbar als Schnittlinie der S und der durch bc gehenden projicirenden Ebene.

Aufl. II. Läge die gegebene Projection bc der zu bestimmenden Geraden im Grundschnitt, so wäre ihre h-projicirende Ebene die verticale Grundebene, der Punkt B die V-Spur der BC, und die Aufgabe käme auf die vorhergegangene (Nr. 86) zurück (nur mit vertauschten Namen der beiden Grundebenen). Hat nun aber bc eine andere Lage (wie der Allgemeinheit wegen angenommen werden muß), so kann man die durch bc gehende projicirende Ebene wie eine Grundebene

---

* Je nach der Lage der gegebenen Projectionen kann es bequemer sein, zuerst den Punkt D auf der AB anzunehmen und demgemäß die Ebene S zu bestimmen.

behandeln. Man projicirt einen beliebigen Punkt der AB (am bequemsten die H-Spur) auf diese Ebene, klappt letztere um und verfährt im Uebrigen nach den in Nr. 86 gegebenen Andeutungen.

Man sieht hieraus zugleich, daß es für die gesuchte Gerade zwei Lagen oder eine oder gar keine gibt, je nachdem der spitze Winkel φ größer, ebensogroß oder kleiner ist als der spitze Neigungswinkel ω der gegebenen Geraden gegen die h-projicirende Ebene der gesuchten.

Anmerk. Ist AB nicht parallel zur HE, und bedeutet abc den spitzen Winkel zwischen den gegebenen H-Projectionen, so ist dieser (als das Maß des Flächenwinkels zwischen den zugehörigen h-projicirenden Ebenen) größer als der Winkel ω. Man wird daher in dem besondern Falle, wo $\varphi = abc$ angenommen ist, stets zwei Lagen BC finden. Bei jeder solchen Lage der BC ist dann auch der stumpfe Nebenwinkel von ABC dem Nebenwinkel von abc gleich.

Ist aber AB || HE, so ist $abc = \omega$; für $\varphi = abc$ findet man blos eine Lage der BC und diese ist ebenfalls || HE.

Sind φ und abc rechte Winkel, so ergibt sich immer blos eine Lage der BC, wenn AB nicht zur HE parallel ist; im andern Falle kann die BC unendlich viele Lagen annehmen.

Es folgt hieraus, daß die Projection eines beliebigen (schiefen) Winkels nicht blos dann der wahren Größe des Winkels gleich wird wenn die Ebene dieses Winkels der Grundebene parallel ist, sondern noch bei unendlich vielen andern Stellungen des Winkels. Man kann dem einen Schenkel des Winkels eine beliebige gegen die Grundebene schiefe Lage im Raume geben und durch Drehung um diesen Schenkel den Winkel immer in zwei Paar verschiedener Stellungen bringen, in denen er sich (rechts und links von der Projection des festen Schenkels) nach seiner wahren Größe projicirt.

Zusatz 1. Aus vorstehender Anmerkung läßt sich rückwärts schließen, daß, wenn die Projection eines schiefen Winkels der wahren Größe des Winkels gleich kommt, entweder beide Schenkel des Winkels der Grundebene parallel liegen oder keiner von beiden.

Ist aber die Projection eines rechten Winkels wieder ein rechter Winkel, so muß wenigstens ein Schenkel jenes Winkels parallel zur Grundebene liegen. Dieß folgt aus der Schlußbemerkung † zu Aufl. I. Denn auf der projicirenden Ebene des einen Schenkels AB (wie auch dieser Schenkel gerichtet sein mag) steht sowohl die Ebene S als die

projicirende Ebene des andern Schenkels senkrecht, also auch die Schnittlinie BC der beiden letztgenannten Ebenen, und diese Schnittlinie (der andere Schenkel) ist mithin parallel zur Grundebene.

Zusatz 2. Projicirt sich ein Winkel in der einen Grundebene als rechter, während in der andern Grundebene die Projection eines Schenkels parallel zum Grundschnitt liegt, so ist der Winkel selbst ein rechter (wie leicht zu erweisen).

(Wann sind beide Projectionen eines rechten Winkels wieder rechte Winkel?)

88. Uebungsaufgaben.

1) Gegeben: Die beiden Projectionen einer Geraden M, die H-Projection einer zweiten Geraden N und die H-Projectionen der beiden Punkte, welche auf M und N so liegen daß ihre Verbindungslinie den kürzesten Abstand zwischen M und N mißt. Gesucht: Die V-Projection der N.

2) Ggb.: Die beiden Projectionen einer Geraden M, die H-Projection einer zweiten Geraden N, die wahre Länge des kürzesten Abstands zwischen M und N, und der Punkt, wo die Linie des kürzesten Abstands die M trifft. Ges.: Die V-Projection der N.

3) In einer gegebenen Ebene durch den Punkt, in welchem ihr eine gegebene Gerade begegnet, eine andere Gerade so zu ziehen, daß diese mit der erstern Geraden einen gegebenen Winkel bildet.

89. Aufg. Einen gegebenen Winkel auf den Horizont zu reduciren* (d. h. die H-Projection eines Winkels zu zeichnen, wenn man seine Größe φ und die H-Neigungen α und β seiner Schenkel kennt).

Fig. 26. **Aufl.** Man lege einen Schenkel AC′ des Winkels in die VE (so daß also AC′ mit dem Grundschnitt AB_1 den Winkel α bildet), mache W. $C'B_1 c = \beta$ und drehe das rechtwinkelige Dreieck $C'cB_1$ um C′c so lange, bis $B_1 C'$ mit AC′ den Winkel φ einschließt; ist nach dieser Drehung die Kathete cB_1 in die Lage cB gekommen, so ist BcA die

* Eine Aufgabe der praktischen Geometrie. Der Scheitel des zu reducirenden Winkels ist der Standpunkt des Messenden. Die Schenkel (die Visirlinien) können sich über dem durch den Scheitel gelegten Horizont erheben; zur bequemeren graphischen Lösung denkt man sich dann die HE des Grundsystems unterhalb des Scheitels und nimmt statt des von den Visirlinien unmittelbar gebildeten Winkels seinen Scheitelwinkel, wodurch man auf die Constructionen der Fig. 26 kommt.

verlangte H=Projection des gegebenen Winkels. Um nun den Punkt B wirklich zu finden, bemerke man, daß er in dem Kreise B_1 B liegen muß, welcher mit cB_1 um c beschrieben wird, und daß man von dem Dreiecke BAC′ zwei Seiten AC′ und BC′ ($=B_1C'$) nebst dem zwischen ihnen liegenden Winkel φ kennt, also die Länge $AB_{,,}$ der dritten Seite AB finden kann. Der Punkt B ist demnach der Durchschnitt des Kreises BB_1 mit einem um A beschriebenen Bogen vom Halbmesser $AB_{,,}$.

90. Aufg. Die Neigung einer gegebenen Geraden M gegen eine gegebene Ebene E darzustellen.

Aufl. I. Man fälle aus einem Punkte A der M eine Senkrechte auf E, projicire deren Fußpunkt B, so wie den Schnitt C der M und E (Nr. 48), und construire das rechtwinkelige Dreieck ABC, indem man die Längen zweier Seiten sucht (Nr. 66). Der Winkel an C ist der verlangte.

Aufl. II. Fällt man aus einem beliebigen Punkte der M eine Senkrechte L auf E und bestimmt den Winkel zwischen M und L (Nr. 84), so ist dieser das Complement des gesuchten.

91. Aufg. Den Neigungswinkel zwischen zwei gegebenen Ebenen ROP′ und RQP′ zu zeichnen. Fig. 27.

Aufl. I. Man führe senkrecht zur Schnittlinie beider Ebenen eine dritte Ebene, und suche das Dreieck zu construiren, welches aus letzterer durch die gegebenen und eine Grundebene geschnitten wird und bekanntlich den verlangten Winkel enthält. In dieser Absicht kann man entweder

1) beide Projectionen der Schnittlinie RP′ zeichnen, in dieser einen Punkt (a, a′) beliebig wählen, die H=Spur BC der durch ihn senkrecht zu RP′ gelegten Ebene bestimmen (Nr. 55), die Lage A_1 des Punktes (a, a′) in der horizontalen Umklappung dieser Ebene suchen (Nr. 62) und A_1 mit den Punkten B und C verbinden, in denen BC die OR und QR trifft (und welche die H=Spuren der Schenkel des gesuchten Winkels sein müssen). Oder

2) man zeichnet nur die H=Projection Rp der RP′, nimmt eine beliebige auf Rp Senkrechte BC als H=Spur einer auf RP′ senkrechten Hülfsebene an, und bestimmt in der horizontalen Umklappung derselben die Lage A_1 des Punkts in A, in welchem sie der RP′ begegnet, auf folgende Weise. Die Ebene BAC wird von der projicirenden Ebene

RpP′ nach einer Geraden DA geschnitten, welche auf RP′ senkrecht ist. Klappt man nun das Dreieck RpP′ in die HE nach RpP,, um und fällt DA,, senkrecht auf RP,,, so gibt DA,, die Entfernung des Punktes A von D an; und da die Umklappung A_1 in die Richtung von Rp fallen muß, so mache man $DA_1 = DA_{,,}$; dann ist BA_1C die Größe des gesuchten Winkels. (Bei andern Lagen der gegebenen Ebenen kann es bequemer sein, die Vertical-Spur der auf RP′ senkrechten Schnittebene den Constructionen auf ähnliche Weise zu Grunde zu legen, wie es hier mit der H-Spur geschah.)

Fig. 28. † In Fig. 28 sind die V-Spuren parallel. Legt man durch die H-Spur R ihrer Schnittlinie eine Ebene Rr′P″ senkrecht zu dieser, und gibt in der verticalen Umklappung dieser Ebene die Lage R^0 des Punktes R an, so ist $P'R^0P''$ der gesuchte Winkel. (Eben so gut könnte man die horizontale Umklappung der Ebene Rr′P″ benützen.)

Aufl. II. Man fälle aus einem beliebigen Punkte Senkrechte auf die gegebenen Ebenen (Nr. 54) und bestimme deren Winkel (Nr. 84). Dieser ist das Supplement des gesuchten. *

Zusatz. Hat man zu untersuchen, ob zwei gegebene Ebenen senkrecht auf einander stehen oder nicht, so könnte man die obige Aufgabe lösen und zusehen, ob der gefundene Winkel ein rechter ist. Auf ein viel kürzeres Verfahren aber leitet die Bemerkung, daß zwei Ebenen sich nur dann unter rechten Winkeln schneiden, wenn man in der einen eine Gerade senkrecht zur andern ziehen kann. Legt man nämlich durch einen beliebigen Punkt in der H-Spur der einen Ebene eine Senkrechte zur andern Ebene (Nr. 54) und bestimmt die V-Spur derselben, so muß diese in die V-Spur der ersten Ebene fallen, wenn beide Ebenen senkrecht aufeinander sein sollen.

92. Uebungsaufgaben.

1) Die Spuren einer Ebene und eine Projection einer in ihr liegenden Geraden sind gegeben. Man suche die Spuren einer andern Ebene,

* Der Winkel beider Senkrechten könnte auch sogleich für die gesuchte Neigung gelten, da zwei Ebenen immer zwei Winkel mit einander einschließen, welche sich zu einem flachen Winkel ergänzen. Eben so könnte man statt des durch die erste Auflösung gefundenen Neigungswinkels sein Supplement nehmen. Um Zweideutigkeiten zu umgehen, müßte man etwa übereinkommen, immer den spitzen Winkel als Maß der Neigung zu betrachten, wie früher bei Bestimmung der Grund-Neigungen einer Ebene angenommen wurde.

welche die gegebene nach jener Geraden unter einem gegebenen Winkel schneidet.

2) Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche mit zwei gegebenen Ebenen gleiche Winkel bildet.

3) Von zwei Ebenen, welche sich unter einem gegebenen Winkel schneiden, kennt man blos die H-Spuren; außerdem ist die H-Projection eines Punkts gegeben durch welchen beide Ebenen gehen. Es sollen die V-Spuren der Ebenen gefunden werden.

***93. Aufg.** Durch eine gegebene Gerade AB eine Ebene zu legen, welche eine gegebene Ebene POP′ unter einem gegebenen Winkel φ schneidet.

Aufl. Für jede Spur der gesuchten Ebene hat man einen Punkt, wenn man die beiden Spuren der gegebenen Geraden AB angibt; die Lage der Ebene wird daher völlig bestimmt sein, sobald noch ein Punkt bekannt ist, welcher in einer ihrer Spuren liegt, und als ein solcher dritter Punkt bietet sich zunächst eine von den Spuren der Linie Z dar, nach welcher die gesuchte und die gegebene Ebene sich schneiden. Die folgende Betrachtung wird lehren, wie man zur H-Spur T dieser Linie gelangt.

Es sei B der Schnitt der gegebenen Linie und der gegebenen Ebene, A ein beliebiger Punkt der erstern, C der Fußpunkt einer von ihm auf die gegebene Ebene gefällten Senkrechten. Betrachtet man für einen Augenblick die Ebene POP′ als eine Grundebene, so müßte B als Spur der AB, C als Projection von A gelten und die Spur Z der gesuchten Ebene auf der Grundebene POP′ würde man (nach Nr. 81) erhalten, wenn man von B aus eine Tangente an einen um C beschriebenen Kreis zöge, dessen Halbmesser die Kathete eines Dreiecks wäre, welches die Distanz AC als andere Kathete und φ als Gegenwinkel der letztern hat. Obgleich man diesen Halbmesser zeichnen kann (da sich die Länge von AC nach Nr. 66 finden läßt), so wird doch die Ausführung der angegebenen Constructionen nur dann möglich, wenn die Ebene POP′ mit den Punkten B und C wirklich in eine Grundebene, etwa in die HE, umgeklappt ist. Hat man die Lage der Linie Z in der horizontalen Umklappung gefunden, so könnte man sie leicht in ihre wahre Lage im Raume bringen; dieß ist aber unnöthig, da es sich hier nur um den

Punkt T handelt, in welchem sie die OP schneidet, und dieser Punkt bei Drehung der Ebene POP′ sich nicht ändern kann.

Die Aufgabe gestattet im Allgemeinen zwei Auflösungen.

94. Bei allen Aufgaben dieses Kapitels, in denen Ebenen gegeben oder zu suchen waren, hat es bisher als Regel gegolten, daß jede Ebene durch ihre Spuren dargestellt werde. Eine Ebene an sich ist aber schon völlig bestimmt, wenn man auf beiden Grundebenen die Projectionen dreier Punkte kennt, durch welche sie gehen soll, oder zweier in ihr liegenden Geraden; und die erwähnten Aufgaben lassen sich in der That (mit nur geringen Abänderungen der früher gelehrten Constructionen) auflösen, ohne daß man auf die Ebenenspuren einzugehen braucht. Hat man das Paar gerader Linien, durch welches eine Ebene gegeben werden soll, von vornherein frei zu wählen, so ist es das Natürlichste, diejenigen Geraden zu nehmen, welche zugleich in den Grundebenen liegen (also die Spuren), und zugleich auch das Einfachste, weil dabei für jede der Geraden das Zeichnen der einen Projection (als in den Grundschnitt fallend) erspart wird, während bei anderer Wahl der bestimmenden Geraden ihre vier nebeneinander bestehenden Projectionen, deren paarweises Zusammengehören überdieß vom Auge festgehalten werden muß, den Ueberblick der Constructionen erschweren. Außerdem wird in den meisten Fällen die Lage einer Ebene gegen das Grundsystem aus dem Anblick der Spuren am leichtesten anschaulich. Trotzdem ist es in vielen Fällen geboten, von den Spuren einer Ebene Umgang zu nehmen, und zwar nicht blos dann, wenn man sich durch ungünstige Lage derselben hiezu gezwungen sieht; vielmehr ist sehr häufig durch die Natur einer Aufgabe selbst ein Fingerzeig gegeben, welche Bestimmungslinien einer Ebene den Spuren derselben vorzuziehen sind. Hat man z. B. die Projectionen eines ebenen Polygons vor sich und sollen in der Ebene dieses Polygons gewisse Punkte bestimmt werden, so ist kein Grund vorhanden, zu den Spuren der Ebene zu greifen, falls man im Stande ist mit Hülfe irgend zweier (als Bestimmungslinien betrachteter) Seiten des Polygons die Aufgabe zu lösen. Oder sind die Projectionen eines Polyeders gegeben und es wird etwa der Winkel verlangt den zwei benachbarte Seitenflächen desselben bilden, so muß schon die Ueberfüllung des Zeichnungsblattes, welche aus dem Zurückgehen auf die Aufgaben in Nr. 50 und Nr. 91 folgen würde, es rath-

sam machen, auf eine von den Spuren jener Seitenflächen unabhängige Lösung zu denken.

Es soll deßhalb nunmehr zum Schlusse dieses Kapitels ein Rückblick auf die Hauptaufgaben desselben stattfinden und gezeigt werden, wie diese Aufgaben zu behandeln sind, wenn man auf die Spuren der Ebenen verzichtet.

95. Nachdem die Lage einer Ebene auf irgend eine Weise bestimmt ist, wird es immer ein Hauptersorderniß sein, daß der Zeichner jeden nicht unmittelbar gegebenen Punkt der Ebene mit Leichtigkeit projiciren oder zur einen Projection eines solchen Punktes die andere angeben könne. Zu diesem Zwecke aber hat man immer (vergl. Nr. 40 und Nr. 46) zuvor die Projectionen irgend einer in der Ebene gelegenen Geraden zu zeichnen.

Ist nun eine Ebene durch die Geraden TC, TE gegeben und bedeutet be die willkürlich angenommene oder gegebene H-Projection einer in dieser Ebene enthaltenen Geraden, so lehrt ein Blick auf die Figur, wie (mit Rücksicht auf Nr. 44) die zugehörige V-Projection b′ e′ gefunden wird. Jeder Punkt (w, w′), dessen Projectionen in den gleichnamigen Projectionen der Geraden (be, b′e′) liegen, liegt auch in der Ebene CTE. Fig. 50.

Ist eine Ebene durch drei Punkte A, B, C gegeben, so hat man unmittelbar sechs in ihr liegende Gerade, nämlich AB, AC, BC und die drei Linien, welche durch je einen der gegebenen Punkte parallel zur Verbindungslinie der beiden andern gezogen werden können. Ferner gehört der Ebene jede Gerade an, welche aus einem beliebigen Punkt auf einer dieser sechs Geraden nach einem beliebigen Punkt einer andern von ihnen oder parallel zu einer solchen geführt wird.

Obwohl es am natürlichsten erscheint, zur Bestimmung einer Ebene blos drei Punkte zu geben, soll doch (da für die Lösung einer Aufgabe immer sogleich von den Punkten auf Gerade übergegangen werden müßte) im Nachfolgenden angenommen werden, jede Ebene sei durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade gegeben; ebenso wird eine Ebene als gefunden gelten, sobald zwei in ihr liegende Gerade aufgefunden worden sind. Zu beachten aber ist, daß man an die beiden Geraden, welche zur ursprünglichen Bestimmung einer Ebene dienen, sich nicht zu binden hat. Zeigt sich, daß die Lage dieser ursprünglichen

Bestimmungslinien die praktische Auflösung einer Aufgabe erschwert, so läßt man sie fallen, nachdem man zuvor aus ihnen ein anderes Paar abgeleitet hat, welches mit mehr Vortheil an ihrer Stelle benützt werden kann. Ein solcher Tausch hat (nach der voranstehenden Bemerkung) keine Schwierigkeit.

96. Ob eine durch irgend ein Linienpaar bestimmte Ebene eine der in Nr. 17—19 besprochenen Lagen habe, kann theils aus den Projectionen der Bestimmungslinien unmittelbar erkannt, theils leicht geprüft werden. Haben die Bestimmungslinien auf einer der Grundebenen eine gemeinsame Projection, so steht die Ebene senkrecht auf dieser Grundebene; ist dabei die gemeinschaftliche Projection zugleich dem Grundschnitt parallel, so ist die Ebene der andern Grundebene parallel. Eine Ebene ist parallel zum Grundschnitt, wenn man in ihr eine Gerade parallel zum Grundschnitt ziehen kann (d. h. wenn für eine die Bestimmungslinien schneidende Gerade, deren eine Projection man dem Grundschnitt parallel angenommen hat, als zweite Projection sich wieder eine Parallele zum Grundschnitt findet). Eine Ebene geht durch den Grundschnitt, wenn für jede der Bestimmungslinien die zusammengehörigen Projectionen sich im Grundschnitt begegnen, oder wenn dieß Kennzeichen für die eine Bestimmungslinie zutrifft, während die andere dem Grundschnitt parallel liegt. (Wären beide Bestimmungslinien parallel zum Grundschnitt, so hätte man behufs der Prüfung die eine derselben durch eine andere Gerade zu ersetzen, welche die beiden ursprünglich gegebenen schneidet.)

97. Alle auf Ebenen Bezug nehmenden Aufgaben, welche bis zur Nr. 46 (einschließlich) vorkamen, sind von dem neuen Gesichtspunkt aus schon durch die auf Fig. 50 hinweisende Bemerkung in Nr. 95 erledigt.

Die Aufgabe in Nr. 51 ist durch zwei Gerade gelöst, welche man durch den gegebenen Punkt parallel zu den beiden Bestimmungslinien der gegebenen Ebenen legt. Sind diese Bestimmungslinien selbst parallel, so ersetzt man zuvor die eine durch eine dritte Gerade, welche die beiden ursprünglich gegeben schneidet.

Die Lösung der Aufgabe in Nr. 52 reducirt sich auf das Ziehen der dort genannten Linie L.

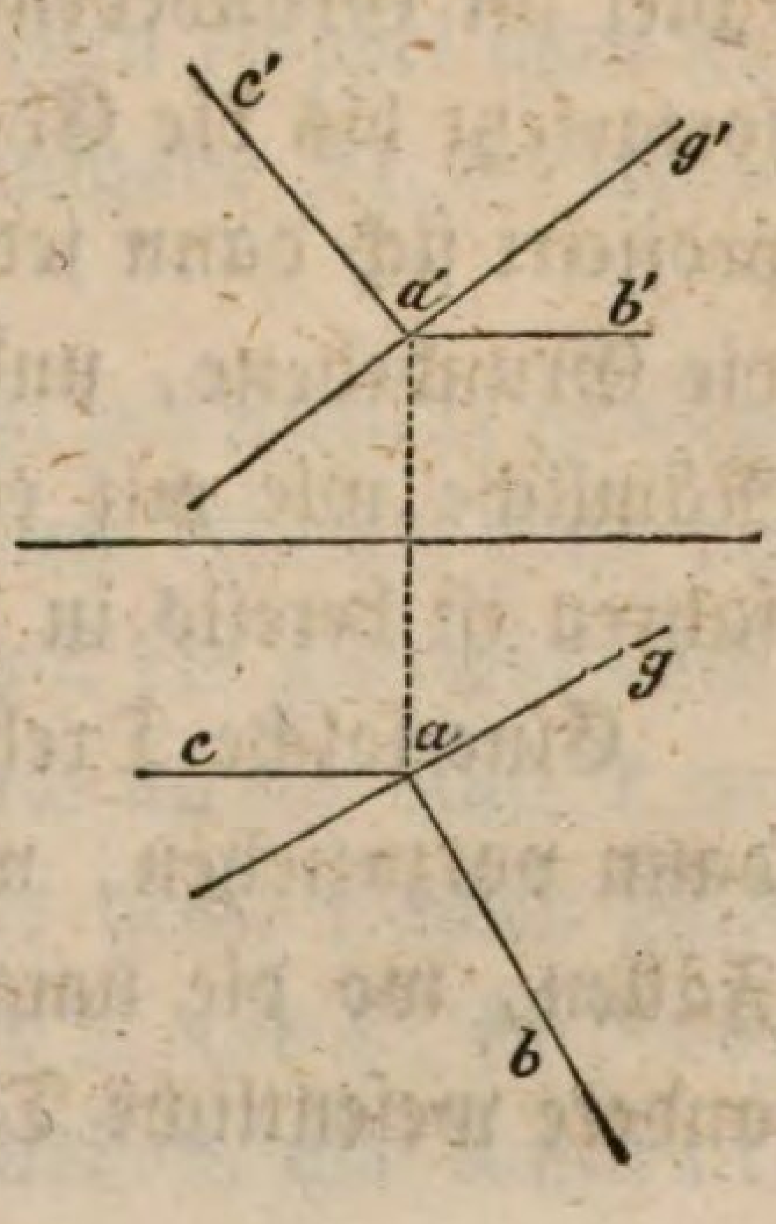
Ueber die Aufgabe in Nr. 48 wird die Bemerkung genügen, daß man eine von den projicirenden Ebenen der gegebenen Geraden in ganz

ähnlicher Weise benützt wie früher. Sollten dabei die Grenzen des Zeichnungsraumes Schwierigkeiten bieten oder sehr spitzwinkelige Durchschnitte vorkommen, so kann man sich in vielen Fällen durch eine Vertauschung der ursprünglichen Bestimmungslinien mit andern helfen.

Die Durchschnittslinie zweier Ebenen (Nr. 47), von denen die eine durch die Geraden G, H, die andere durch die Geraden K, L gegeben ist, bestimmt sich am einfachsten durch zwei von den vier Punkten, in denen einerseits die Geraden K und L die Ebene GH, andererseits die Geraden G und H die Ebene KL schneiden. Sollte keiner dieser Punkte auf dem Zeichnungsblatte zu erhalten sein, so zieht man in einer der Grundebenen eine passend gewählte Gerade (etwa parallel zum Grundschnitt) und betrachtet sie als die gemeinsame Projection zweier Geraden, deren eine in der Ebene GH, deren andere in der Ebene KL liegt; die zugehörigen zweiten Projectionen sind leicht zu erhalten; die so bestimmten Geraden schneiden sich in einem Punkte, welcher der verlangten Schnittlinie angehört. Ein zweiter Punkt dieser Schnittlinie ergiebt sich auf gleiche Weise.

Werden die H-Projectionen zweier in den Ebenen GH und KL gedachten Geraden, deren gemeinsame V-Projection man willkürlich angenommen hat, unter sich parallel, so folgt hieraus noch nicht, daß jene Ebenen einander parallel sind, sondern zunächst nur, daß ihre Durchschnittslinie parallel ist mit jenen Geraden. — (Wie kann man zum voraus untersuchen, ob zwei gegebene Ebenen parallel sind?)

† Hervorzuheben ist noch, daß die Behandlung der beiden zuletzt erwähnten Aufgaben (Nr. 47 u. 48) nicht erschwert wird, wenn die eine der zur Bestimmung einer Ebene dienenden Geraden im Grundschnitt liegt; man hat blos eine dritte Gerade der Ebene beizuziehen. (Hierin ist zugleich eine Vervollständigung der frühern Auflösungen angezeigt, bei denen das Auftreten einer durch den Grundschnitt gehenden Ebene nicht berücksichtigt wurde.)



98. Eine Ebene, welche senkrecht zu einer gegebenen Geraden AG durch einen gegebenen Punkt A dieser Geraden gelegt werden soll, bestimmt sich mittels zweier aus A auf AG errichteten Senkrechten; um aber diese Senkrechten unmittelbar projiciren zu können, hat man sie so zu wählen, daß die eine zur HE, die andere zur VE parallel liegt. Ist ab ⊥ ag, a'b' ∥ GS, so ist BAG ein rechter Win-

kel (Nr. 87, Zus. 2); macht man ferner ac || GS, a'c' ⊥ a'g', so ist BAC die verlangte Ebene.

Um nun die Aufgabe in Nr. 55 für den Fall zu lösen, daß der gegebene Punkt A nicht in der gegebenen Geraden liegt, hat man nur durch A eine Parallele zu letzterer gelegt zu denken (ohne daß man die Projectionen dieser Parallelen zu zeichnen braucht) und die vorigen Constructionen auszuführen. In Fig. 6 stellt die Gerade (ar, a'R'), deren Spur R' jetzt entbehrlich ist, eine der Bestimmungslinien für die gesuchte Ebene vor; die Projectionen der zweiten Bestimmungslinien ergeben sich, wenn durch a eine Parallele zum Grundschnitt und durch a' eine Senkrechte zu c'd' gezogen wird.

Ist bei der Aufgabe in Nr. 54 die Ebene durch irgend zwei Bestimmungslinien gegeben, so kann man zuerst eine in der Ebene liegende und zur HE parallele Gerade H projiciren; da diese der H-Spur der Ebene parallel sein muß, verhilft sie zur H-Projection der verlangten Geraden. Die V-Projection der letztern findet man auf ähnliche Art durch Vermittelung einer Geraden V, welche in der gegebenen Ebene parallel zur VE gezogen wird. Das Natürlichste wäre hier, die Geraden H und V in die betreffenden Grundebenen selbst zu verlegen, d. h. die Spuren der gegebenen Ebene zu bestimmen, und so wird man es in der That immer halten, wenn keine anderweitigen Unbequemlichkeiten daraus entspringen. Die neuere Abänderung der früher angegebenen Auflösung hat demnach nur Werth für solche Fälle wo die Spuren der Ebene ungeschickt zu liegen kommen.

99. An die Stelle der Umklappung einer Ebene tritt, wenn die Spur der Ebene fehlt, eine Drehung der Ebene um eine in ihr parallel zur Grundebene gezogene Gerade. Wird diese Drehung soweit fortgesetzt bis die Ebene selbst der Grundebene parallel geworden ist, so projicirt sich dann jedes in ihr enthaltene Gebilde völlig unverändert auf die Grundebene, und man erreicht also mit einer solchen Drehung das Nämliche wie mit einer Umklappung. Das hiebei einzuhaltende Verfahren ist bereits in Nr. 65 gelehrt.

Eine solche Drehung ist zuweilen der eigentlichen Umklappung auch dann vorzuziehen, wenn man die Spur der Ebene hat; namentlich in Fällen, wo die umgeklappten Punkte in zu große Entfernung oder auf andere wesentliche Theile der Zeichnung fallen würden.

100. Für die Aufgabe in Nr. 67 paßt bei mangelnden Spuren der gegebenen Ebene vorzugsweise die Auflösung II, doch mit den erforderlichen Modificationen. Um die H-Spur RaQ der dort genannten Ebene RQP′ zeichnen zu können, hat man zuvor die Bestimmungslinien FG, FH der gegebenen Ebene (Taf. XII, 2) durch eine horizontale Gerade GH zu schneiden. Man kann hierauf in der horizontalen Umklappung der Ebene RAQ die Lagen für den Punkt A und für zwei von den drei Punkten, in denen die Ebene RAQ die Geraden FG, FH, GH schneidet, bestimmen und auf die Verbindungslinie dieser zwei umgeklappten Punkte eine Senkrechte aus der Umklappung des Punktes A fällen. Bequemer aber wird es sein, die Ebene RAQ nicht in die HE umzuklappen, sondern um die Gerade (Ra, h′g′), nach welcher sie von der v-projicirenden Ebene der GH geschnitten wird, in horizontale Lage zu drehen. Macht man $kk_1 \perp Rk$ und $= nk'$, ebenso $aa_1 \perp Ra$ und $= ma'$, so mißt eine aus a_1 auf ik_1 gefällte Senkrechte $a_1 b_1$ die gesuchte Entfernung.

101. Um die H-Neigung für die Ebene zweier Geraden zu finden, schneidet man dieselben durch eine horizontale Gerade, fällt auf diese eine Senkrechte aus einem Punkte A der einen gegebenen Geraden (Nr. 56, †) und bestimmt die H-Neigung dieser Senkrechten (vergl. Nr. 78, Zus.), am bequemsten indem man deren h-projicirende Ebene durch Drehung um das h-projicirende Loth des Punkts A in Parallelstellung zur VE bringt. (Nr. 64.)

Ein entsprechendes Verfahren führt zur V-Neigung der gegebenen Ebene.

102. Bei der Aufgabe in Nr. 90 ist, wenn die Spuren der Ebene nicht bequem zu erhalten sind, die Aufl. II vorzuziehen (wobei man auf die in Nr. 98 angedeutete Behandlung der Hülfsaufgabe Nr. 54 einzugehen hat).

Eben so wird man für die Aufgabe in Nr. 91 jetzt zur Aufl. II greifen.

Haben bei dieser Aufgabe die beiden gegebenen Ebenen eine der Bestimmungslinien gemeinschaftlich (welche somit die Durchschnittslinie beider Ebenen ist), so könnte man zwar auch an die Aufl. I anknüpfen; denn legt man durch einen Punkt A der gemeinsamen Linie senkrecht zu dieser eine Ebene, bestimmt die Punkte B und C, in denen die beiden andern Bestimmungslinien diese Ebene treffen, und construirt

das Dreieck ABC in wahrer Größe, so enthält dasselbe bei A den gesuchten Winkel. Es wird aber meist räthlicher sein, diesen Fall auf den nachfolgenden, noch specielleren zurückzuführen.

Gesetzt es gehen von einem Punkte P drei Gerade PA, PB, PC aus und es werde der Neigungswinkel der Ebene APB gegen die Ebene APC verlangt.* Dieser Winkel läßt sich durch ein Verfahren finden, bei welchem ein Theil der erforderlichen Constructionen auf einem Nebenblatte ausgeführt werden kann, und dieß ist namentlich dann von Werth, wenn auf dem Hauptblatte der Zeichnung außer den genannten Linien noch andere projicirt sind (z. B. wenn jene drei Linien Kanten eines Körpers von erheblicher Seitenzahl vorstellen). Wählt man auf den gegebenen Geraden beziehungsweise die drei Punkte A, B, C beliebig, so kann man, nach mehrmaliger Anwendung der Aufgabe in Nr. 66, zwei den Dreiecken APB, APC congruente Dreiecke 𝔄𝔓𝔅, 𝔄𝔓ℭ in einer Ebene (auf einem Beiblatte) so construiren, daß sie mit der gemeinschaftlichen Seite 𝔄𝔓 aneinander liegen. Eine durch 𝔄 gezogene Senkrechte zu 𝔄𝔓 wird die Seiten 𝔓𝔅, 𝔓ℭ (oder ihre Verlängerungen) beziehungsweise in den Punkten 𝔇, 𝔈 schneiden. Die Projectionen der Punkte D, E, welche auf den gegebenen Geraden PB, PC den Punkten 𝔇, 𝔈 entsprechen, findet man in der einen Grundebene mittels einer einfachen, dem Lehrsatze in Nr. 28 entnommenen Construction, in der andern Grundebene nach Nr. 44. Sucht man dann die wahre Länge von DE und construirt ein Dreieck aus den Seiten 𝔄𝔇, 𝔄𝔈, DE, so ergibt dasselbe den gesuchten Winkel DAE.

103. Eine Ebene kann auch durch die Projectionen einer einzigen Geraden bestimmt werden, einer Geraden nämlich, welche in der Ebene so liegt, daß ihre H- oder V-Neigung mit der gleichnamigen Grundneigung der Ebene übereinstimmt. Eine solche Gerade heißt Linie des Gefälls der Ebene (gegen die HE oder VE). Ist für eine Ebene z. B. die Linie des Gefälls gegen die HE gegeben, so liegt in dieser Ebene jede andere Gerade, welche man durch einen Punkt der

---

* Ist eine Ebene durch die Geraden PA und PB, eine andere durch PA und irgend eine Gerade G bestimmt, so kann man letztere mit einer durch P gehenden Bestimmungslinie vertauschen, welche entweder parallel zu G liegt oder einen Punkt der G enthält. Der Uebergang vom zuvor erwähnten Fall zum gegenwärtigen macht sich also sehr einfach.

gegebenen so zieht, daß ihre V-Projection parallel zum Grundschnitt ihre H-Projection senkrecht auf der H-Projection der gegebenen ist. Man kann also auch leicht irgend eine dritte (nicht horizontale) Gerade der Ebene und beliebig viele in der Ebene enthaltene Punkte projiciren.

(Sehr einfach findet man die Durchschnittslinie zweier auf solche Art gegebenen Ebenen, wenn das Gefäll bei beiden sich auf die nämliche Grundebene bezieht.)

Drittes Kapitel.

Ueber Raumecke.

104. Wird von mehreren Geraden, welche von einem gemeinschaftlichen Punkte ausgehen und in demselben einseitig begrenzt sind, die erste mit der zweiten, die zweite mit der dritten, ..., die letzte mit der ersten je durch eine Ebene verbunden, so entsteht ein Raumeck (körperliches Eck, Körperwinkel, Vielkant). Jene Geraden sind seine Kanten, ihr gemeinsamer Ausgangspunkt seine Spitze oder sein Scheitel; der Winkel zweier benachbarten Kanten heißt eine Seite — die Neigung zwischen zwei benachbarten Ebenen ein Winkel des Ecks.

Das dreikantige Eck (Raumdreieck, körperliche Dreieck, Dreikant) ist das einfachste unter den Raumecken und zugleich das wichtigste, da sich mehrkantige immer in dreikantige zerlegen lassen.

105. Werden die Kanten eines Dreikants über die Spitze hinaus rückwärts verlängert, so bestimmen diese Verlängerungen ein neues Dreikant, welches das Scheiteldreikant des ersten heißt. Zwei Scheiteldreikante stimmen offenbar in allen Seiten und Winkeln überein, können aber dennoch im Allgemeinen nicht zur Deckung gebracht, sondern nur zu symmetrischer Stellung aneinander gelegt werden.*

Man sieht hieraus, daß man aus der Gleichheit der Seiten und Winkel in zwei Dreikanten noch nicht auf ihre Congruenz schließen darf.

---

* Zwei Punkte liegen symmetrisch gegen eine Ebene, wenn die Ebene die Verbindungslinie beider Punkte senkrecht halbirt.

Fällt man aus den bestimmenden Punkten eines räumlichen Gebildes Senkrechte auf eine Ebene und verdoppelt jede solche Senkrechte durch Verlängerung über die Ebene hinaus, so bestimmen die neu erhaltenen Punkte ein Gebilde von symmetrischer Stellung gegen das erste. Beide Gebilde selbst heißen gegenseitig symmetrisch, und behalten diesen Namen auch wenn sie aus obiger Stellung gebracht werden.

Die Bedingung, welche außerdem noch zur Congruenz erfüllt werden muß, ist, daß die gleichen Stücke in beiden Dreikanten nach derselben Ordnung in einerlei Richtung auf einander folgen; ist diese Richtung in beiden entgegengesetzt, so sind sie symmetrisch.

Auch bei einem mehrkantigen Raumeck entsteht durch Rückverlängerung sämmtlicher Kanten ein Scheitelkant, welches dem ursprünglichen im Allgemeinen nicht congruent sondern blos symmetrisch ist.

106. Wird nur eine Kante eines Dreikants rückwärts verlängert, so bildet die Rückverlängerung mit den beiden andern Kanten ein Nebendreikant des ursprünglichen. Ein gegebenes Dreikant und sein Nebendreikant haben eine Seite und den ihr gegenüberliegenden Winkel gemein; jede der beiden andern Seiten des Nebendreikants ist das Supplement derjenigen Seite des gegebenen, welche mit ihr in einerlei Ebene liegt; jeder der beiden andern Winkel des Nebendreikants ist das Supplement für denjenigen Winkel des gegebenen, welcher mit jenem an der nämlichen Geraden liegt.

Zu jedem gegebenen Dreikant gibt es drei Nebendreikante.

107. Die Ebene zweier Geraden, welche aus einem beliebigen Punkte innerhalb eines Dreikants auf zwei Seiten desselben gefällt sind, steht senkrecht auf der zwischen diesen Seiten liegenden Kante, und der Winkel zwischen beiden Senkrechten ist das Supplement des Dreikantwinkels, welcher von den genannten Seiten eingeschlossen wird. Fällt man aus dem nämlichen Punkte auch auf die dritte Seite eine Senkrechte und verbindet sie mit den beiden vorigen durch Ebenen, so wird ein neues Dreikant gebildet, in welchem die eben ausgesprochenen Sätze für jedes Kantenpaar gelten. Die Winkel des ersten Dreikants werden also durch die Seiten des zweiten supplirt; aber auch die Winkel des zweiten durch die Seiten des ersten, da die Kanten des ersten auf den Seitenebenen des zweiten senkrecht sind. Jedes der beiden Dreikante heißt das Supplementardreikant des andern.

Daß die Spitze des Supplementardreikants im Hohlraum des ursprünglichen Dreikants liege, wie es bei obiger Erklärung angenommen wurde, ist nicht wesentlich; eine solche Annahme ist nur die bequemste für eine erste Erläuterung. (Wählt man den Punkt, durch welchen man die Senkrechten zu den Seitenebenen des ursprünglichen Dreikants zieht, anders, so hat man bei jeder dieser Senkrechten zu überlegen, ob sie selbst oder ihre Rückverlängerung als Kante des Supplementardreikants zu nehmen ist.)

108. Aus drei gegebenen Stücken eines Dreikants lassen sich die übrigen durch Construction finden. Es bieten sich hier sechs verschiedene Fälle dar, von denen sich jedoch je zwei auf dieselbe Weise behandeln lassen, wenn man das Supplementardreikant beizieht.

Im Nachfolgenden soll immer die Spitze des Dreikants durch S, die Kanten durch SA, SB, SC bezeichnet sein. Dann bedeuten α, β, γ die diesen Kanten der Reihe nach gegenüberliegenden Seiten, und A, B, C die an den betreffenden Kanten liegenden Winkel.

Aufgaben.

Drei Stücke eines Dreikants sind gegeben; man soll die übrigen Stücke finden.

I. **Ggb.:** Die drei Seiten α, β, γ.

Fig. 29. **109. Aufl.** Das Dreikant wird aus seinen drei Seiten construirt, wenn man diese in einer Ebene (welche man als HE betrachten kann) aneinander legt, wie Fig. 29 zeigt, und die beiden äußern Seiten β und γ so lange um die Kanten SC und SB dreht, bis die Linien SA_1 und SA_2 zu einer einzigen Geraden zusammenfallen, welche dann die dritte Kante SA des Dreikants ist. In SA_1 und SA_2 hat man also zwei umgeklappte Lagen der letztern. Ist nun $SA_1 = SA_2$, so sind die Punkte A_1 und A_2 Umklappungen eines und desselben Punktes A, dessen H-Projection a der Durchschnitt der beiden Senkrechten A_1C und A_2B sein muß, welche man aus A_1 und A_2 auf SC und SB fällt; denn diese Senkrechten sind offenbar die H-Projectionen der beiden Kreisbögen, welche von den Punkten A_1 und A_2 während obenerwähnter Drehung der Seiten β und γ beschrieben werden. (Die Verbindungslinie Sa wäre demnach die H-Projection für die Kante SA). Nach Vereinigung der Punkte A_1 und A_2 in A stellen sich zwei rechtwinkelige Dreiecke ABa und ACa dar, welche bei B und C die Gegenwinkel von β und γ fassen und leicht gezeichnet werden können, da man von jedem eine Kathete und die Hypotenuse kennt. Macht man $aA_3 \perp aC$, $CA_3 = CA_1$, so ist A_3Ca die Umklappung des einen Dreiecks, und ähnlich ergibt sich die Umklappung A_4Ba des andern. (Probe: $aA_3 = aA_4$). — Um auch den dritten Winkel des Dreikants zu erhalten, errichte man $A_1M \perp SA_1$, $A_2N \perp SA_2$ und klappe das Dreieck AMN, welches sich nach Vereinigung der Punkte A_1 und A_2 bildet und bei A den fraglichen Winkel enthält, in die HE um, indem man $MA_5 = MA_1$ und

$NA_5 = NA_7$ macht. (Probe: Die drei Punkte S, A_5, a müssen in einer zu MN senkrechten Geraden liegen.)

Es versteht sich, daß man zur Auffindung des Winkels A die Gerade MN nicht wirklich zu ziehen braucht; eben so, daß man für die Construktion dieses Winkels nicht nothwendig die Umklappungen A_1, A_2 des nämlichen Punkts benützen muß, der schon zur Auffindung der Winkel B und C gedient hat, sondern diese Construktion an die Umklappungen irgend eines andern Punkts der Kante SA anknüpfen kann. Hält man es aber so wie es in der Figur angenommen wurde (und wie es am bequemsten ist, wenn nicht die Punkte M, N in zu große Entfernungen von S fallen), d. h. legt man die drei auf den Kanten senkrechten Ebenen, welche die drei Winkel des Dreikants aufnehmen sollen, durch einen und denselben Punkt der Kante SA, so lassen sich an der Figur noch einige Beziehungen nachweisen, welche zu Genauigkeitsproben verwendet werden können. Schneiden nämlich die verlängerten Linien Ba und Ca die MN in w und v, und denkt man sich die Verbindungslinien wA_4 und vA_3 gezogen, so ist erstere auf BA_4, letztere auf CA_3 senkrecht; ferner ist $wA_5 \perp NA_5$, $vA_5 \perp MA_5$. Denn da die Ebenen vAM und vAC beide auf der Ebene SMA senkrecht sind, so steht auch vA auf dieser Ebene, mithin auf AC und AM senkrecht; und aus ähnlichen Gründen ist wA senkrecht auf AB und AN. Zugleich sieht man, daß $vA_5 = vA_3$, $wA_6 = wA_4$ sein muß. — Das von den Geraden Aa, Av, Aw gebildete Dreikant ist ein Nebendreikant für das Supplementardreikant des gegebenen.)

† Im vorliegenden Dreikante wurden alle drei Seiten spitz angenommen. Behält man diese Annahme vorläufig bei, so können dennoch die angegebenen Constructionen eine etwas andere Gestalt als in Fig. 29 erhalten; es kann nämlich der Punkt a (und mit ihm die Projektion der Kante SA) außerhalb der Seite α zu liegen kommen, wie Taf. XII, **3** zeigt. In diesem Falle ist der Winkel B der stumpfe Außenwinkel A_4BD des umgeklappten Dreiecks aBA_4. Dieser Fall kann sich jedoch nur ereignen, wenn β die größte der drei spitzen Seiten ist. Denn damit a die hier besprochene Lage annehme, muß erstlich SB > SE, also um so mehr SB > SC, d. h. $\beta > \gamma$ sein; zweitens aber ist jedenfalls CA_1 (oder CA_3) > Ca, also $\beta >$ W. CSa, mithin hier um so mehr $\beta > \alpha$. — Es folgt hieraus, daß man den eben besprochenen Fall vermeiden kann und stets auf die in Fig. 29 vor Augen liegende (günstigste) Gestaltung der Constructionen kommen muß, wenn man bei dem ursprünglichen Aneinanderlegen der drei gegebenen spitzen Seiten die größte in die Mitte nimmt.

†† Beträgt eine der drei Seiten 90°, während die beiden andern spitz sind, so erleidet die Gestaltung der Fig. 29 keine wesentliche Aenderung wenn die rechtwinkelige Seite (α) zwischen die beiden andern gelegt wird.

(Wie ändern sich die Constructionen, wenn die rechtwinkelige Seite außen liegt, z. B. $\beta = 90^0$ ist?)

Sind zwei Seiten rechtwinkelig, die dritte spitz oder stumpf, so hat man diese dritte Seite in die Mitte gelegt zu denken, wodurch alle weitern Constructionen überflüssig werden. Ist nämlich $\beta = \gamma = 90^0$, so ist SA senkrecht zur HE (Nr. 5, VII), $B = C = 90^0$, $A = \alpha$.

Beträgt also jede der drei Seiten 90^0, so ist auch jeder der drei Winkel $= 90^0$.

††† Man überzeugt sich leicht, daß die ursprünglich angegebenen Constructionen auch für jene Fälle passen, in denen eine oder zwei oder auch alle drei Seiten stumpf sind; nur hat man, sobald a nicht mehr in die Seite α selbst, sondern in die Erweiterung ihrer Ebene fällt, entweder für jeden der Winkel B und C, oder doch für einen derselben den Nebenwinkel des in das betreffende rechtwinkelige Dreieck geschlossenen Winkels gelten zu lassen, worüber jedesmal eine achtsame Anschauung der räumlichen Beziehungen die nöthigen Aufschlüsse gibt.

Uebrigens lassen sich solche besondere Erwägungen auch ganz umgehen, und man kann auf die in Fig. 29 sich darstellende Gestaltung der Constructionen in allen Fällen zurückkommen. Ist nämlich nur eine der gegebenen Seiten stumpf, jede der beiden andern spitz, so braucht man blos (bei dem Aneinanderlegen der drei Seiten in der HE) die stumpfe in die Mitte zu nehmen. Sind zwei Seiten β, γ stumpf, so denke man sich das Dreikant mit seinem an der Seite α anliegenden Nebendreikant (Nr. 106) vertauscht (indem man die Seiten β und γ durch ihre Supplemente ersetzt), suche die drei Winkel desselben, und behalte den gefundenen Gegenwinkel von α bei, während man statt der beiden übrigen ihre Nebenwinkel nimmt. Sind endlich alle drei Seiten stumpf, so kann man wieder durch Uebergang auf ein Nebendreikant zwei Seiten durch spitze ersetzen und im Uebrigen nach den schon gegebenen Andeutungen verfahren.

Zusatz I. Sollen in Fig. 29 die Punkte A_1, A_2 in Wahrheit die Umklappungen eines in a projicirten Punktes sein können, so muß $CA_1 > Ca$, $BA_2 > Ba$ sein, d. h. $\beta > CSa$ und $\gamma > BSa$, mithin $\beta + \gamma > \alpha$ (denn Sa fällt nothwendig zwischen SB und SC, wenn α, wie in der Figur angenommen wurde, die größte der drei gegebenen spitzen Seiten ist). Ist aber die größte Seite α kleiner als die Summe der beiden andern, so ist um so mehr auch $\beta < \alpha + \gamma$ und $\gamma < \alpha + \beta$.

Alle diese Schlüsse behalten ihre Geltung, wenn man die Fig. 29

dahin ändert, daß die in der Mitte liegende Seite α stumpf ist, während β und γ spitz bleiben.

In einem Dreikant mit drei stumpfen Seiten ist nothwendig die größte kleiner als die Summe der beiden andern, da diese Summe $> 180^0$ ausfällt und keine Seite eines Dreikants überstumpf sein kann.

Bedeuten α, β stumpfe Seiten eines Dreikants, γ die dritte spitze Seite, so versteht sich von selbst, daß $\alpha + \beta > \gamma$. In dem an γ liegenden Nebendreikant aber (welches von drei spitzen Seiten gebildet wird) ist $(180^0 - \alpha) + \gamma > 180^0 - \beta$, d. h. $\beta + \gamma > \alpha$; und auf ähnliche Art findet man $\gamma + \alpha > \beta$ (was jedoch schon aus dem Voranstehenden folgt, falls α die größte Seite ist).

Sind wieder α, β stumpfe Seiten eines Dreikants, die dritte Seite γ spitz oder stumpf, so hat man in dem an γ liegenden Nebendreikant

$$\gamma < (180^0 - \alpha) + (180^0 - \beta),$$

d. h.

$$\alpha + \beta + \gamma < 360^0.$$

An einem Dreikant aber, in welchem nur eine oder gar keine Seite stumpf ist, kann die Seitensumme ohnehin nie 360^0 erreichen.

Es gelten also ganz allgemein folgende Sätze: 1) In jedem Dreikant ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte (und mithin der Unterschied zweier Seiten kleiner als die dritte); 2) die Summe aller drei Seiten $< 360^0$.

Aus drei gegebenen Seiten ist daher ein Dreikant nur dann möglich, wenn die größte dieser Seiten kleiner ist als die Summe der beiden andern und (falls mehr als eine Seite stumpf ist) die drei Seiten zusammengenommen 360^0 nicht erreichen.

Zus. 2. Ist (Fig. 29) $\beta = \gamma$, so ist $B = C$. Für $\beta = \gamma = 90^0$ wird $B = C = 90^0$ (††). Bedeuten aber β und γ zwei gleiche stumpfe Seiten eines Dreikants, so sind in dem an α liegenden Nebendreikant die Gegenwinkel der spitzen Seiten $(180^0 - \beta)$ und $(180^0 - \gamma)$ einander gleich, folglich sind auch im ursprünglichen Dreikant die Gegenwinkel von β und γ gleich. — In jedem Dreikant liegen also gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber. (Hat ein Dreikant drei gleiche Seiten, so hat es auch drei gleiche Winkel.)

Sind B, C zwei gleiche Winkel eines Dreikants, so sind im Supplementardreikant desselben die Seiten $(180^0 - B)$, $(180^0 - C)$ einander gleich, folglich ihre Gegenwinkel $(180^0 - \beta)$, $(180^0 - \gamma)$, d. h.

$\beta = \gamma$. In jedem Dreikant liegen demnach gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Der letztere Satz, in Verbindung mit einem der Sätze in Zus. 1, führt darauf, daß in jedem Dreikant dem größern Winkel die größere Seite gegenüberliegt. Ist nämlich $B > C$, und wird durch die Kante SB eine Ebene gelegt, welche mit der Seite α einen Winkel $= C$ bildet, so muß diese Ebene die Seite β nach einer zwischen SA und SC fallenden Geraden S$\mathfrak{B}$ so schneiden, daß $AS\mathfrak{B} + \mathfrak{B}SB = \beta$; also ist $\beta > \gamma$.

Umgekehrt muß auch in jedem Dreikant der größern Seite der größere Winkel gegenüberliegen, was sich aus Betrachtung des Supplementardreikants ergibt oder auch indirect am ursprünglichen Dreikant beweisen läßt.

Zus. 3. Die Summe zweier Winkel A, B eines Dreikants ist größer, gleich oder kleiner als 180°, je nachdem die Summe der gegenüberliegenden Seiten α, β größer, gleich oder kleiner als 180° ist; und umgekehrt. Da nämlich

α, $180° - \beta$, $180° - \gamma$ die Seiten und
A, $180° - B$, $180° - C$ die Winkel

des einen Nebendreikants sind, so folgt aus Zus. 2, daß

$$A \gtreqless 180° - B, \quad \text{je nachdem} \quad \alpha \gtreqless 180° - \beta,$$

d. h. es ist $$A + B \gtreqless 180°, \quad \text{je nachdem} \quad \alpha + \beta \gtreqless 180°,$$

und umgekehrt.

Anmerkung. Der Punkt A, welcher sich in Fig. 29 nach a projicirt, und mithin die Kante SA des Dreikants, könnte ebensowohl unterhalb als oberhalb der HE liegen, so daß sich aus den drei gegebenen Seiten zwei Dreikante construiren lassen, denen beiden die gefundenen Winkel A, B, C zugehören. Ist $\beta = \gamma$, so sind diese beiden Dreikante congruent; in jedem andern Falle sind sie blos symmetrisch.

II. **Ggb.:** Zwei Seiten α, β und der eingeschlossene Winkel C.

Fig. 29. **110. Aufl.** I. Man lege die Seiten α und β in der HE aneinander, wie in Fig. 29, schneide SC senkrecht durch eine Gerade A_1 Ca und drehe β so lange um SC, bis A_1 C mit Ca den gegebenen Winkel C

einschließt. Bezeichnet A die Lage, welche der Punkt A_1 nach vollendeter Drehung einnimmt, a die Projection derselben, so ist ACa ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Umklappung $A_3 Ca$ sich ergibt, wenn man W. $aCA_3 =$ W. C, $CA_3 = CA_1$ und $A_3 a \perp Ca$ macht. Hiernach ist der Punkt A mittels seiner H-Projection a und seiner H-Distanz aA_3 bestimmt, also auch die Lage der Kante AS. Letztere verbinde man mit SB durch eine Ebene, und klappe diese ebenfalls in die HE um. Die Lage A_2 des Punkts A in dieser neuen Umklappung wird gefunden, wenn man $aA_2 \perp SB$ und $SA_2 = SA_1$ macht. Verbindet man A_2 mit S, so ist W. $BSA_2 = \gamma$. Die übrigen gesuchten Stücke erhält man nun, nachdem die drei Seiten bekannt sind, wie in Nr. 109.

(Wie vereinfacht sich die Lösung, wenn der gegebene Winkel ein rechter ist?)

Aufl. II. Denkt man ein Dreikant aus den gegebenen Stücken construirt und mit der Kante SC senkrecht zur HE gestellt, so werden (Taf. XII, 4) die H-Spuren CB, CA der Seiten α, β den Winkel C einschließen; die Seiten selbst liegen in zwei rechtwinkeligen Dreiecken mit gemeinsamer Kathete ($CS_1 = CS_2$), welche leicht in horizontaler Umklappung gezeichnet werden können und auf die H-Spur BA der Seite γ führen. Betrachtet man die Ebene der Seite α als VE, so findet sich der Winkel B ($= DB_0 C$) als V-Neigung der Seite γ (Nr. 78). Läßt man aber die Ebene der Seite β als VE gelten, so ergibt sich auf gleiche Weise der Winkel A ($= EA_0 C$). — Die Seite γ liegt in einem aus AB, BS_1 und AS_2 construirten Dreieck $AS_3 B$ der AB gegenüber (wobei $CS_3 \perp AB$).

† Nach der ersten Aufl. macht sich die Construction am einfachsten, wenn die drei gegebenen Stücke spitz sind; nach der zweiten, wenn spitze Seiten und ein stumpfer Winkel gegeben sind. Bei anderer Beschaffenheit der gegebenen Stücke kann man in beiden Auflösungen immer noch die oben angegebenen Constructionen verfolgen, und hat nur auf die aus der Natur der Sache hervorgehenden Modificationen der Zeichnung Acht zu geben. Bequemer aber ist es in solchen Fällen, auf ein Nebendreikant überzugehen, welches stets so gewählt werden kann daß man auf die einfachste Construction entweder der Aufl. I oder der Aufl. II zurückkommt.

Zusatz. Die Ebenen der für die zweite Aufl. benützten, in DCB_0 und ECA_0 umgeklappten Dreiecke stehen in ihrer ursprünglichen Lage senkrecht auf der Ebene der Seite γ, schneiden sich also nach einer zu

dieser Ebene senkrechten Geraden CF, welche die **gemeinschaftliche Höhe** jener Dreiecke (die Hypotenusen als Grundlinien betrachtet) vorstellt. Ein um C beschriebener Kreis, welcher die Hypotenuse DB_0 des einen umgeklappten Dreiecks berührt, muß also auch die Hypotenuse EA_0 des andern berühren. (CF_1, CF_2 sind die beiden mit den Dreiecken umgeklappten Lagen der CF.)

III. **Ggb.:** Zwei Seiten α, β und der Gegenwinkel B der letztern.

Fig. 30. **111. Aufl.** Die drei gegebenen Stücke seien spitz. — Legt man unter dem Winkel B gegen die Seite α eine Ebene **E** durch eine Kante SB der letztern und denkt die Seite β um die andere Kante SC gedreht, so wird das fragliche Dreikant gebildet sein, sobald die freie Kante von β in jene Ebene **E** fällt. Nun betrachte man die Ebene der Seite α als HE, zeichne die horizontale Umklappung CSA_1 der Seite β, nehme die VE senkrecht zu SC an, bestimme die V-Spur DE′ der vorhin erwähnten Ebene **E** (Nr. 80, 1) und ziehe den Kreis A_1A', welcher in der VE von dem Punkte A_1 beschrieben wird während die Seite β sich um SC dreht. Ist im Verlaufe dieser Bewegung A_1 in DE′ angekommen, so muß die Kante SA_1 in die Ebene SDE′ gefallen sein; daher gibt der Schnitt A′ des Kreises A_1A' und der Geraden DE′ die V-Spur für die wahre Lage der in SA_1 umgeklappten Kante, und das Dreieck DSA′ enthält die dritte Seite γ des Dreikants. Zeichnet man demnach die Umklappung DSA_2 jenes Dreiecks (indem man $DA_2 = DA'$ und $SA_2 = SA_1$ macht), so hat man in DSA_2 die Größe der Seite γ. Der Winkel C des Dreikants ist = DCA′; den Winkel A findet man wie in Nr. 109.*

Der Kreis A_1A' wird die DE′ noch in einem zweiten Punkte A″ schneiden, welcher entweder mit A′ auf einerlei Seite von D liegen kann (wie in Fig. 30), oder auf der entgegengesetzten. Im erstern Falle (welcher eintritt, wenn $CA_1 < CD$, d. i. $\beta < \alpha$) führt die Construction auf ein zweites, wesentlich anderes Dreikant mit den gegebenen Stücken, also auch auf einen zweiten Werth $DSA_{,,}$ von γ (womit sich zugleich C und A ändern); im andern Falle würde das neue Dreikant zwar die

* Für die Auflösung der Aufgabe könnte man auch von der Betrachtung der Fig. Taf. XII, 4 ausgehen und würde dabei wieder ganz auf die obigen Constructionen kommen, nur daß VE und HE ihre Rollen getauscht haben.

gegebenen Seiten α und β, aber statt des Winkels B dessen Nebenwinkel enthalten, weshalb es unbeachtet bleiben muß. Fallen die beiden Punkte A′ und A″ zusammen (d. h. berührt der Kreis die Gerade DE′, wobei $CA' \perp DE'$), so ist die Ebene SCA′ senkrecht auf DE′ (Nr. 27), also auch auf der Ebene SDE′ (Nr. 5, XI), oder der Winkel A des Dreikants ist ein rechter. Erreicht der Kreis die Gerade nicht, so ist aus den gegebenen Stücken kein Dreikant möglich.*

(Wäre $\beta = \alpha$, so hätte man nur ein Dreikant, weil der zweite Schnittpunkt A″ in D, also die zweite Stellung von β in die Ebene der Seite α fiele.)

† Ist B ein rechter Winkel, so daß $DE' \perp GS$, so kann der Kreis $A_1 A'$ die DE′ auf einerlei Seite des Grundschnitts nicht zweimal schneiden.

Ist B ein stumpfer Winkel (während α und β spitz bleiben, wie bisher), so wird in der verticalen Umklappung seiner Ebene der zur Seite γ gehörige Schenkel erst in seiner Rückverlängerung die V-Spur dieser Ebene (also unterhalb des Grundschnitts) treffen; der Winkel CDE′ ist dann ebenfalls ein stumpfer, und die DE′ kann oberhalb des Grundschnitts von dem Kreise $A_1 A'$ höchstens einmal geschnitten werden.

In beiden Fällen ist also die Möglichkeit eines zweiten Dreikants nicht vorhanden. (Ist in einem dieser Fälle $\beta < \alpha$, so gibt es überhaupt gar kein Dreikant aus den gegebenen Stücken. Dieß ergibt sich einerseits aus der betreffenden Figur, andererseits weisen die Sätze in Nr. 109, Zus. 2 u. Zus. 3 darauf hin.)

†† Ist $\alpha = 90^\circ$ (so daß die Ebene der Seite γ parallel zum Grundschnitt liegt) und β spitz, so können zwei Dreikante entstehen wenn B spitz ist; das Dreikant wird unmöglich wenn B stumpf oder ein rechter Winkel ist.

Ist $\beta = 90^\circ$ und α spitz (B spitz oder stumpf oder ein rechter W.), so muß die Kante SA in eine Ebene fallen welche durch S parallel zur

---

* Auch hier würde man zu dem gefundenen Dreikant (oder, falls sich zwei ergeben haben, zu jedem derselben) ein symmetrisches erhalten, wenn man den Winkel B unterhalb der HE an die Seite α anlegen wollte. Wie in der vorigen Aufgabe, so kann und soll auch in dieser und in den nachfolgenden von der Construction des symmetrischen Dreikants ganz abgesehen werden; es gelte ein für allemal die Annahme, daß das zu construirende Dreikant, von welchem eine Seite in der HE liegen bleibt, sich oberhalb der HE aufbaue.

VE gelegt wird; die Umklappung SA_1 ($\parallel$ GS) dieser Kante ist zugleich ihre H-Projection (wenn nicht $B = 90^0$); die V-Projection derselben ist $\parallel$ DE′ und schließt mit CD den Winkel C ein; die Seite γ ergibt sich, wenn man einen beliebigen Punkt der SA mit der Ebene SDE′ umklappt (Nr. 62) und die Umklappung mit S verbindet. Es kann nur ein Dreikant geben.

Für $\alpha = \beta = 90^0$ müßte nothwendig auch $B = 90^0$ sein; die Aufgabe ist in diesem Falle unbestimmt.

Aus dem Bisherigen folgt, daß, so lange weder α noch β stumpf ist, aus diesen Seiten und dem Winkel B überhaupt nur dann zwei Dreikante erhalten werden können, wenn $\beta < \alpha$ (woraus dann von selbst folgt, daß B spitz sein muß).

††† Auf einen der bisher betrachteten Fälle (in denen keine der gegebenen Seiten stumpf ist) läßt sich jeder andere Fall zurückführen durch Uebergang auf ein Nebendreikant. Ist nämlich eine der gegebenen Seiten stumpf, so construirt man das an der andern gegebenen Seite liegende Nebendreikant. Sind beide Seiten stumpf, so ist das an γ liegende Nebendreikant zu wählen. Bedeuten also a, b, c die Supplemente von α, β, γ, ebenso 𝔄, 𝔅, ℭ die Supplemente von A, B, C, und bezeichnet man ein Dreikant durch seine in Klammern gesetzten Bestimmungsstücke, so hat man, je nachdem α oder β oder jede dieser beiden Seiten stumpf ist, [a, β, B] oder [α, b, 𝔅] oder [a, b, 𝔅] als Nebendreikant zu construiren; man findet dadurch zunächst im ersten Fall c, ℭ, 𝔄, im zweiten c, ℭ, A, im dritten γ, C, 𝔄 und hieraus unmittelbar die fehlenden Stücke des ursprünglichen Dreikants.

Doppelwerthe können sich für diese fehlenden Stücke nur dann ergeben, wenn die im Nebendreikant gefundenen Stücke des letztern Doppelwerthe annehmen. Da nun keines der vorhin angeführten Nebendreikante eine stumpfe Seite enthält, so sind Doppelgestaltungen möglich

für das Dreikant [a, β, B], wenn $\beta < a$, d. h. $\alpha + \beta < 180^0$,
(wobei B nothwendig spitz und $\beta < \alpha$);

für das Dreikant [α, b, 𝔅], wenn $b < \alpha$, d. h. $\alpha + \beta > 180^0$,
(wobei B nothwendig stumpf);

für das Dreikant [a, b, 𝔅], wenn $b < a$, d. h. $\beta > \alpha$,
(wobei B nothwendig stumpf);

und unter solchen Bedingungen wird also auch das ursprüngliche Dreikant [α, β, B] für jedes der fehlenden Stücke zwei verschiedene Werthe

erhalten können. Nimmt man noch den zuerst betrachteten Fall hinzu (in welchem weder α noch β stumpf), so gelangt man durch Zusammenfassen der für die einzelnen Fälle gefundenen Bedingungen zu folgendem allgemeinen Satze:

Aus zwei Seiten α, β und dem Gegenwinkel der β sind zwei verschiedene Dreikante möglich, wenn entweder

1) $\alpha + \beta < 180^0$ und $\beta < \alpha$,

oder 2) $\alpha + \beta > 180^0$ und $\beta > \alpha$.

Uebrigens darf nicht übersehen werden, daß, wenn die eine oder die andere dieser beiden Bedingungen zutrifft, hieraus immer nur auf die Möglichkeit, aber noch nicht auf die nothwendige Existenz zweier Dreikante zu schließen ist, indem in einem besondern Falle die zwei Dreikante in ein einziges (bei SA rechtwinkeliges) sich vereinigen können, in andern Fällen gar keines zu Stande kommt.

IV. **Ggb.**: Eine Seite α und die anliegenden Winkel B, C.

112. Aufl. Durch Einführung eines Supplementardreikants läßt sich diese Aufgabe gleich der in Nr. 110 lösen. Man construirt ein Dreikant, in welchem zwei Seiten die Werthe $180^0 - A$ und $180^0 - B$ haben, während der von ihnen eingeschlossene Winkel $180^0 - \alpha$ beträgt. Die Supplemente der gefundenen Winkel sind dann die gesuchten Seiten; das Supplement der gefundenen dritten Seite ist der gesuchte Winkel.

Es ist aber auch eine einfache Lösung ohne Hülfe des Supplementardreikants möglich. Fig. 29. Zeichnet man nämlich zwei rechtwinkelige Dreiecke $B_1 a_{,,} A_{,,}$ und $C_1 a_1 A_{,,,}$, welche eine Kathete ($A_{,,,} a_1 = A_{,,} a_{,,}$) gemein haben und dieser gegenüber die Winkel B und C fassen, und denkt diese Dreiecke so an den Kanten von α hinbewegt, daß ihre Ebenen stets senkrecht auf diesen Kanten SB und SC stehen, die Eckpunkte B_1 und C_1 nicht aus den Kanten und die Katheten $B_1 a_{,,}$, $C_1 a_1$ nicht aus der Ebene α weichen, so wird endlich einmal $A_{,,,} a_1$ mit $A_{,,} a_{,,}$ zusammenfallen, und der Punkt A, in welchem $A_{,,,}$ und $A_{,,}$ sich vereinigen, bestimmt mit S die dritte Kante des Dreikants. Bei jener Bewegung beschreiben die Projectionen $a_{,,}$ und a_1 zwei Grade $a_{,,} a$ und $a_1 a$, welche mit SB und SC in den Entfernungen $B_1 a_{,,}$ und $C_1 a_1$ parallel sind; ihre Vereinigung geschieht also in a, wo $a_1 a$ und $a_{,,} a$ sich schneiden. Fällt man nun $a A_2 \perp SB$, $a A_1 \perp SC$, macht $BA_2 = B_1 A_{,,}$,

$CA_1 = C_1 A_{,,,}$, zieht SA_2, SA_1, so hat man die beiden übrigen Seiten β und γ des Dreikants. (Probe: $SA_2 = SA_1$). Den dritten Winkel findet man wie in Nr. 109.

(In der Figur sind die beiden gegebenen Winkel als spitze vorausgesetzt. Wie sich bei stumpfen Winkeln die Construction ändert, ist leicht zu finden.)

Anmerk. Durch obige Construction ist zugleich die Aufgabe gelöst: die Schnittlinie zweier Ebenen zu finden, welche durch ihre H-Spuren SB, SC und ihre H-Neigungen B, C gegeben sind. Da man für den in der Schnittlinie liegenden Punkt A die H-Projection und die H-Distanz hat, so läßt sich auch auf einer hinzukommenden VE die zweite Projection dieser Linie zeichnen.

V. **Ggb.:** Eine Seite β, ein anliegender Winkel C und der Gegenwinkel B.

113. Aufl. Die Aufgabe kann mit Hülfe eines Supplementardreikants auf Nr. 111 zurückgeführt oder auch direct auf folgende Weise gelöst werden.

Fig. 31. Man lege die Seite β in die HE und nehme die VE senkrecht zur Kante SC an. Dreht man dann β um SC, bis sie gegen die HE unter dem Winkel C geneigt ist, so beschreibt A_1 in der VE einen Kreis um C und kommt nach A′ so zu liegen, daß W. MCA′ = W. C. Nun sind A′ und S die Spuren der Kante SA; und um das Dreikant vollens zu construiren, hat man durch SA′ eine Ebene zu führen, welche die HE unter W. B schneidet (Nr. 81). Ist SM ihre H-Spur, so ist $MSC = \alpha$; die dritte Seite ist in der Umklappung MSA_2 des Dreiecks MSA′ enthalten, und der dritte Winkel ergibt sich wie in Nr. 109.

Zwei verschiedene Dreikante werden aus den gegebenen Stücken möglich sein, wenn das zugehörige Supplementardreikant zweier verschiedenen Gestaltungen fähig ist, also (Nr. 112, †††) wenn entweder

1) $(180^0 - C) + (180^0 - B) < 180^0$ und $(180^0 - B) < (180^0 - C)$,
d. i. $B + C > 180^0$ und $B > C$, oder

2) $(180^0 - C) + (180^0 - B) > 180^0$ und $(180^0 - B) > (180^0 - C)$,
d. i. $B + C < 180^0$ und $B < C$.

In Fig. 31 sind die gegebenen Winkel beide spitz und $B > C$; es kann somit kein zweites Dreikant entstehen. Dieß zeigt sich auch bei unmittelbarer Betrachtung der Construction. Würde man nämlich den Kreis B_1 B . . vollständig zeichnen und an ihn von S aus die zweite Tangente ziehen, so könnte dieselbe nicht als eine Kante des gesuchten Dreikants gelten, da dieses Dreikant statt des Winkels B sein Supplement enthielte.

Denkt man sich die Fig. 31 dahin verändert, daß B kleiner als der spitze Winkel C ist, so schließt der Kreis B_1 B ... den Punkt C ein; die zweite Tangente an ihn aus S fällt rechts von SC und die Rückverlängerung dieser Tangente bestimmt mit SC und SA′ ein zweites Dreikant, welches die gegebenen Stücke enthält. Dieses fällt mit dem ersten zusammen, wenn der Kreis durch S geht; γ ist dann rechtwinkelig. Kein Dreikant erhält man, wenn $aB_1 > aS$.

VI. **Ggb.:** Die drei Winkel A, B, C.

114. Aufl. I. Indem man auf das Supplementardreikant übergeht, läßt sich die Lösung nach Nr. 109 ausführen.

Zusatz. Nach Nr. 109, Zus. 1 lassen die gegebenen Winkel nur dann ein Dreikant zu, wenn

1) $(180^\circ - A) + (180^\circ - B) + (180^\circ - C) < 360^\circ$
d. h. $A + B + C > 180^\circ$

2) $(180^\circ - C) < (180^\circ - A) + (180^\circ - B)$
d. h. $A + B - C < 180^\circ$,

wo C den kleinsten der drei gegebenen Winkel bezeichnet.

Da ferner keiner der Winkel eines Dreikants überstumpf oder ein flacher werden kann, so hat man noch die weitere Bedingung

3) $A + B + C < 3 . 180^\circ$.

Aufl. II. Auf eine directe Lösung führt die im Zusatz zu Nr. 110 niedergelegte Bemerkung.

Die Winkel A und B seien spitz. Ist (Taf. XII, 4) B_0CA_0 der gegebene Winkel C, so beschreibe man um den Scheitel C einen Kreis und ziehe an diesen zwei Tangenten A_0E, B_0D so, daß sie mit den Schenkeln CA_0 und CB_0 die Winkel A und B (auf der innern Seite des Winkels C liegend) einschließen. Die auf CA_0 und CB_0 errichteten Senkrechten CE und CD ergeben die Schnittpunkte E, D, und deren Verbindungslinie führt auf die Punkte A, B, welche, wenn man sich CA und CB als die Projectionen der Kanten SA und SB denkt, die Spuren dieser Kanten darstellen. Die Construction der Seiten wird leicht aus der Figur ersichtlich.

Ist auch der Winkel C spitz, so erleidet die Figur nur unwesentliche Abänderungen. Sind unter den gegebenen Winkeln zwei stumpfe, so kann die Construction auch diesem Falle angepaßt werden; bequemer aber ist es, die beiden stumpfen Winkel mit ihren Supplementen zu vertauschen und zunächst das Nebendreikant des gesuchten zu construiren.

115. Ob man bei einer der drei letzten Aufgaben (IV—VI) die directe oder die durch das Supplementardreikant vermittelte Auflösung

zu wählen habe, hängt von der jedesmaligen Beschaffenheit der gegebenen Stücke ab. Man wird immer derjenigen Lösung den Vorzug geben, bei welcher sich die Construction am wenigsten verwickelt.

116. Bei solchen Aufgaben der descriptiven Geometrie, welche unter den gegebenen Größen Winkel enthalten, geschieht es nicht selten, daß die Lösung sich der Hauptsache nach auf die Construction eines Dreikants zurückbringen läßt; und da man diese Construction immer auf einem Nebenblatte ausführen kann, so wird in solchen Fällen das Zeichnungsblatt selbst frei bleiben von einer Anhäufung der Linien, welche leicht Verwirrung herbeiführt. Als Beispiele mögen ein paar Aufgaben der Art hier Platz finden, nebst Andeutungen zu ihrer Lösung.

1) Die V-Projection einer Geraden zu zeichnen, welche eine gegebene Gerade AB unter einem gegebenen Winkel φ so schneidet, daß ihre H-Projection in eine gegebene Richtung bc fällt. (Vgl. Nr. 87.)

Fig. 32. Die Gerade BC, deren V-Projection gesucht wird, bestimmt mit BA und Bb ein Dreikant, in welchem man die Seite ABC $= \varphi$ und deren Gegenwinkel AbC kennt; eine zweite Seite ABb wird gefunden, wenn man das Dreieck ABb in die HE umklappt. Sucht man (nach Nr. 111) die dritte Seite bBC dieses Dreikants, so kann das Dreieck BbC construirt werden, wodurch man die Länge von bC erhält. Durch diese Länge ist die Lage des Punkts C, mithin auch der Projection b′c′ bestimmt. (Da die Seite bBC zwei Werthe annehmen kann, so ist b′c′ zweier verschiedener Lagen fähig.)

2) Eine Ebene zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht und mit zwei gegebenen Ebenen gegebene Winkel bildet.

Fig. 33. Die gegebenen Ebenen seien POP′ und PQP′; die gesuchte neige sich gegen die erste unter W. φ, gegen die zweite unter W. ψ. Denkt man durch einen beliebigen Punkt W in der Schnittlinie der gegebenen Ebenen eine mit der gesuchten parallele Ebene VWR, so bildet sich ein Dreikant, dessen Kanten WP, WR, WV, dessen Winkel φ, ψ und der (nach Nr. 91 zu findende) Neigungswinkel der gegebenen Ebenen sind. Von diesem Dreikant suche man (nach Nr. 114) die Seiten PWR und PWV, welche den Winkeln φ und ψ gegenüber liegen. Bestimmt man hierauf die Lage des Punktes W und der Geraden PW nach ho-

rizontaler Umklappung der Ebene POP′ und zieht durch die Umklappung von W in der HE eine Gerade unter der Neigung PWV gegen die Umklappung von PW, so ergibt sich der Punkt V. Auf ähnliche Weise findet man (nach horizontaler Umklappung von PQP′) den Punkt R; und nun ist nur noch übrig, daß man durch VR und W eine Ebene führe und durch den gegebenen Punkt eine parallele mit ihr.

Im Allgemeinen wird man vier Auflösungen erhalten.

Zur Uebung kann man noch für folgende bereits früher abgehandelte Aufgaben neue Auflösungen suchen, welche sich auf Construction von Dreikanten stützen.

Aufg. in Nr. 76 (lösbar nach Nr. 111.)
" " " 81 (" " " 113.)
" " " 82 (" " " 114.)
" " " 86 (" " " 111.)
" " " 89 (" " " 109.)
" " " 90 (" " " 109 od. 110 od. 111 od. 112).

117. Wird um die Spitze irgend eines Raumecks mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugel beschrieben, so schneiden die Seitenebenen des erstern auf letzterer ein sphärisches Polygon aus, welches das Raumeck in der Art repräsentirt, daß die Seiten und Winkel des Raumecks durch die Seiten und Winkel des Polygons gemessen werden. So kann z. B. jedes Dreikant durch ein sphärisches Dreieck dargestellt werden, und umgekehrt; woraus man ersieht, daß mit der Auflösung des Dreikants zugleich die graphische Auflösung der Aufgaben der sphärischen Trigonometrie gelehrt ist.*

118. Die Behandlung eines mehrkantigen Raumecks läßt sich auf die Aufgaben über das dreikantige zurückführen, wenn man jenes durch Diagonalebenen in mehrere Dreikante zerlegt. Es seien z. B. von einem Vierkant EFGH die vier Seiten und der Winkel E zwischen zweien Fig. 34.
derselben gegeben. (Der einfacheren Zeichnung willen ist in Fig. 34

* Was für das Dreikant das Supplementardreikant, das ist für das sphärische Dreieck das Polardreieck. Um diese Uebereinstimmung klar zu sehen, darf man nur das Supplementardreikant so verrücken, daß seine Spitze mit der des Dreikants zusammenfällt, und dann statt des Supplementardreikants selbst sein Scheiteldreikant (Nr. 105) nehmen. Nun wird eines der sich supplirenden Dreikante vom andern umschlossen, und wenn man um die gemeinschaftliche Spitze die Kugel beschreibt, so entstehen zwei sphärische Dreiecke, deren jedes durch seine Eckpunkte die Pole für die Seiten des andern angibt.

das Vierkant durch ein sphärisches Viereck vertreten.) Die Diagonalebene FH scheidet dasselbe in zwei Dreikante, von denen sich zunächst EHF nach Nr. 110 construiren läßt. Ist die dritte Seite FH gefunden, so ergeben sich die Winkel G, v, w des Dreikants nach Nr. 109; und da die Winkel x und y schon aus der Construction des erstern Dreikants bekannt sind, so hat man auch die Winkel F = y + w und H = v + x, folglich alle Stücke des Vierkants EFGH.

Viertes Kapitel.

Veränderung des Grundsystems.

119. Die Einfachheit der Auflösung einer Aufgabe ist in vielen Fällen durch die Lage bedingt, welche die gegebenen Linien oder Flächen gegen die Grundebenen haben. Wenn die gegenseitige Stellung solcher Gebilde auf andere Weise, als mittels der Projectionsmethode, ausgesprochen ist, und man dieselben erst, behufs der Auflösung, auf beliebige Grundebenen zu projiciren hat, so wird man die letztern immer so wählen, daß die auszuführenden Constructionen wenigst verwickelt werden. (Beispiele davon später.) Sind aber die gegebenen Gebilde schon durch ihre Projectionen oder Spuren auf zwei Grundebenen dargestellt deren Lage den eben berührten Vortheil nicht gewährt, so ist es nicht selten von Nutzen, diese ursprünglichen Grundebenen mit einem andern Paare zu vertauschen, oder wenigstens einer von ihnen eine andere Stellung zu geben. Eine Aenderung des Grundsystems kann ferner auch in solchen Fällen zu statten kommen, wo man sich durch die Grenzen des Zeichnungsraumes in den Constructionen beschränkt sieht. Es ist daher nöthig, die Operationen kennen zu lernen, mittels deren man die Projectionen oder Spuren eines Raumgebildes aus einem Grundsystem in ein anderes übertragen kann, dessen Stellung gegen das erste bekannt ist. Die neuen Grundebenen sollen hier zunächst immer wieder in rechtwinkeliger Verbindung angenommen werden, obgleich in einzelnen Fällen die Einführung eines schiefwinkeligen Grundsystems und schiefer Projectionsstrahlen, manchmal wohl auch die Anwendung der Centralprojection, auf einfache und schöne Auflösungen leitet.

Parallele Verrückung einer Grundebene.

120. Es seien a, a′ die Projectionen eines Punkts A auf zwei Grundebenen, denen der Grundschnitt mn entspricht. Wird hier die HE Fig. 35.

um ein Stück mm über ihre ursprüngliche Lage erhoben, so daß mn als neuer Grundschnitt erscheint, so kann sich offenbar weder die V-Projection noch die V-Distanz des Punkts A ändern. Macht man daher ma = ma, so sind a, a′ die neuen Projectionen des Punkts. — Bestimmt man ebenso die neuen Projectionen b, b′ eines zweiten Punktes B, welcher ursprünglich in b und b′ projicirt war, so sieht man, daß eine Gerade AB ihre V-Projection a′b′ beibehalten, zur H-Projection aber die mit ab parallele ab erhalten wird.

Sind PO, OP′ die ursprünglichen Spuren einer Ebene, so fällt in die Augen, daß nach Einführung der neuen HE die Lage der V-Spur OP′ dieselbe bleibt, die neue H-Spur aber durch den Punkt O gehen muß. Da nun im Raume die letztere mit mn denselben Winkel bildet wie OP mit mn, so werden auch nach dem Zurückklappen der VE die Winkel mOP und mOP gleich sein, oder OP und OP sind parallel. Die Bestimmung der neuen H-Spur OP hat demnach keine Schwierigkeit.

Auf ähnliche Weise versetzt man Projectionen und Spuren aus einem Grundsystem in ein anderes, welches einerlei HE mit dem ersten und eine mit der ursprünglichen parallele VE hat.

121. Um sogleich an einem einfachen Beispiele zu zeigen, wie die parallele Verrückung einer Grundebene nützlich werden kann, soll die Schnittlinie zweier Ebenen projicirt werden, deren H-Spuren sich erst außerhalb des Zeichnungsblattes schneiden. Statt des in Nr. 47, *†† für einen solchen Fall gelehrten Verfahrens kann man sich nun des folgenden bedienen.

Fig. 36. Man lege eine neue HE so, daß die auf ihr erscheinenden Spuren RO, RO sich noch innerhalb des Blattes begegnen, und zeichne die Projectionen P′r′, Rp der Schnittlinie für das neue Grundsystem. Geht man dann wieder auf das erste System zurück, so behält die V-Projection P′r′ ihre Stelle; die H-Projection aber geht jetzt durch p und läuft mit Rp parallel, ist also völlig bestimmt.

122. Die Projection eines im Raume vorhandenen Gebildes wird durch parallele Verrückung der betreffenden Grundebene weder ihre Gestalt noch ihre Lage gegen den Grundschnitt (der sich mit verrückt) ändern, und insofern wäre eine solche Verrückung von keiner wesentlichen Bedeutung. Wenn man zu einer Verschiebung dieser Art greift, so liegt gewöhnlich entweder die Absicht zu Grunde, gewisse unzugänglich

gewordene Theile einer auf dem Arbeitsblatte auszuführenden Zeichnung noch in den Raum des Blattes hereinzuziehen (wie in dem Beispiel Nr. 121); oder man sucht sich dadurch die zur Bestimmung von Längen- und Winkelgrößen erforderlichen Umklappungen bequemer zu machen. Häufig kann dabei die besondere Zeichnung der neuen Projectionen für Linien oder Punkte ganz umgangen und trotz der verschobenen Grundebene an den alten Projectionen festgehalten werden. Denkt man sich nämlich in Fig. 35 zunächst nur die obere VE und die vordere HE des neuen Grundsystems vorhanden, die HE längs des Grundschnitts mn von der VE abgeschnitten und auf dem Zeichnungsraume so abwärts geschoben daß m nach m und n nach n fällt, so deckt das Trapez mnba das Trapez mnba; der (neue) Grundschnitt ist jetzt zweimal gezeichnet; seine zweite Darstellung nimmt die Stelle des alten Grundschnitts ein, und der zwischen mn und mn liegende Streifen des Blattes ist aus dem Zeichnungsraume ausgeschaltet zu denken. Um bei solcher Auffassung der Sache die neue H-Spur der Ebene POP′ zu erhalten, hat man (mittels $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_0 \perp$ mn) die dem Punkte $\mathfrak{O}$ entsprechende Stelle $\mathfrak{O}_0$ auf mn zu bestimmen und durch $\mathfrak{O}_0$ eine Parallele zu OP zu ziehen. (Die hintere HE und untere VE nachträglich hinzuzudenken und nöthigenfalls für die Constructionen zu benützen, hat keine Schwierigkeit.) — Wenn es gilt, durch Hinaufrücken der HE Punkte in das Zeichnungsblatt zu ziehen, welche außerdem über den untern Rand desselben hinausliegen würden (wie in Fig. 36), ist jene doppelte Darstellung des neuen Grundschnitts in der Regel nicht zu brauchen; wohl aber, wenn zu einem Hinaufrücken der Wunsch Anlaß gegeben hat, Punkte, welche über den Seitenrand des Blattes hinausfallen (Einschnitte von V-Projectionen oder V-Spuren in den Grundschnitt) zugänglich zu machen.

Eine Parallelverschiebung der einen Grundebene mit doppelter Darstellung des neuen Grundschnitts kann man schon in früheren Constructionen finden. Will man in Fig. 40 (Nr. 65) die v-projicirende Ebene der Geraden BC als eine neue HE betrachten und den ursprünglichen Grundschnitt als zweite Darstellung des neuen b′c′ gelten lassen, so ist bc die H-Spur der Ebene ABC; die Aufgabe der Nr. 65 wird dann völlig identisch mit der in Nr. 62 und die Constructionen an Fig. 10 (sowohl für Aufl I als für Aufl. II) erscheinen als genaue Wiederholungen derer an Fig. 7. — Denkt man sich in der Figur Taf. XII, 2 (Nr. 100) die Gerade h′g′ als neuen Grundschnitt, den ursprünglichen als zweite Zeichnung des neuen, so ist hg die H-Spur der Ebene FGH und die Constructionen stimmen fast völlig überein mit denen, welche an der zu Nr. 67 (Aufl. II) gehörigen Fig. 13 vorgenommen worden

sind. — Auch hätte man schon die in Nr. 47, *†† benützten, zu einer oder der andern Grundebenen parallelen Hülfsebenen als neue Grundebenen ansehen können. — Man ersieht aus diesen Beispielen zugleich, daß, wenn nach Parallelverschiebung einer Grundebene der Grundschnitt in der oben näher bestimmten Weise zweimal gezeichnet bleibt, die Rückkehr vom neuen Grundsystem auf das ursprüngliche sich ohne alle Construction von selbst ergibt.

Parallele Verrückung beider Grundebenen.

123. Wird die HE parallel mit sich selbst auf- oder abwärts gerückt und zugleich die VE vor- oder rückwärts, so hat man nur das in Nr. 120 gelehrte Verfahren zweimal anzuwenden.

Eine besonders einfache Behandlung gestatten hier die beiden Fälle, 1) wenn die HE um eben so viel erhoben wird, als die VE zurücktritt, und 2) wenn die HE um eben so viel sich senkt, als die VE vorrückt. Bei der genauen Verwandtschaft beider Fälle wird die Erläuterung des ersten hinreichen, auch über den zweiten Licht zu geben.

Fig. 46. Es werde zuerst die HE über ihre ursprüngliche Lage um das Stück mm erhoben. Dadurch rückt die H-Projection a eines Punkts A um ein gleiches Stück nach a, während die V-Projection a′ ihre Stelle behält, und statt der Spuren PO, OP′ einer Ebene erscheinen jetzt die Spuren $\Pi\omega$, ωP′ (Nr. 120). Hierauf verlege man die VE um das Stück mμ = mm zurück, so daß statt des zweiten Grundschnittes mω nun ein dritter $\mu\Omega$ auftritt. Dadurch kommt die V-Projection a′ des Punkts A um mm höher nach a′ zu liegen; die Ebene $\Pi\omega$P′ vertauscht ihre V-Spur ωP′ mit $\Omega\Pi'$, und jetzt sind (a, a′), $\Pi\Omega\Pi'$ die Darstellungen des Punkts und der Ebene auf dem neuen Grundsystem. Nun ist aber klar, daß die gegenseitige Stellung der Projectionen und Spuren sich nicht ändern kann, wenn man die Zeichnungsebene selbst mit Allem, was darauf gezeichnet ist, verschiebt. Deshalb denke man sich diese gleichsam durch die als fest betrachtete Gerade mO hingezogen, bis m auf m und mω in die Richtung von mO zu liegen kommt; dann fällt offenbar a in a und a′ in a′; der Punkt Ω beschreibt die auf mO senkrechte Gerade ΩD und gelangt nach D; die Spuren $\Omega\Pi$ und $\Omega\Pi'$ haben sich parallel mit sich selbst nach DP und DP′ geschoben. Die letztern Lagen hätte man aber auch sogleich aus den Lagen OP, OP′ ableiten können; denn wird ωP senkrecht auf mO gefällt, so muß der Fußpunkt P in den Schnitt der DP und mO fallen. Für den Uebergang aus dem ersten Grundsystem in das letzte, dessen HE in der Ent-

fernung mm über der ersten und dessen VE in derselben Entfernung hinter der ersten liegt, hat man also folgende Regel: Man ziehe oberhalb des ersten Grundschnitts mO auf den Abstand mm eine Parallele mO mit ihm, betrachte diese als neuen Grundschnitt, lasse die Projectionen von Punkten und Linien an ihrer Stelle, und ändere die Spuren jeder Ebene POP′ so, daß man aus dem Schnittpunkte ω der V-Spur und des neuen Grundschnitts eine Senkrechte auf den ersten Grundschnitt fällt, durch ihren Fußpunkt P eine Parallele PO mit der H-Spur und durch den Schnitt O dieser Parallelen und des neuen Grundschnitts eine Parallele OP′ mit der V-Spur legt.

Dieselbe Regel gilt, wie man sich leicht überzeugen kann, auch für Fig. 47.
den oben unter (2) aufgeführten Fall, mit dem einzigen Unterschiede, daß hier der neue Grundschnitt mO unterhalb des ersten zu ziehen ist (s. Fig. 47).

Daß man durch parallele Verlegung des Grundschnitts unter Beibehaltung sämmtlicher Projectionen beide Grundebenen um gleiche Entfernungen aber in verschiedenem Sinne verlegt hat, ist eigentlich an sich klar; eine ausführlichere Erörterung wird blos durch daneben auftretende Spuren gegebener Ebenen nöthig gemacht.

124. Die Aufgabe in Nr. 48 läßt sich nicht mehr durch die dort Fig. 48.
angegebene einfachste Construction lösen, wenn die Projectionen der gegebenen Geraden AB die in Fig. 48 gewählten Lagen gegen die Grenzen des Zeichnungsblattes haben. Dieser Fall kann als Beispiel für die Anwendung des in Nr. 123 auseinandergesetzten Verfahrens dienen.

Ist mO der neue Grundschnitt, POP′ die neue Darstellung der gegebenen Ebene, so ist Pp′b′ die neue v-projicirende Ebene der AB. Man findet nun die Projectionen a, a′ des gesuchten Punktes auf die neuen Grundebenen wie in Fig. 3, und da beim Zurückgehen auf das erste System diese Projectionen ihre Stelle behalten, so ist die Aufgabe gelöst.

Einführung einer neuen $\left\{\begin{matrix}H\\V\end{matrix}\right\}$-Ebene, welche der ursprünglichen nicht parallel ist. *

125. Aendert man an einem Grundsysteme blos die VE und behält die HE bei, so gelten alle ursprünglich gegebenen H-Projectionen

* Wir betrachten hier blos die Aenderung der VE. Ist dieser Fall dem Schüler geläufig geworden, so wird er sich auch im andern Falle, wo die HE sich ändert und die VE bleibt, bald zurecht finden.

und H-Spuren unverändert fort. Ferner ist die H-Distanz eines Punkts völlig unabhängig von der Stellung der VE und wird sich also in allen Fig. 37. möglichen V-Ebenen immer in gleicher Größe abbilden. Ist daher mO der Grundschnitt des ersten, mD der des neugebildeten Systems, so erhält man die neue V-Projection a′ eines Punkts, dessen ursprüngliche Projectionen a und a′ waren, wenn man

$$aa' \perp mD\ (\text{Nr. } 10) \quad \text{und} \quad ma' = ma'$$

macht, wobei darauf zu achten ist, daß die aufzutragende H-Distanz immer auf die richtige Seite vom neuen Grundschnitt aus zu liegen kommt. — Hiernach läßt sich auch leicht die neue V-Projection einer auf dem ersten Systeme gegebenen Geraden finden.

Die neue V-Spur einer Ebene QOP′ muß durch den Punkt D gehen, wo mD und QO zusammentreffen. Um nun einen zweiten Punkt derselben zu finden, bemerke man, daß nach dem Zurückklappen der neuen VE die Gerade pP′, nach welcher sich beide V-Ebenen schneiden, im Punkte p senkrecht auf mD erscheinen, und der Punkt P′, wo jene Gerade von der Ebene QOP′ getroffen wird, seine Entfernung von p behalten muß. Macht man daher

$$p\mathfrak{P}' \perp mD \quad \text{und} \quad p\mathfrak{P}' = pP',$$

so ist 𝔓′D die neue Spur.

Einen Punkt der neuen V-Spur kann man auch anders auf folgende Weise erhalten. Bedeutet rr (∥ QO) die H-Projection einer Geraden, welche in der Ebene QOP′ parallel zu deren H-Spur gezogen ist und in R′ ihre ursprüngliche V-Spur hat, so wird diese Gerade in der neuen VE eine Spur ℜ′ haben, welche in der neuen V-Spur der gegebenen Ebene liegt und vom neuen Grundschnitt um R′r absteht. Macht man daher $r\mathfrak{R}' \perp mD$ und $r\mathfrak{R}' = rR'$, so ist ℜ′ ein Punkt für die verlangte V-Spur der Ebene, der entweder den Punkt 𝔓′ oder den Punkt D ersetzen kann, wenn der eine oder der andere dieser beiden Punkte im Zeichnungsblatte nicht zu erhalten ist. (Fehlt innerhalb des Zeichnungsraumes sowohl 𝔓′ als D, so hat man neben ℜ′ noch einen zweiten Punkt auf ähnliche Weise zu bestimmen.)

Mehrere der bei früheren Gelegenheiten benützten Hülfsebenen lassen sich als neu eingeführte V-Ebenen betrachten, und die für die Umklappungen solcher Hülfsebenen angewendeten Constructionen stimmen mit den oben gelehrten überein. So kann man in Fig. 9 (Nr. 63) die Linie QF, in Fig. 11 (Nr. 66) die ab, in Fig. 13 (Nr. 67) die RQ, in Fig. 17 (Nr. 74) die St als einen neuen Grundschnitt ansehen, womit

die an diesen Figuren gelösten Aufgaben auf ihre einfachsten Fälle (bei denen die zu bestimmenden Größen und Punkte in einer Grundebene liegen) zurückgeführt erscheinen. Der Winkel zweier zur HE senkrechten Ebenen wird durch den Winkel zwischen ihren H-Spuren angegeben; vertauscht man daher in dem Falle der Fig. 28 (Nr. 91, †) die ursprüngliche HE mit einer neuen, so daß der Grundschnitt senkrecht zu OP′ und QP″ wird, so liefern die neuen H-Spuren den Winkel der dort gegebenen Ebenen, wie es die Figur (in Uebereinstimmung mit den obigen Vorschriften) nachweist.

Seitenebene.

126. Unter den verschiedenen Stellungen, welche man der neuen VE geben kann, ist diejenige besonders hervorzuheben, wobei die Ebene auf dem ursprünglichen Grundschnitte senkrecht steht. Denn es kommt öfters vor, daß man eine solche VE nicht sowohl anstatt der ursprünglichen, als vielmehr neben dieser, als eine dritte Grundebene, gebraucht (wie denn schon früher [Nr. 15 u. 19] Fälle angedeutet wurden, in denen zwei Grundebenen nicht ausreichen). Um in solchen Fällen nicht fortwährend zwischen zwei zugleich vorhandenen V-Ebenen unterscheiden zu müssen, heiße die neueingeführte die Seitenebene (SE), während der Name Verticalebene der ursprünglichen ausschließlich bewahrt bleiben soll. Die Seitenprojection eines Punkts erhält zur Bezeichnung denselben Buchstaben wie seine H- und V-Projection, aber mit zwei Accenten, so daß (a, a′, a″) einen auf alle drei Grundebenen projicirten Punkt A bedeutet. — Für die Ausführung der Construction wird die SE, wie früher die VE, in die HE umgeklappt. Nach welcher Seite hin diese Umklappung geschieht, hängt bei jeder Aufgabe von der Lage der ursprünglich gegebenen Projectionen gegen die neu hinzugekommene Grundebene und von der Größe des disponibeln Zeichnungsraumes ab. Für die folgenden Entwickelungen aber sei ein für allemal festgesetzt, es bewege sich bei der Umklappung der SE ihr oberer Theil nach links zu. Nach geschehener Umklappung repräsentirt die Zeichnungsebene drei Ebenen im Verein.

Drei aufeinander senkrechte Grundebenen scheiden den Raum in acht congruente Fächer, und jede Grundebene wird durch die beiden andern in vier Abtheilungen gebracht. Die auf diese Weise gebildeten zwölf Ebenenstücke lassen sich durch folgende Bezeichnungen (in denen man sogleich die Anfangsbuchstaben der Wörtern vorn, hinten, unten, oben, rechts, links erkennen wird) unterscheiden:

1) r. v. HE.	5) r. u. VE.	9) v. u. SE.
2) l. v. HE.	6) l. u. VE.	10) v. o. SE.
3) l. h. HE.	7) l. o. VE.	11) h. o. SE.
4) r. h. HE.	8) r. o. VE.	12) h. u. SE.

Fig. 38. Statt eines Grundschnitts erscheinen nun drei, nämlich XX (der ursprüngliche) zwischen HE und VE; YY zwischen HE und SE; ZZ zwischen VE und SE. Nach Umklappung der SE wird der Grundschnitt ZZ auf XX fallen; da er aber zugleich auch in der VE liegt und mit dieser umgeklappt worden ist, so erscheint er in der Zeichnungsebene noch einmal, nämlich in der Lage von YY. (Der obere Theil von ZZ fällt also zugleich mit dem hintern Theil von YY und dem linken von XX zusammen; der untere Theil von ZZ mit dem vordern von YY und dem rechten von XX).

Fig. 39. Bedeuten in Fig. 39 die Zahlen I....IV die vier Abtheilungen, in welche die Zeichnungsebene durch die Geraden XX und YY zerlegt wird, so vertheilen sich die vorhin unter 1)....12) aufgezählten Ebenenstücke unter jene wie folgt:

I	1	5	9
II	2	6	10
III	3	7	11
IV	4	8	12

Nur vier von den zwölf Stücken können unverdeckt liegen, und zu diesen gehören jedenfalls r. v. HE, r. o. VE und v. o. SE; als viertes ergiebt sich h. o. SE, wenn man die SE erst umklappt nachdem die VE bereits umgeklappt ist, und so soll es hier auch angenommen werden. (Dächte man sich die SE früher als die VE umgeklappt, so würde h. o. SE verdeckt und dagegen l. o. VE frei erscheinen). Hiernach läßt sich ermessen, welche Linien in der Zeichnungsebene zu punktiren und welche voll auszuziehen sind.

127. Wie man die S-Projection eines Punktes aus dessen H- und V-Projection findet, ist aus Nr. 125 zu entnehmen. Wendet man ferner das, was dort über das Auffinden der neuen V-Spur einer Ebene gesagt wurde, auf den besondern Fall an, wo die neue VE die SE ist, so ergibt sich eine Vereinfachung des Verfahrens aus dem Umstande, daß die in Fig. 37 mit pP' bezeichnete Senkrechte hier in XX fallen muß, also nicht erst besonders gezogen zu werden braucht. Die

Betrachtung der Figuren 40, 41, 42 und ihre Vergleichung mit Fig. 37 lehrt die Seitenspur PP″ einer auf HE und VE gegebenen Ebene POP′ oder (PR, P′R′) finden.

(Warum ist der Kreisbogen P′P″ in Fig. 41 **links** und in Fig. 42 **rechts** von YY gezogen?)

128. Uebungsaufgaben.

1) Ggb.: Die S-Spur einer Ebene und der Punkt, in welchem die Ebene die XX trifft. Ges.: H-Spur und V-Spur.

2) Ggb.: Die H- und V-Projection einer Geraden. Ges.: ihre S-Spur.

3) Ggb.: S-Spur und V-Spur einer Geraden. Ges.: ihre drei Projectionen.

4) Ggb.: Die S-Projection einer zur SE parallelen Geraden und ein Punkt ihrer H-Projection. Ges.: die H- und V-Spur.

129. Die folgenden Aufgaben sollen zeigen, wie man sich der Seitenebene mit Vortheil bedienen kann.

I. Eine Ebene POP′ wird durch eine zweite Ebene R geschnitten, welche durch den Grundschnitt XX geht und mit ihrem obern Theile gegen die vordere HE unter dem Winkel α geneigt ist. Man soll die H- und V-Projection der Schnittlinie zeichnen. Fig. 40.

Die Schnittlinie muß offenbar durch O gehen, daher auch jede ihrer Projectionen (Nr. 11). Nimmt man nun eine SE PQP′ zu Hülfe, so wird diese zwischen R und der HE den Winkel α enthalten; man erhält daher die H-Spur QS″ der Ebene R, wenn man W. PQS″ = α macht. Bestimmt man auch die S-Spur PP″ der Ebene POP′, so findet man die H-Projection O der Schnittlinie wie in Nr. 47, indem man die SE als eine VE behandelt und OPP″, OQS″ als die Darstellungen der gegebenen Ebenen betrachtet. Da S″ die S-Spur der Schnittlinie ist, so ergibt sich die V-Projection s′O derselben, wenn man Qs′ = sS″ macht und s′ mit O verbindet.

II. Die Schnittlinie zweier Ebenen (PR, P′R′), (TU, T′U′) zu projiciren, welche dem Grundschnitte XX parallel sind*, und den Neigungswinkel zwischen ihnen anzugeben.

Führt man eine SE PoP′ ein und bestimmt die S-Spuren PP″, Fig. 41, 42.

* Vgl. Nr. 47, †††.

TT″ der gegebenen Ebenen, so ist deren Schnitt S″ die S=Spur der gesuchten Schnittlinie; und da diese dem Grundschnitt XX parallel sein muß, so ergeben sich nun leicht ihre H=Projection ab und V=Projection a′b′.

Der Winkel, unter welchem sich die gegebenen Ebenen schneiden, ist TS″P.

III. Durch einen gegebenen Punkt (a,a′) eine Ebene parallel zu einer gegebenen Ebene POP′ zu legen.*

Fig. 43. Man führe die SE PmP′ durch den gegebenen Punkt A, zeichne die Lage A″ desselben in der umgeklappten SE und die S=Spur PP″ der gegebenen Ebene. Die S=Spur RR″ der gesuchten muß offenbar durch A″ gehen und mit PP″ parallel sein, und ihr Schnitt R mit PP′ gibt einen Punkt der H=Spur dieser Ebene. Zieht man also RQ || PO und QR′ || OP′, so ist RQR′ die gesuchte Ebene. (Probe: mR′ = mR″).

IV. Den Schnittpunkt einer Ebene POP′ und einer Geraden zu finden, welche in einer zum Grundschnitt XX senkrechten Ebene liegt und in S,S′ ihre Spuren hat.**

Fig. 44. Man nehme eine SE durch die Gerade an, zeichne die Lage SS″ der letztern nach Umklappung der SE, sowie die S=Spur PP″ der gegebenen Ebene. Dann ist A″ der gesuchte Schnitt, also sind a und a′ seine Projectionen.

V. Den Schnittpunkt einer Geraden (aB, a′b′) und einer Ebene zu projiciren, welche durch den Grundschnitt XX und durch den Punkt (c,c′) geht.

Fig. 45. Legt man die SE cmc′ durch den Punkt C und bestimmt nach ihrer Umklappung die Lage C″ des letztern, so ist C″m die Seitenspur der Ebene. Ferner zeichne man die S=Projection A″b″ der gegebenen Linie und die H=Projection sd der (auf der SE senkrechten) Geraden, nach welcher die projicirende Ebene Bb″A″ und die Ebene b′mC″ sich schneiden. Der Punkt, wo diese Gerade der gegebenen begegnet, ist der gesuchte Schnittpunkt, also d seine H=Projection, und die V=Projection d′ ergibt sich nach Nr. 44. (Zur Probe kann man die zu sd gehörige V=Projection suchen, welche bei richtiger Zeichnung durch d′ gehen muß.)

(Wie würde man diese und die erste Aufgabe lösen, wenn die Anwendung der Seitenebene verboten wäre?)

---

* Vgl. Nr. 51.

** Vgl. Nr. 48.

Drehung des Grundsystems um den Grundschnitt.

130. Will man das Grundsystem, auf welchem der Punkt (a, a′) Fig. 49.
und die Ebene POP′ gegeben sind, mit einem andern vertauschen, welches denselben Grundschnitt mO hat, mit seinen Grundebenen aber gegen die gleichnamigen Grundebenen des ersten Systems unter dem Winkel φ geneigt ist, so lege man in passender Entfernung von O eine Seitenebene PμP′ und bestimme die S-Spur PP″ der Ebene POP′, sowie die S-Projection a″ des Punktes A (Nr. 127). Ferner zeichne man die S-Spuren $\mu\Pi$, $\mu\Pi'$ der neuen Grundebenen, indem man $P\mu\Pi = \varphi$ und $\Pi\mu\Pi' = 90^0$ macht. Wird dann $a''\alpha \perp \mu\Pi$ und $a''\alpha' \perp \mu\Pi'$ gefällt, so ist leicht einzusehen, daß $a''\alpha$ (oder $\mu\alpha'$) und $a''\alpha'$ (oder $\mu\alpha$) die H- und V-Distanz des Punkts A in Bezug auf das neue System darstellen. Da aber beide Systeme einerlei Grundschnitte haben, so müssen die neuen Projectionen a, a′ des Punktes wieder in die Linien ma, ma′ fallen, und man erhält sie also, wenn man $m\,a = \mu\alpha$ und $m\,a' = \mu\alpha'$ macht. — Die Punkte Π, Π', in denen die S-Spuren der neuen Grundebenen von der S-Spur der Ebene POP′ getroffen werden, müssen in den neuen Spuren der letztern liegen. Da nun, wenn das neue System zu einer Zeichnungsebene auseinandergeklappt wird, $\mu\Pi$ in μP und $\mu\Pi'$ in μP′ fällt, der Punkt O aber für beide Systeme derselbe bleibt, so macht man $\mu\mathfrak{P} = \mu\Pi$, $\mu\mathfrak{P}' = \mu\Pi'$ und hat dann in O$\mathfrak{P}$, O$\mathfrak{P}'$ die neuen Spuren der Ebene POP′.

Wie man einen im neuen Grundsystem bestimmten Punkt in das alte zurück übertragen kann, folgt aus Obigem von selbst.

Man kann auf das neue Grundsystem auch dadurch übergehen, daß man die Mittel der Nr. 125 wiederholt zur Anwendung bringt. Bedeuten H_1, V_1 die Grundebenen des ursprünglichen, H_2, V_2 die des neuen Systems, S die Seitenebene, so vertauscht man zuerst das System [H_1, V_1] mit dem System [H_1, S], hierauf dieses mit [H_2, S] und gelangt so, indem man zuletzt V_2 an die Stelle von S treten läßt, zu dem System [H_2, V_2]. Der Unterschied im Resultat liegt nur darin, daß jetzt auf der Zeichnungsebene der neue Grundschnitt nicht mehr mit dem alten zusammentrifft.

(Um die Uebertragungsconstructionen einzuüben, kann man durch Drehung des Grundsystems die Aufgaben in Nr. 90 und Nr. 93, dann die Uebungsaufg. 3 in Nr. 88 und die 1 in Nr. 92 lösen, immer unter der Annahme, daß die gegebene Ebene entweder durch den Grundschnitt geht oder mit ihm parallel ist; ferner kann auf diesem Wege die Aufgabe in Nr. 91 behandelt werden, wenn die eine der gegebenen Ebenen

eine der genannten Lagen hat. Bei denjenigen dieser Aufgaben, welche die Bestimmung einer Linie oder einer Ebene zum Ziel haben, ist schließlich wieder auf die ursprüngliche Lage des Systems zurück zu gehen; wo blos Neigungswinkel gesucht werden sollen, fällt dieß weg.)

Einführung eines Systems, dessen eine Grundebene eine beliebig gegebene Lage hat, während die andere senkrecht auf einer der ursprünglichen Grundebenen steht.

131. Es soll (Taf. XII, 5) die Ebene QOR′ zur neuen HE, die auf QO senkrechte Ebene QrR′ zur neuen VE werden, so daß QR′ den neuen Grundschnitt abgibt.

Man kann das neue System, um eine seiner Grundebenen in die Zeichnungsebene zu bringen, entweder um Qr drehen oder um QO. Im erstern Falle erhält der neue Grundschnitt die Lage QR″ und es muß nachträglich die neue HE umgeklappt werden; im zweiten Falle kommt der neue Grundschnitt nach Qr zu liegen und man hat nachträglich die neue VE umzuklappen. Die Uebertragung eines ursprünglich in b und b′ projicirten Punktes B auf das neue System soll für jede dieser beiden Annahmen ausgeführt werden.

1) In einem aus der alten HE und neuen VE gebildeten Zwischensystem, welches Qr zum Grundschnitt hat, sind b, b'_2 die Projectionen jenes Punkts, OQ und QR″ die Spuren der Ebene QOR′ (Nr. 125). Soll nun letztere Ebene als horizontale Grundebene neben die neue VE treten, so wird OR″ zum Grundschnitt; die zur V-Projection b'_2 gehörige neue H-Projection b_2 bestimmt sich mittels der V-Distanz, welche dem Punkte B im Zwischensystem zukam (Nr. 125).

In welchem Sinne jede der neu eintretenden Grundebenen umgeklappt werde, ist willkürlich; in der Regel wird man nach jener Seite umklappen, auf welcher das Zeichnungsblatt noch den meisten freien Raum bietet. Nur hat man dabei, wenn mehrere Punkte überzutragen sind, streng zu beachten, daß die neu zu bestimmenden gleichnamigen Projectionen zweier Punkte immer entweder auf einerlei Seite oder nach entgegengesetzten Seiten vom neuen Grundschnitt aus zu liegen kommen, je nachdem das eine oder das andere in Rücksicht des eben verlassenen Grundschnitts der Fall war. — Diese Bemerkungen gelten zugleich für alle folgenden Betrachtungen.

2) Nachdem in dem vorhin genannten Zwischensystem die V-Projection b'_2 des Punkts B und die V-Spur QR″ der Ebene QOR′ bestimmt worden, läßt sich die V-Projection $b'_2 b'_0$ der Geraden zeich-

nen, welche den Punkt B auf die Ebene QOR′ (in ihrer ursprünglichen Stellung) projicirt; eine aus b auf QO gefällte Senkrechte enthält die H-Projection dieser Geraden und also auch die Lage b_2 welche der in b'_0 v-projicirte Fußpunkt nach horizontaler Umklappung der Ebene QOR′ einnimmt. Jener (leicht zu bestimmende) Punkt b_2 stellt aber, nachdem die neue HE QOR′ in die Zeichnungsebene niedergelegt ist, die neue H-Projection für B dar; die zugehörige H-Distanz ist $b'_2\, b'_0$; der neue Grundschnitt fällt in Qr; die dieser Lage des Grundschnitts entsprechende neue V-Projection b'_2 ist mithin leicht beizufügen.*

† Die Endergebnisse der beiden so eben erläuterten Verfahrungsarten unterscheiden sich lediglich durch die Lage, welche der neue Grundschnitt im Zeichnungsblatt einnimmt; denkt man sich das Blatt um den Punkt Q so lange gedreht bis die Gerade Qr den Winkelraum rQR″ durchlaufen hat, so kommen die Punkte b_2, b'_2 genau an die Stelle, welche vor der Drehung die Punkte b_2, b'_2 eingenommen haben. Man kann aber auch beide Lagen des neuen Grundschnitts gleichzeitig nebeneinander benützen, d. h. den Grundschnitt in doppelter Darstellung annehmen, so daß z. B. mit der H-Projection b_2 die V-Projection b'_2 (statt b'_2) zusammengenommen wird, wodurch man bei dem unter (2) besprochenen Verfahren die Bestimmung des Punkts b'_2 ganz erspart. Die beiden Grundebenen erscheinen dann getrennt von einander, jede mit der ihr zugehörigen Lage des früher gemeinsamen Grundschnitts, doch so, daß der Schnittpunkt zwischen beiden Lagen des Grundschnitts noch immer ein gemeinsamer Punkt beider Ebenen ist. (Wird jetzt in jeder der Grundebenen ein Punkt angenommen, so können zwei solche Punkte nur dann Projectionen eines Punkts im Raume sein, wenn die aus ihnen auf die betreffenden Lagen des Grundschnitts gefällten Senkrechten in gleichen Abständen vom Schnittpunkt beider Lagen eintreffen.)

---

* Man könnte den obigen Fall auch so behandeln, daß man zuerst eine neue VE durch QO gelegt denkt, hierauf das System um diesen Grundschnitt QO dreht bis die HE mit QOR′ zusammenfällt (Nr. 130, Fig. 49) und zuletzt die vorgeschriebene VE QrR′ (welche behufs der Drehung als Seitenebene gedient hat) einführt. Dabei wären aber die in Fig. 49 vorkommenden Constructionen zur Uebertragung eines Punkts in das gedrehte System nicht alle auszuführen; die Zeichnungen in der durch QO gedachten VE (sowohl vor als nach der Drehung) würden, wie man leicht finden wird, überflüssig sein, und man käme nach Weglassung alles Entbehrlichen genau wieder auf die oben angegebene Construction.

132. Mit Hülfe des hier abgehandelten Systemwechsels ergeben sich für manche der frühern Aufgaben einfache Lösungen. Als Beispiel der Anwendung soll hier die Bestimmung der kürzesten Entfernung zwischen zwei gegebenen Geraden (vgl. Nr. 73) vorgenommen werden.

Diese Aufgabe löst sich sehr leicht in dem besondern Fall, wo die beiden Geraden einer Grundebene parallel sind. Liegen z. B. die V-Projectionen beide parallel zum Grundschnitt, so zeigt der Abstand zwischen diesen Projectionen sogleich die gesuchte Entfernung an, und der Durchschnittspunkt der H-Projectionen ist die gemeinschaftliche H-Projection derjenigen Punkte in beiden Geraden, welche am nächsten beisammen liegen. Haben nun die gegebenen Geraden beliebige Lagen im Raume, so kann man eine zu beiden parallele Ebene als neue HE nehmen; für die zugehörige neue VE braucht man sich an keine weitere Bedingung zu halten, als daß sie zu jener senkrecht ist, weßhalb man die bequemste Lage wählen, d. h. sie senkrecht zur alten HE legen wird.

Es seien (Sa, s′a′), (bc, b′c′) die gegebenen Geraden (Taf. XII, 5). Die durch SA parallel zu BC geführte Ebene SOR′ soll neue HE, die zu SO senkrechte Ebene QrR′ neue VE werden. In der Umklappung der letztern bestimmt man die Projectionen Qa'_2, $b'_2 c'_2$ der beiden Geraden (wobei sich sogleich mehrere Genauigkeitsproben ergeben, indem Qa'_2 mit QR″ zusammenfallen und $b'_2 c'_2 \parallel QR''$ sein muß). Die Größe der verlangten kürzesten Entfernung ist $b'_2\, b'_0$. Von hier an kann man, um die Punkte des kürzesten Abstands auf beiden Geraden selbst zu finden, entweder auf dem ersten oder dem zweiten der in Nr. 131 angegebenen Wege weiter gehen.

1) Verfährt man nach (1), so erhält man $b_2\, c_2$, $S_2\, a_2$ als neue H-Projectionen. Eine aus dem Schnittpunkt derselben auf den Grundschnitt QR″ gefällte Senkrechte liefert im neuen System die V-Projectionen x'_2, y'_2 der gesuchten Punkte, aus denen nun für das ursprüngliche System zuerst die H-Projectionen x, y, dann auch die V-Projectionen x′, y′ sehr leicht gefunden werden.

2) Verfährt nach (2), so wird man nur b_2 (nicht auch b'_2) und ebenso c_2, a_2 bestimmen. Die neuen H-Projectionen Sa_2, $b_2\, c_2$ der gegebenen Geraden schneiden sich in einem Punkte, welcher die gemeinschaftliche neue H-Projection der gesuchten Punkte X, Y ist und (durch eine

aus ihm auf QO gefällte Senkrechte) unmittelbar auf die dem ursprünglichen System entsprechenden H-Projectionen x, y derselben führt.

133. Noch in einem andern besondern Falle lassen sich die nächsten Nachbarpunkte zweier Geraden ohne alle Mühe finden, nämlich dann, wenn eine der Geraden senkrecht auf einer Grundebene steht (während die andere eine beliebige Lage haben kann). Auf diesen besondern Fall kann man durch eine Aenderung des Grundsystems immer zurückkommen, indem man die neue HE senkrecht zur einen Geraden legt; die ursprüngliche h-projicirende Ebene dieser Geraden bildet hiezu die passendste VE.

Bringt man das erste Verfahren der Nr. 131 in Anwendung, so hat man hier gar nicht nöthig, die Spuren der neuen HE zu zeichnen. Es seien (Sa, s'a'), (bc, b'c') die auf dem ursprünglichen Grundsystem $[H_1, V_1]$ gegebenen Geraden (Taf. XII, **6**). Wird die h-projicirende Ebene der SA als neue VE V_2 angenommen, so fällt der zum Zwischensystem $[H_1, V_2]$ gehörige Grundschnitt $\mathfrak{H}_1\mathfrak{V}_2$ mit Sa zusammen. In diesem Zwischensysteme sind ST'_2, $b'_2 c'_2$ die V-Projectionen der gegebenen Geraden. An die Stelle der ursprünglichen HE tritt hierauf eine zu SA senkrechte Ebene H_2; man hat also eine Gerade H_2V_2, welche durch einen beliebigen Punkt A'_2 der ST'_2 senkrecht zu letzterer gezogen wird, als Grundschnitt des Systems $[H_2, V_2]$ zu nehmen und dann die diesem System entsprechende H-Projection $b_2 c_2$ der BC zu bestimmen; die H-Projection der SA ist der mit A'_2 zusammenfallende Punkt x_2. Im neuen System $[H_2, V_2]$ ist jetzt die Linie des kürzesten Abstandes parallel zur HE und projicirt sich in wahrer Länge als eine aus x_2 auf $b_2 c_2$ gefällte Senkrechte $x_2 y_2$; von den V-Projectionen bestimmt sich zuerst y'_2, dann x'_2; diese zugleich dem Zwischensystem $[H_1, V_2]$ angehörigen Projectionen führen auf die in der ursprünglichen HE liegenden Projectionen x, y, aus denen sodann auch die V-Projectionen x', y' im ursprünglichen System sich ergeben. (Proben: $ny = uy_2$; $ny'_2 = wy'$; $xx'_2 = mx'$).

134. Die Aufl. II der in Nr. 87 enthaltenen Aufgabe beruht eigentlich schon auf einer Systemveränderung, nämlich auf Einführung einer neuen VE neben der alten HE. Die Aufl. I kann ebenfalls so aufgefaßt werden, daß dabei ein Systemwechsel zur Anwendung kommt; die dort genannte Ebene S ist als neue HE, die h-projicirende Ebene

der AB als neue VE zu nehmen (und dadurch wird die Aufgabe im Wesentlichen identisch mit der Uebungsaufg. 3 in Nr. 75, indem mit dem Winkel φ mittelbar auch der Winkel der AB gegen die Ebene S gegeben ist).

Die für die Aufgabe der Nr. 72 gegebene Lösung ist (wenn man die Ebene POP′ wie eine neue HE ansieht) nahe verwandt mit dem zweiten Verfahren in Nr. 131 und kann leicht diesem Verfahren völlig angepaßt werden. Greift man aber zu dem ersten Verfahren der Nr. 131, so läßt sich die Zeichnung der Spuren PO, OP′ umgehen (wie in Nr. 133) und es kommt eine sehr einfache Auflösung zu Stande.

Uebergang von einem Grundsystem auf ein beliebig gegebenes neues.

135. Die Lage des neuen Systems kann dadurch gegeben sein, daß man auf dem ursprünglichen System die Spuren der neuen HE und die H-Projection des neuen Grundschnitts kennt.

Geht man vom ursprünglichen System zuerst auf ein System über, welches aus der neuen HE und einer zur alten HE senkrechten VE gebildet ist (Nr. 131), und trägt man die Gerade, welche zum neuen Grundschnitt werden soll, in dieses System ein, so ist nur noch ein Schritt übrig um das verlangte System zu erreichen, nämlich ein nochmaliger Tausch der VE. Hiebei ist es rathsam, sich immer an das erste Verfahren der Nr. 131 zu halten, weil dann die gesammte Arbeit des Uebertragens blos in der öftern Wiederholung einer und derselben Operation (Nr. 125) besteht, nur daß einmal die VE, das andermal die HE geändert wird. Diese Gleichförmigkeit der wiederkehrenden Operationen erleichtert das Einüben und sichert der etwas verwickelten Arbeit wenigstens die Einheit des Gedankens. Um dieser wünschenswerthen Gleichförmigkeit willen ist es ferner zweckmäßig, das Uebertragen einer Ebene, welche mit keiner der alten oder neuen Grundebenen zusammenfällt, auf das Uebertragen von Punkten zurückzuführen, indem man in der Ebene drei Punkte (am besten den im alten Grundschnitt liegenden und je einen Punkt der alten H- und V-Spur) wählt, die Projectionen dieser Punkte im neuen System bestimmt und nöthigenfalls aus diesen Projectionen schließlich die neuen Spuren der Ebene sucht. (Es ist deßhalb schon beim vorigen Uebergangsfalle von der Uebertragung einer Ebene nicht mehr besonders die Rede gewesen.)

Bedeutet $[H_1, V_1]$ das ursprüngliche, $[H_2, V_2]$ das neue System, V_0 eine zu beiden H=Ebenen senkrechte Ebene, so ist der Gang, nach welchem man (durch zwei Zwischensysteme hindurch) vom alten zum neuen System gelangt, durch die Reihenfolge

$$[H_1, V_1] \quad [H_1, V_0] \quad [H_2, V_0] \quad [H_2, V_2]$$

angedeutet. Die Ausführung (mit der Uebertragung eines Punkts A) zeigt Taf. XII, **7**.

In dieser Figur ist jeder Grundschnitt so bezeichnet, daß auf die in ihm sich schneidenden Grundebenen hingewiesen wird. Durch QO, OR' ist die Ebene H_2 auf dem alten System gegeben; Tr ist die urspüngliche H=Projection des neuen Grundschnitts.

136. Es ist übrigens selten, daß durch die Natur einer mittels Systemwechsels zu lösenden Aufgabe die absolute Lage der neuen Grundebenen vorgeschrieben ist; meist sollen sie nur bestimmte Winkel gegen gegebene Gerade oder Ebenen bilden, so daß es gleichgiltig ist in welchen Entfernungen von gewissen Punkten man sie annehmen will.

Zur Uebung kann man einen Punkt in die auf nachfolgende Arten bestimmten Grundsysteme übertragen.

1) Die neue HE soll senkrecht zu einer gegebenen Geraden, die VE parallel einer zweiten Geraden sein.

2) Die neue HE sei auf einer gegebenen Ebene senkrecht und gehe zugleich durch den alten Grundschnitt; die neue VE schließe mit jener gegebenen Ebene einen bestimmten Winkel ein.

3) Die neue HE gehe durch eine gegebene Gerade und habe gegen die alte HE eine bestimmte Neigung; die neue VE sei senkrecht zu jener Geraden.

4) Eine gegebene Gerade soll zum neuen Grundschnitt werden und die neue HE durch einen gegebenen Punkt gehen.

Endlich ist noch zu bemerken, daß häufig nur für eine der Grundebenen irgend eine bestimmte Lage gewünscht wird, während über die zweite nach Belieben verfügt werden kann (wie es z. B. bei der Aufgabe in Nr. 132 und Nr. 133 der Fall war). Man nimmt dann, wie sich von selbst versteht, die VE so, daß der Uebergang möglichst erleichtert wird.

In diesem Falle läßt sich aber auch nicht selten ein Systemwechsel durch ein Umklappen (in etwas erweitertem Sinne) ersetzen. Zeigt sich nämlich, daß die Lösung einer Aufgabe einfach ausfiele wenn eine gewisse Ebene E Grundebene wäre, so kann man diese Ebene E durch Umklappung in eine der ursprünglichen Grundebenen niederlegen und die mit E in Beziehung stehenden Punkte und Linien, welche

man in unveränderlicher Verbindung mit ihr zu denken hat, an der Bewegung des Umklappens Theil nehmen lassen. Es entsteht hier also die Aufgabe:

„für einen gegebenen Punkt B, der mit einer gegebenen Ebene E fest verbunden ist (etwa mittels des aus ihm auf die E gefällten Lothes), die neuen Projectionen (auf dem ursprünglichen Grundsystem) zu suchen, nachdem die Ebene in eine Grundebene umgeklappt worden ist und den Punkt B mitgenommen hat;"

und wenn man einen Punkt auf solche Art zu behandeln weiß, ist man auch im Stande die neuen Projectionen jeder mit E verbundenen Linie zu zeichnen. In Beziehung auf einen Punkt B ist aber diese Aufgabe der Hauptsache nach bereits in (Nr. 131 2) gelöst; denn ist (Taf. XII, 5) QOR' die in die HE umzuklappende Ebene E und QrR' irgend eine zur H-Spur QO senkrechte Ebene, so ist b_2 die H-Projection und $b'_0 b'_2$ die H-Distanz für die neue Lage von B, und es wäre nur noch die V-Projection dieser neuen Lage (auf der ursprünglichen VE) nachzutragen. — Die Rückführung eines Punkts, der zunächst in seiner mit E gedrehten Lage gefunden worden ist, in die der ursprünglichen Stellung von E entsprechende Lage ergibt sich aus Obigem von selbst.

Fünftes Kapitel.

Polygone und Polyeder.

A. Polygon-Projectionen.

137. Die Projectionen eines Polygons sind gegeben, wenn man für jeden Eckpunkt beide Projectionen hat; denn die Projectionen der Seiten ergeben sich durch Verbindung der entsprechenden Eckenprojectionen.

Läßt sich ein Polygon durch eine Diagonale so halbiren, daß je zwei Gegenseiten parallel und gleich sind, so kann es vollständig projicirt werden, sobald man die Projectionen der einen Hälfte kennt; denn von den Projectionen der fehlenden Seiten ist jede mit der Projection einer gegebenen Seite parallel und von gleicher Länge (Nr. 25, Nr. 77). Dieß gilt also insbesondere für alle Parallelogramme und für reguläre Polygone von gerader Seitenzahl.

138. Hat ein Polygon keinen einspringenden Winkel, so kann auch seine Projection keinen einspringenden Winkel haben. Denn angenommen, es projicire sich der ausspringende Winkel ABC als einspringender Winkel abc, so denke man sich die Diagonale AC und ziehe deren Projection ac; dann würden die Winkelspitzen B und b auf entgegengesetzten Seiten der projicirenden Ebene ACca liegen, was unmöglich ist, da das Projectionsloth Bb parallel mit dieser Ebene sein muß.

Kein Winkel eines Polygons kann als Projection einen flachen geben, wenn nicht auch die Projectionen aller übrigen Winkel flach oder Null werden (d. h. wenn nicht die Projection des ganzen Polygons in eine gerade Linie fällt). Denn wäre die Projection des Winkels ABC ein flacher, so würde die projicirende Ebene der Seite AB zugleich durch die Seite BC, mithin auch durch alle übrigen

Seiten gehen, oder die Projectionen sämmtlicher Seiten müßten in der Spur dieser projicirenden Ebene zusammenfallen.

Durch Beachtung dieser Sätze kann man auf Constructionsfehler aufmerksam gemacht werden.

139. Aufg. Zu untersuchen, ob n beliebig gegebene Punkte als Ecken eines Polygons gelten können (d. h. ob sie in einer Ebene liegen).

Aufl. Man betrachte vorläufig die gegebenen Punkte als projicirte Ecken, ziehe von einem derselben nach allen übrigen Diagonalen, und sehe zu, ob diese (oder ihre Verlängerungen) von einer beliebigen andern (nöthigenfalls verlängerten) Diagonale alle geschnitten werden (Nr. 26). Ist dieß der Fall, oder werden alle weniger einer geschnitten und diese eine ist der schneidenden Diagonale parallel, so liegen die gegebenen Punkte in einer Ebene.

140. Aufg. Von einem Polygon ABCD... sind drei Ecken (a, a′), (b, b′), (c, c′) auf beide Grundebenen, die übrigen Ecken nur auf die H-Ebene projicirt. Man soll die fehlenden V-Projektionen d′, e′, ... finden.

Fig. 50. **Aufl.** Statt die Aufgaben der Nr. 50 und 46 zu lösen, verfährt man kürzer wie folgt. Man ziehe die Projectionen der AB, BC, AC und die H-Projection bd der Diagonale BD, welche die Diagonale AC in V schneidet. Aus der H-Projection v dieses Punkts bestimme man die zugehörige V-Projection v′ (Nr. 44), ziehe b′ v′ und suche nach Nr. 44 die V-Projection d′ des Ecks D. Auf dieselbe Weise ergeben sich die V-Projectionen der übrigen Ecken.

Anstatt der Diagonalen kann man auch je zwei verlängerte Seiten benützen, wenn ihr Schnittpunkt nicht in zu große Entfernung fällt. So wird man z. B. den Punkt e′ erhalten, wenn man cb, ea und e′a′ verlängert, die zum Schnitt t gehörige V-Projection t′ angibt, t′ a′ zieht und auf ihrer Verlängerung die zu e gehörige V-Projection bestimmt.

141. Aufg. Aus den gegebenen Projectionen eines Polygons dieses selbst zu zeichnen.

Aufl. Man könnte das Polygon von einem Eck aus durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen, diese Dreiecke aus ihren Seiten construiren (Nr. 66) und zusammensetzen. Einfacher aber ist es, die H-Spur der

Polygonsebene zu bestimmen (Nr. 50) und die Lage sämmtlicher Ecken nach horizontaler Umklappung dieser Ebene zu suchen (Nr. 62).

Sollte das umgeklappte Polygon in unbequeme Entfernung von der H-Spur seiner Ebene fallen (was sich meist schon vor der Bestimmung dieser Spur beurtheilen läßt), so zeichnet man eine in der Ebene des Polygons liegende horizontale Linie und löst für jeden Eckpunkt die Aufgabe der Nr. 65 (d. h. man bringt die HE durch parallele Verschiebung in eine passendere Stellung und behält neben dem neuen Grundschnitt den alten bei. Vergl. Nr. 122).

Hat man in der horizontal umgeklappten Ebene des Polygons die Lage eines Eckpunkts gefunden, so lassen sich die Lagen der übrigen Ecken auch auf folgende Weise (durch Constructionen, welche von den V-Projectionen ganz unabhängig sind) bestimmen. Angenommen, das Polygon sei ein Fünfeck ABCDE; man habe die H-Spur seiner Ebene durch die H-Spuren P, Q der Seiten AB, AE gefunden und in der Umklappung zuerst die Lage A_1 des Ecks A gesucht. Da die Umklappungen B_1 und E_1 in A_1P und A_1Q liegen müssen, erhält man sie sogleich durch Senkrechte aus b und e auf PQ. Die Richtung der H-Projection bc führt auf die H-Spur R der BC; in RB_1 muß C_1 liegen; u. s. f. Fallen die H-Spuren einzelner Polygonseiten in zu große Entfernungen oder schneiden die H-Projectionen solcher Seiten die PQ unter sehr spitzen Winkeln, so ersetzt man die Seiten durch Diagonalen, welche zugleich in andern Fällen zur Controle der genauen Arbeit dienen.

Endlich kann man die wahre Gestalt des Polygons auch noch durch eine Aenderung des Systems finden, indem man die Polygon-Ebene zu einer Grundebene werden läßt (Nr. 131).

142. Aufg. In einer Ebene, welche PO zur H-Spur hat und gegen die H-Ebene unter dem Winkel α geneigt ist, liegt ein Polygon ABC... so, daß es nach horizontaler Umklappung der Ebene in der Lage $A_1 B_1 C_1 \ldots$ erscheint. Man verlangt die Projectionen desselben für die ursprüngliche Stellung der Ebene.

Aufl. Man legt eine neue VE senkrecht zu OP, projicirt auf sie das Polygon, bestimmt mittels dieser V-Projection die H-Projectionen und H-Distanzen der Ecken und geht dann auf die ursprüngliche VE zurück. Ist AQ der neue Grundschnitt, so projicirt sich in diesen das umgeklappte Polygon (z. B. das Eck C_1 nach c′), und nach der Zurück- Fig. 67.

bewegung der Ebene des letztern fallen die V-Projectionen sämmtlicher Ecken in die Gerade Ac', welche mit AQ den Winkel α einschließt. Während jener Bewegung beschreibt der Punkt C_1 einen mit der VE parallelen Kreisbogen, welcher zum Halbmesser die auf OP senkrechte C_1 P hat und dessen V-Projection also der mit Ac' beschriebene Bogen c'c' ist, während die H-Projection in C_1 P fällt. Daher ist c' die Projection von C auf der VE AQ; die H-Projection c ergibt sich nach Nr. 44 und die zugehörige V-Projection auf der ursprünglichen V-Ebene nach Nr. 125. Eben so verfahre man mit den übrigen Ecken und zeichne durch Verbindung der erhaltenen Punkte die Projectionen des Polygons. (Hat man die V-Ebene AQ durch ein Eck A gelegt, wie in der Figur angenommen, so erspart man für dieses Eck das Ziehen der Senkrechten auf AQ).

143. Uebungsaufgaben.

1) In einer gegebenen Ebene ist ein bekanntes Polygon so enthalten, daß die H-Projection ab einer bestimmten Seite AB eine gegebene Richtung und die H-Projection eines dieser Seite entsprechenden Ecks A eine gegebene Lage a hat; zugleich ist bestimmt, auf welche Seite von ab die H-Projection eines andern Ecks C fällt. Man soll die Projectionen des Polygons zeichnen.

2) Für jedes Eck eines in einer gegebenen Ebene liegenden Polygons kennt man die Entfernungen von den Spuren der Ebene; man soll das Polygon projiciren. (Dabei ist vorausgesetzt, daß das Polygon ganz oberhalb der HE und vor der VE liege.)

144. Aufg. Die Projectionen eines Dreiecks ABC sind gegeben. Nachdem das Dreieck in seiner wahren Gestalt gezeichnet worden ist, wird dasselbe zu einem größern Polygon (z. B. dem Fünfeck ABCDE) ergänzt, und es sollen nun auch die Projectionen in entsprechender Weise ergänzt werden.

Aufl. Durch Umklappung der Dreiecksebene würde die Aufgabe auf die in Nr. 142 zurückkommen. Es soll aber angenommen werden, diese Umklappung sei (wegen Mangel an Raum) nicht ausführbar und das wahre Dreieck ABC sei aus seinen drei Seiten auf einem Nebenblatte construirt worden, auf welches man sich auch mit den weiteren

Constructionen angewiesen sieht. Unter diesen Umständen bietet sich folgende Lösung dar.

Zieht man von B nach einem andern Eck D eine Diagonale, welche die AC in V schneidet, so wird man die H-Projection v des Punkts V erhalten, wenn man ac in v so theilt, daß Fig. 50.

$$av : vc = AV : VC \text{ (Nr. 28)};$$

die zugehörige V-Projection v' nach Nr. 44. Nachdem die Projectionen der BD der Richtung nach gezogen sind, setzt man an bv ein Stück vd so an, daß

$$dv : vb = DV : VB;$$

dann ist d die H-Projection von D und die V-Projection d' folgt wie vorhin. Auf dieselbe Weise gelangt man zu den Projectionen des Ecks E (oder aller übrigen Ecken, wenn deren mehr als fünf an dem ergänzten Polygon vorkommen).

145. Aufg. Die H-Projection abc eines Dreiecks ABC, die wahre Größe der Winkel an A und B und ein Punkt der Dreiecksebene sind gegeben. Man soll die Lage dieser Ebene finden. Fig. 51.

I. Auflösung für den besondern Fall, wenn W. c $= 90^0$ und zugleich W. A + W. B $= 90^0$ (also auch W. C $= 90^0$) ist.

Da ein rechter Winkel sich nur dann wieder als rechter Winkel projiciren kann, wenn einer seiner Schenkel der Grundebene parallel ist (Nr. 87, Zus. 1), so muß eine von den Seiten AC, BC horizontal liegen, mithin einerlei Länge mit ihrer H-Projection haben. Um entscheiden zu können, welche diese horizontale Seite sei, mache man

W. $ba\gamma$ = W. A

und W. $ab\gamma$ = W. B,

so daß $\triangle\, ab\gamma \sim \triangle\, ABC$.

Ist nun $ac < a\gamma$, so kann nicht AC $\#$ ac sein; denn es wäre dann

$AC < a\gamma$, also auch

$AB < ab$, was unmöglich (Nr. 30).

Daher ist $BC = bc$, und diese Annahme kann nicht zum zweitenmale auf einen Widerspruch führen; denn ist

$ac < a\gamma$, so ist (wenn man $c\gamma$ zieht)

W. $a\gamma c$ < W. $ac\gamma$,

also W. $b\gamma c$ > W. $bc\gamma$,

oder $bc > b\gamma$.

Sucht man die wahre Länge von AC und nimmt sie zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Kathete ac ist, so zeigt der an dieser Kathete liegende spitze Winkel des Dreiecks die Neigung der Ebene ABC gegen die HE. Man führe nun durch bc eine Ebene unter dieser H-Neigung (Nr. 80, 1) und durch den gegebenen Punkt eine Parallelebene zu ihr, so ist diese die verlangte. (Da die Ebene durch bc zwei verschiedene Lagen annehmen kann, so ergeben sich immer zwei Auflösungen).

II. Allgemeine Auflösung.

Fig. 51. Man mache

$$\text{W. } ba\gamma = \text{W. } A, \qquad \text{W. } ab\gamma = \text{W. } B,$$

denke sich in v einen beliebigen Punkt V der Seite AB projicirt und ziehe vc, vγ, so ist △ acv die Projection und aγv die Gestalt des Dreiecks ACV. Denn es ist

$$\triangle a\gamma b \backsim \triangle ACB,$$

oder $ab : a\gamma = AB : AC$;

ferner $\underline{av : ab = AV : AB}$ (Nr. 28);

also $av : a\gamma = AV : AC$,

und da zugleich $\text{W. } va\gamma = \text{W. } VAC$,

so ist $\triangle a\gamma v \backsim \triangle ACV$.

Nimmt man auf ab (oder ihrer Verlängerung) noch einen zweiten Punkt w als Projection eines in der Richtung von AB liegenden Punktes W, so ist aus denselben Gründen vγw die Gestalt des Dreiecks VCW, und vcw dessen Projection. Kann man nun die Ebene dieses letztern Dreiecks VCW finden, so ist die Aufgabe gelöst, da △ ABC in derselben Ebene liegt. Man wähle daher v und w so, daß

$$\text{W. } v\gamma w = \text{W. } vcw = 90^0$$

und wende nun die oben für diesen besondern Fall gelehrte Auflösung an.

Zusatz. Jene vortheilhaften Lagen der Punkte c und w erhält man als Schnittpunkte der ab und des Kreises, welcher durch c und γ geht und seinen Mittelpunkt o in ab hat. Ein solcher Kreis ist immer möglich (und leicht zu finden), den einzigen Fall ausgenommen, wenn

$$\gamma c \perp ab \qquad \text{und zugleich} \qquad \gamma n \gtreqless nc$$

ist; denn dann läuft die Gerade mo, welche cγ senkrecht halbirt und durch ihren Schnitt in ab den Mittelpunkt o angeben soll, mit ab parallel. In diesem Falle bedarf man aber auch der Punkte v und w nicht. Denn es ist wieder anγ die Gestalt des in anc projicirten Dreiecks ANC, welches die CN vom Dreieck ABC abschneidet; und da die Projection

des rechten Winkels an N ebenfalls ein rechter ist, so ist die Spur der Ebene ABC entweder parallel mit ab (wenn $cn < n\gamma$) und ihre H=Neigung ergibt sich durch Vergleichung der Längen NC ($= n\gamma$) und nc (wie in I); oder die Spur ist parallel mit $c\gamma$ (wenn $cn > n\gamma$) und die H=Neigung findet man aus AN und an.

Ist $\gamma c \perp ab$ und zugleich $\gamma n = nc$, so würde man unendlich viele Kreise von der oben erklärten Beschaffenheit beschreiben können. Man hat aber keinen derselben nöthig; denn es ist dann

$$\triangle ab\gamma \cong \triangle abc,$$

also auch $\triangle ABC \cong \triangle abc$,

und die gesuchte Ebene des Dreiecks ist parallel zur HE.

146. Uebungsaufgaben.

1) Ggb.: Die Gestalt und Größe eines Dreiecks ABC, die Gestalt seiner H=Projection, die V=Projection eines Ecks A und die Richtung, in welche die H=Projection der Seite AB fällt. Ges.: Die vollständigen Projectionen des Dreiecks.

2) Für ein bekanntes Parallelogramm eine Lage zu finden, in welcher es sich auf die HE als ein Quadrat projicirt.

147. Lehrsatz.

Der Flächeninhalt der Projection eines Polygons ist das Product aus dem Flächeninhalte des wahren Polygons in den Cosinus der Grundneigung α seiner Ebene.

Beweis.

I) Ist das Polygon ein Dreieck ABC, dessen Seite AB der GE parallel ist, so projicirt sich diese Seite in wahrer Größe. Betrachtet man sie daher als Basis, so verhält sich das Dreieck zu seiner Projection wie seine Höhe H zur Höhe h dieser Projection, wobei zugleich in die Augen fällt, daß h nichts anderes sein kann, als die Projection von H. Da nun die Spur der Dreiecksebene der Seite AB parallel, also auf H senkrecht ist, so ist

$$\frac{h}{H} = \cos\alpha \quad \text{(Nr. 78, Zus.)},$$

und mithin $\triangle abc = \triangle ABC \cos\alpha$.

II) Ein beliebig gegebenes Dreieck F läßt sich durch eine mit der GE

parallele Gerade in zwei Dreiecke D_1, D_2 zerlegen. Nach dem Vorigen ist (wenn f, d_1, d_2 die Projectionen von F, D_1, D_2 bezeichnen)

$$d_1 = D_1 \cos\alpha$$
$$d_2 = D_2 \cos\alpha$$

also
$$d_1 + d_2 = (D_1 + D_2) \cos\alpha$$

oder
$$f = F \cos\alpha.$$

III) Jedes andere Polygon P zerfällt durch Diagonalen in Dreiecke $F_1, F_2, F_3, \ldots$. Sind p, $f_1, f_2, f_3, \ldots$ die Projectionen des Polygons und der Dreiecke, so hat man (nach II):

$$f_1 = F_1 \cos\alpha$$
$$f_2 = F_2 \cos\alpha$$
$$f_3 = F_3 \cos\alpha$$
$$\vdots$$

also
$$f_2 + f_1 + f_3 + \ldots = (F_1 + F_2 + F_3 + \ldots) \cos\alpha$$

oder
$$p = P \cos\alpha.$$

B. Polyeder-Projectionen.

148. Ein Polyeder ist völlig gegeben, wenn man die Projectionen jedes einzelnen Ecks kennt und zugleich weiß, wie die Ecken paarweise (als Endpunkte je einer Kante) zusammengehören. Die Länge einer Kante oder Diagonale läßt sich nach Nr. 66 finden; die Gestalt und Größe einer Seite nach Nr. 141 (wobei man jedoch, wenn mehrere Seiten nach einander zu bestimmen sind und keine Kante derselben in der Grundebene liegt, sich an die erste der dort genannten Methoden hält und blos die in Nr. 66, II vorkommenden Constructionen benützt); die Größe eines Winkels * nach Nr. 102 (oder, wenn die Winkel zwischen den Kanten schon zuvor bekannt sind, nach Nr. 109).

Um das Netz eines Polyeders, dessen Projectionen bekannt sind, zu zeichnen, construirt man sämmtliche Seiten und legt sie mit entsprechenden Kanten in einer Ebene aneinander.

149. Insofern die Projection eines Körpers immer ein klares Bild desselben hervorrufen soll, kann man der Anschauung auf eine

* Der Winkel eines Polyeders ist die Neigung zwischen den Ebenen zweier benachbarten (d. h. in einer Kante zusammenhängenden) Seiten, und muß wohl unterschieden werden von dem Winkel einer Polyederseite (der Neigung zwischen benachbarten Kanten).

wirksame Weise dadurch zu Hülfe kommen, daß man in der Zeichnung diejenigen Kanten, welche dem Auge unmittelbar sichtbar wären, von jenen unterscheidet, welche erst durch die Seitenflächen hindurch gesehen werden müßten, wenn nämlich für jeden einzelnen Punkt das Auge in der Richtung seines projicirenden Lothes gedacht wird, und zwar in einer Entfernung von der Grundebene, welche die Distanz des am weitesten von letzterer abstehenden Ecks übertrifft. Die Projectionen solcher Kanten, welche durch Seitenflächen verdeckt sind, werden punktirt angegeben. (Diese punctirten Kanten dürfen aber nicht mit solchen Projectionen verwechselt werden, welche ihrer Lage auf der hintern HE oder untern VE wegen punktirt gezeichnet sind.)

150. Zur Lösung der Aufgabe: ein Polyeder in gegebener Stellung zu projiciren, sind zweierlei Bestimmungsstücke erforderlich; nämlich 1) diejenigen Stücke, durch welche das Polyeder an sich im Raume bestimmt wird, und 2) die nöthigen Angaben, aus denen seine Stellung gegen die Grundebenen erhellt. Hiernach kann man die Auflösung selbst in zwei Theile trennen, indem man den Körper zunächst mittels der erstern Bestimmungsstücke auf ein beliebiges, möglichst bequem gewähltes Grundsystem projicirt, und ihn dann erst in die vorgeschriebene Stellung gegen dieses System bringt, wozu später (Nr. 172) die Mittel an die Hand gegeben werden sollen.

In den nachfolgenden Beispielen ist die Wahl des Grundsystems freigegeben. Auch soll für den darzustellenden Körper nur die H-Projection sammt den H-Distanzen der einzelnen Ecken gesucht werden; die Projection auf einer beliebigen VE läßt sich dann leicht nach Nr. 43 beibringen.

151. Aufg. Drei von demselben Eck ausgehende Kanten AB, AC, AD eines Parallelepipeds sind gegeben und die drei Winkel zwischen ihnen. Man soll das Parallelepiped projiciren.

Aufl. Man wähle die Ebene zweier gegebener Kanten AB, AC Fig. 52.
zur HE, lege in ihr die drei Winkel aneinander, und schneide auf den Schenkeln die Stücke AB, AC, $AD_1 = AD_{,,} = AD$ ab. Werden dann die Ebenen BAD_1 und $CAD_{,,}$ um AB und AC gedreht, bis AD_1 mit $AD_{,,}$ in AD zusammenfällt, so ergibt sich die Projection d des Ecks D als Schnitt der beiden Senkrechten, welche man von D_1

und $D_{,,}$ auf AB und AC fällt. Die Projectionen der übrigen Kanten kann man sogleich zeichnen, da sie den Linien AB, AC, Ad gleich und parallel sind.

Die vier nicht in der HE liegenden Ecken haben einerlei H-Distanz Dd, welche man als Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks erhält, zu dessen beiden andern Seiten entweder vd und vD_1, oder Ad und AD_1 genommen werden.

152. Aufg. Eine Pyramide zu projiciren, wenn ihre Basis ABC..., die an AB liegende Seite und die Neigung φ dieser Seite gegen die Basis gegeben sind.

Fig. 53. **Aufl.** Nimmt man die Ebene der Basis als HE und construirt über AB die gegebene Seite in Umklappung, so fällt die H-Projection s der Spitze S in die auf AB senkrechte S_1 v, und ihre Lage ist bestimmt, sobald man die Entfernung vs kennt. Um diese zu finden, construirt man das Dreieck Ssv (aus der Hypotenuse S_1 v und dem an vs liegenden Winkel φ), welches dann zugleich in Ss die H-Distanz der Spitze S liefert.

(Wie erhält man am leichtesten das Netz der Pyramide?)

153. Aufg. Eine schiefabgestumpfte Pyramide zu projiciren, wenn gegeben ist ihre Basis ABCD, die an AB liegende Seite ABFE, und von der an AD liegenden Seite ADHE die Winkel α und ε bei A und E.

Fig. 54. **Aufl.** Als HE gelte die Ebene der Basis.

Man construire über AB die Umklappung ABF_1E_1 der Seite ABFE, mache

$$\text{W. } DAE_{,,} = \alpha,$$
$$AE_{,,} = AE_1$$
$$\text{W. } AE_{,,}H_{,,} = \varepsilon$$
$$E_1 e \perp AB$$
$$E_{,,}e \perp AD,$$

so erhält man die Projection e von E, die H-Spur P von FE, die H-Spur Q von EH, also auch die Richtungen Pe und Qe für die Projectionen von EF und EH. Fällt man $F_1 f \perp AB$, so schneidet diese die verlängerte Pe in der Projection f von F. Mittels der Kantenprojectionen Ae und Bf findet man die Projection s der Spitze der ergänzten Pyramide, und mit Hülfe dieses Punktes s die Richtungen sC, sD

für die Projectionen der Kanten CS und DS. Der Schnitt h von Ds und Qe ist die Projection des Ecks H. Nun bleibt nur noch das Eck G zu suchen übrig, welches der Schnitt der Ebene EFH mit der Kante CS ist. Die Spur der Ebene EFH ist PQ; die Ebene selbst wird durch die Ebene CDS nach einer Geraden geschnitten, welche durch H geht und ihre Spur in R hat, also nach Rh sich projicirt, und die verlängerte Rh schneidet die Cs in der Projection g des gesuchten Ecks; hg und gf sind die Projectionen der noch übrigen Kanten. (PQ, BC und fg müssen in einem Punkte T zusammentreffen; denn T ist die Spur der Geraden FG, nach welcher sich die Ebenen BCS und EFGH schneiden.)

Die H-Distanz Ee des Ecks E ergibt sich, wenn man das Dreieck EeA oder das Dreieck Eev construirt. Hat man mit ihrer Hülfe den Punkt E auf eine beliebige VE projicirt, so erhält man leicht die V-Projectionen der Linien PF und QE, also auch der Punkte E, F, H. Die V-Projection des Punktes G kann man nach Nr. 140 suchen, oder mit Hülfe der V-Projection von CS.

(Für die ausgeführte V-Projection des Körpers ergeben sich mehrere Genauigkeitsproben, deren Aufzählung überflüssig scheint.)

Zusatz. Das Netz des Körpers kann man entwerfen, ehe man noch die V-Projection bestimmt hat. Die Seiten ABCD und ABF_1E_1 sind unmittelbar gegeben. In der umgeklappten Seite ADH,,E,, fehlt nur noch der Punkt H,,, den man aber findet, wenn man hH $\perp$ AD fällt. Um die Umklappung der Seite CDHG zu erhalten, fange man mit dem Punkte H an, der sich in eine aus h auf CD gefällte Senkrechte so umklappt, daß seine Lage H_1 von D die Entfernung DH,, hat; dann ist RH_1 die Richtung der umgeklappten Seite HG, und die Umklappung von G ist der Schnitt der RH_1 mit der Senkrechten auf CD aus g. Dadurch ist die Länge der Kante CG gefunden, welche man nun benützen kann, um die Lage G,, des Punktes G in der Umklappung von BCGF zu erhalten, indem man aus C mit der Länge CG eine von g auf BC gefällte Senkrechte durchschneidet. Mittels einer Senkrechten auf BC aus f und der Länge BF_1 findet man ebenso die Lage F,, des Punktes F in dieser Umklappung. (Bei genauer Zeichnung geht F,,G,, durch T.) — Endlich hat man noch das Viereck EFGH zu zeichnen, von welchem vorläufig die vier Seiten bekannt sind. Zieht man durch g eine Parallele mit der Spur PQ, bis eine projicirte Seite ef in i geschnitten wird, so ist gi die wahre Länge der in der Ebene des

Vierecks gezogenen Linie GJ. Die Lage J_1 des Punkts J in der Umklappung $F_1 E_1$ ergibt sich mit Hülfe der auf AB senkrechten iJ_1. Wenn man nun über $F_1 J_1$ mit den Linien FG und gi ein Dreieck beschreibt, so erhält man am Punkte F_1 den Winkel EFG und kann eine dem Viereck EFGH congruente Figur über $E_1 F_1$ leicht vollenden.

154. Aufg. An einem Dreikant, dessen Seiten bekannt sind, wird jede Kante in gegebener Entfernung von der Spitze durch eine Ebene senkrecht geschnitten; und zwar haben diese Entfernungen solche Verhältnisse zu einander, daß der gemeinschaftliche Punkt der drei Schnittebenen innerhalb des Dreikants liegt. Man projicire den Körper, der von den sechs vorhandenen Ebenen begrenzt wird, und entwerfe sein Netz.

Fig. 55. **Aufl.** Die Seiten des Körpers sind sechs Vierecke, deren jedes zwei rechte Winkel einander gegenüber enthält. Das durch die Schnittebene eingeschlossene Dreikant ist das Supplementardreikant des gegebenen (vgl. Nr. 107).

Wählt man eine Seite ASB des gegebenen Dreikants zur HE, klappt in diese die beiden andern Seiten ASC und BSC um, trägt auf den Kanten die gegebenen Entfernungen SA, SB, $SC_1 = SC_{\prime\prime}$ ab, und errichtet aus A, B, C_1, $C_{\prime\prime}$ Senkrechte auf SA, SB, SC_1, $SC_{\prime\prime}$, so werden sich drei von den sechs Vierecken bilden, die den Körper einschließen sollen. Nun drehe man die umgeklappten Seiten ASC_1 und und $BSC_{\prime\prime}$ um SA und SB, bis sich C_1 und $C_{\prime\prime}$ in C vereinigen, bestimme die Projection c des Ecks C und die Projection Sc der Kante SC. Die Projectionen d und e der Punkte D und E fallen in die Geraden AF und BF, und bestimmen sich daher, wenn man die Projectionen der Linien CD und CE zieht, was durch Verbindung ihrer Spuren P und Q mit der Projection c geschehen kann.* Hiemit ist die H-Projection des Körpers schon vollendet; denn die auf SA und SB senkrecht

* Liegt eine dieser Spuren, z. B. P, in unbequemer Entfernung, so ziehe man AC_1, SD_1 und Ac (als Projection von AC). Ist X der Schnittpunkt der AC_1 und SD_1, so findet man die Projection x, welche ihm nach der Zurückbewegung der Seite SAD_1C_1 entspricht, als Durchschnitt der Ac und einer aus X auf SA gefällten Senkrechten. Nun zieht man Sx und verlängert sie bis an AF, wodurch man die Projection d erhält.

stehenden Seiten projiciren sich in die Geraden AF und BF, und ihre gemeinschaftliche Kante FG hat zur Projection den Punkt F (g); also ist egdc die Projection der sechsten (auf SC senkrechten) Seite.

Das Netz des Körpers ist zur Hälfte bereits vorhanden; um es zu ergänzen, hat man die Seiten AFGD, BFGE umzuklappen und an eine dieser Umklappungen die Seite EGDC anzufügen. Das Viereck AFGD ist bei F und D rechtwinkelig; seine Umklappung $AFG_{,,}D_{,,}$ wird daher gefunden, wenn man die Umklappung $D_{,,}$ des Punktes D sucht (indem man die auf Ad senkrechte $dD_{,,}$ von A aus mit AD_1 durchschneidet) und W. $AD_{,,}G_{,,}$ = W. $AFG_{,,} = 90^0$ macht. Aehnlich kann man die Umklappung BFG_1E_1 des Vierecks BFGE suchen (und dann muß $FG_1 = FG_{,,}$ sein). Das letzte Viereck $E_1 G_1 D_3 C_3$ des Netzes (welches ≅ EGDC ist) muß bei E_1 und D_3 rechtwinkelig sein, und seine Seiten haben der Reihe nach die Längen $E_1 G_1$, $D_{,,}G_{,,}$, $D_1 C_1$, $C_{,,}E_{,,}$; man kann es demnach leicht zeichnen (und hat zugleich eine Genauigkeitsprobe, da eine Angabe mehr vorhanden als zu seiner Construction nöthig).

Die H-Distanzen der Punkte D, E, G sind $D_{,,}d$, E_1e, G_1g; die H-Distanz des Punkts C ist aus C_1v und cv zu finden.*

155. Aufg. Den Körper zu projiciren, welcher sich bildet, wenn man durch jede Kante eines gegebenen Würfels eine Ebene senkrecht zur entsprechenden Diagonalebene legt.

Aufl. Je vier Ebenen, welche durch die Kanten einer und derselben Würfelseite gehen, müssen sich in einem Punkte schneiden, weil sie gegen diese Seite einerlei Neigung (von 45°) haben, und die Projection dieses Punkts auf die Würfelseite fällt in den Mittelpunkt derselben. Legt man daher die HE parallel zu den Seiten $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ des Würfels, so daß sich dieser als ein Quadrat projicirt, so geben die Diagonalen des Quadrats die Projectionen von acht Kanten des neuen Körpers, deren vier von den Punkten A nach dem Punkte U, und vier von den Punkten B nach O gehen. Indem die acht Ebenen, welche zu vieren in O und U zusammenkommen, von den vier durch die Würfelkanten A_1B_1, A_2B_2,.... geführten Ebenen geschnitten werden, entstehen die übrigen Kanten des Fig. 56.

* Ein aus dem Netze hergestelltes Modell des Körpers kann zur Erläuterung der in Nr. 107 angestellten Betrachtungen dienen.

neuen Körpers, an Zahl 16, und von diesen müssen sich je vier in eine gerade Linie mm projiciren, weil die Ebene, in welcher sie liegen, vertical steht. Zugleich bildet jede solche Gerade mit den Kanten des Quadrats $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ gleiche Winkel, läuft also mit einer Diagonale parallel. (Sowie in den Punkten O und U, so kommen auch in jedem der Punkte M vier Kanten zusammen. Die Punkte M haben einerlei H-Distanz.)

Geht die HE durch das Eck U des Körpers, so fällt die V-Projection u′ desselben in den Grundschnitt, und die H-Distanzen aller übrigen Ecken lassen sich unmittelbar auf der Geraden $m_1\,m_3$ ablesen. Denn die Projection des Körpers auf einer zu $A_1\,A_2\,B_2\,B_1$ parallelen VE ist offenbar der H-Projection congruent; denkt man sich daher über einem zu $a_1\,a_2$ parallelen Grundschnitt die als H-Projection erhaltene Figur noch einmal gezeichnet, und zwar so, daß $m_1\,m_3 \perp$ GS, so hat man die V-Projection; (nur die Bezeichnung der Punkte in dieser zweiten Figur wird eine andere sein, indem z. B. an die Stelle von m_1 der Buchstabe u′ und an die Stelle von m_3 der Buchstabe o′ tritt;) und man sieht, daß die Stücke der Linie $m_1\,m_3$ (oder u′o′) die H-Distanzen der verschiedenen Ecken in folgender Weise angeben:

$m_1\,v$	zeigt die H-Distanz der Punkte	A
$m_1\,o$	" " " " "	M
$m_1\,w$	" " " " "	B
$m_1\,m_3$	" " " des Punktes	O

Zusatz. Der Körper hat 12 unter sich congruente Seiten, 24 gleichlange Kanten, 14 Ecken. An den 8 Ecken A und B, welche zugleich dem zu Grunde liegenden Würfel angehören, liegen dreikantige — an den übrigen Ecken vierkantige Raumecke. Jede Seite ist ein Rhombus, welcher als eine Diagonale die Würfelkante hat und dessen zweite Diagonale der Diagonale der Würfelseite gleich ist. Die drei Körperdiagonalen zwischen je zwei vierkantigen Raumecken sind gleich und halbiren sich senkrecht im Mittelpunkte des Würfels. Die vier Diagonalen zwischen dreikantigen Raumecken sind ebenfalls unter sich gleich und halbiren sich gegenseitig im Mittelpunkte des Würfels.

Das Netz ist leicht zu fertigen.

Reguläre Polyeder.

156. Ein Polyeder heißt regulär, wenn alle seine Seiten congruente reguläre Polygone und seine sämmtlichen Raumecke unter sich

congruent sind. Mithin sind alle Kanten und alle Winkel eines solchen Polyeders gleich. — Die Stereometrie beweist, daß fünf reguläre Polyeder (Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Hexaeder, Dodekaeder) wirklich existiren, und nur diese.

Aufgaben.

Die fünf regulären Polyeder bei gegebener Kante zu projiciren, wenn sie mit einer Seite in der HE liegen.

Das Tetraeder.

157. Drei Ecken A_1, A_2, A_3 liegen in der HE und bestimmen hier ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite die Tetraederkante ist. Werden die drei andern Dreiecke aus ihrer horizontalen Umklappung zurückbewegt, so bleiben die Projectionen ihrer Spitzen in den Geraden, welche die Seiten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ senkrecht halbiren; nach Vereinigung dieser Spitzen zum vierten Eck des Tetraeders fällt daher die gemeinschaftliche Projection b in den Vereinigungspunkt der drei Halbirungslinien, d. h. in den Mittelpunkt des Dreiecks A_1 A_2 A_3 *. Hiernach ist die H-Projection des Tetraeders leicht herzustellen. Fig. 57.

Die H-Distanz der Punkte A ist = 0; die H-Distanz $B_0 b$ des Punkts B erhält man durch Umklappung des rechtwinkeligen Dreiecks $A_1 B b$; oder als Kathete eines andern Dreiecks, welches zur zweiten Kathete die Entfernung $b v$ der Projection b von $A_1 A_2$ und zur Hypotenuse die Höhe $A_3 v$ der Tetraederseite hat.

Das Hexaeder.

158. Die H-Projection ist ein über der gegebenen Kante construirtes Quadrat. Vier Ecken haben zur H-Distanz die Kante; die H-Distanz der übrigen ist = 0.

Das Oktaeder.

159. Es sei $A_1 A_2 A_3$ die Seite, mit welcher das Oktaeder in der HE liegt. Denkt man sich die drei benachbarten Seiten $A_1 A_2 B_3$, Fig. 58.

* Einen wirklichen Mittelpunkt (d. h. einen Punkt, welcher jede durch ihn gelegte und vom Umfang der Figur begrenzte Gerade halbirt) haben unter den regulären Polygonen nur die von gerader Seitenzahl; er fällt mit dem Mittelpunkt des ein- und des umbeschriebenen Kreises zusammen. Zur Abkürzung aber erlaubt man sich, den Mittelpunkt dieser Kreise auch bei ungerader Seitenzahl eines regulären Polygons als Mittelpunkt des letztern zu bezeichnen.

$A_2 A_3 B_1$, $A_3 A_1 B_2$ aus ihrer horizontalen Umklappung so weit aufgerichtet, daß jede mit $A_1 A_2 A_3$ den Winkel des Oktaeders einschließt, so hat man im Raume die Hälfte der Oktaederoberfläche construirt, und es ist leicht zu zeigen, daß 1) die Projectionen $A_1 A_2 b_3$, $A_2 A_3 b_1$, $A_3 A_1 b_2$ jener an $A_1 A_2 A_3$ liegenden Seiten unter sich congruent sein müssen; 2) daß jede dieser Projectionen ein gleichschenkeliges Dreieck ist; und 3) daß die Ecken B einerlei H-Distanz haben, also die Ebene $B_1 B_2 B_3$ der HE parallel ist. Die zweite Hälfte des Oktaeders ist der ersten congruent; statt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ tritt hier das Dreieck $B_1 B_2 B_3$ auf, und an dieses schließen sich wieder die drei Nachbardreiecke $B_1 B_2 A_3$, $B_2 B_3 A_1$, $B_3 B_1 A_2$ unter dem Winkel des Oktaeders an. Betrachtet man daher die Ebene $B_1 B_2 B_3$ als horizontale Grundebenen, so hat man für die Projection ganz denselben Fall, wie vorhin; und da sich die Projectionen aus der Ebene $B_1 B_2 B_3$ auf die ursprüngliche HE unverändert übertragen, so sieht man, daß die Dreiecke $b_1 b_2 A_3$, $b_2 b_3 A_1$, $b_3 b_1 A_2$ den Projectionen der an $A_1 A_2 A_3$ liegenden Dreiecke congruent sind. In der Figur $A_1 b_3 A_2 b_1 A_3 b_2$ sind daher alle Seiten und Winkel gleich, oder sie ist ein reguläres Sechseck. Die H-Projection des Oktaeders läßt sich hiernach sehr leicht zeichnen.

Die H-Distanz der Punkte A ist $= 0$. Die H-Distanz der Punkte B kann man als Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks finden, welches zur Hypotenuse die Höhe $A_1 v$ der Oktaederseite und zur zweiten Kathete die Projection $b_1 v$ dieser Höhe hat.

Das Dodekaeder.

Fig. 59. **160.** Man stelle sich die Oberfläche des in Fig. 59 projicirten Dodekaeders aus zwei Hälften zusammengesetzt vor, deren untere aus dem Fünfeck $A_1 A_2 \ldots A_5$ und den fünf angrenzenden besteht, deren andere eben so durch das Fünfeck $B_1 B_2 \ldots B_5$ und die angrenzenden gebildet wird. Beide Hälften sind congruent. Betrachtet man zunächst blos die untere Hälfte, so ist leicht zu beweisen, daß in dem Zehneck $u_1 o_4 u_2 \ldots$ alle Seiten gleiche Länge haben, die Winkel o unter sich gleich sind, und eben so die Winkel u. Nimmt man die obere Hälfte hinzu, so fällt in die Augen, daß die Ebene $B_1 B_2 B_3 \ldots$ der HE parallel ist; denn die Punkte O haben einerlei H-Distanz und zugleich einerlei Abstand von der Ebene $B_1 B_2 B_3 \ldots$; daher sind die Projectionen beider Hälften congruent, oder im Zehneck $u_1 o_4 u_2 \ldots$ sind die Winkel o den

Winkeln u gleich, d. h. das Zehneck ist **regulär**. Diese Bemerkung leitet ferner darauf, daß auch das durch die Punkte A und b bestimmte Zehneck regulär ist, welches mit jenem concentrisch und so liegt, daß die Seiten des einen den Seiten des andern parallel sind.

Um nun die H-Projection des Körpers wirklich herzustellen, beginne man mit dem Fünfeck A, zeichne dann das Fünfeck b, und suche einen Punkt des Zehnecks $u_1 o_4 u_2 \ldots$ zu erhalten (durch welchen dann dieß Zehneck selbst völlig bestimmt ist). Man weiß, daß z. B. der Punkt u_1 in der Geraden $b_1 c A_1$ und u_2 in der $b_2 c A_2$ liegen muß, und daß $u_1 u_2 = A_5 A_3$ ist (denn die Diagonale $U_1 U_2$ ist $\parallel A_1 A_2$, d. h. $\parallel$ HE, projicirt sich mithin in unverkürzter Größe); und dadurch wird man auf ein einfaches Verfahren zur Auffindung der Punkte u_1 und u_2 geführt. Ein anderes Verfahren wäre folgendes: Zeichnet man das an $A_1 A_2$ liegende Fünfeck in horizontaler Umklappung, so kommt der in u_1 projicirte Punkt nach U_0 zu liegen; die Projection u_1 liegt deshalb in der aus U_0 auf $A_1 A_2$ gefällten Senkrechten $U_0 M$, ist mithin deren Schnitt mit $c A_1$. Um die Gerade $U_0 M$ zu erhalten, kann man den Punkt U_0 (also auch das umgeklappte Fünfeck) ganz entbehren; denn sie geht offenbar auch durch den Punkt A_5. Es läßt sich aber selbst die Construction des rechten Winkels umgehen, wenn man sieht, daß $A_5 M$ zugleich durch b_3 geht; und daß dieß wirklich der Fall sei, zeigt sich so: Im Zehneck $A_1 b_4 A_2 \ldots$ ist

$A_4 b_4 \perp A_1 A_2$, und zugleich

$A_4 b_4 \parallel A_5 b_3$, also

$A_5 b_3 \perp A_1 A_2$.

(Man kann ferner leicht beweisen, daß $u_1 o_3 = c A_2$ und $A_1 b_4 = A_1 u_1$.)

Die H-Distanz Oo der Punkte O findet man als Kathete des rechtwinkeligen Dreiecks, dessen andere Seiten $o_1 v$ und $v A_1$ sind; zugleich zeigt der Außenwinkel dieses Dreiecks, welcher der gefundenen Kathete gegenüber liegt, die Größe des Dodekaederwinkels. Die H-Distanz Uu der Punkte U ergibt sich auf ähnliche Weise mittels der Linien $A_1 u_1$ und $A_1 A_2$ oder der Linien vr und vw. Da die Punkte U von der Ebene $B_1 B_2 B_3 \ldots$ dieselbe Entfernung haben wie die Punkte O von der HE, so ist Uu + Oo die H-Distanz der Punkte B.

Das Ikosaeder.

161. In jedem Eck des Ikosaeders kommen fünf Dreiecke zu- Fig. 60.
sammen und bilden eine Pyramide, deren Basis ein über der Körper-

kante beschriebenes reguläres Fünfeck ist. Drei solche Fünfecke grenzen mit ihren Kanten an das in der HE liegende Dreieck $A_1 A_2 A_3$ und haben einerlei H-Neigung (denn jedes der Dreikante, deren Spitzen die drei Punkte A sind, hat zwei gleiche Seiten, also auch zwei gleiche Winkel); daher sind die Projectionen dieser Fünfecke congruent. Die Ecken b der Projectionen liegen in den Geraden, welche die Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ senkrecht halbiren, und haben gleiche Entfernung von diesen Seiten; und da das Dreieck $B_1 B_2 B_3$ horizontal liegt (denn den Punkten B entsprechen gleiche H-Distanzen) und sich in seiner wahren Größe projicirt, so bestimmen die sechs Punkte b mit den Punkten A ein reguläres Sechseck. — Die an $A_1 A_2 A_3$ liegenden Dreiecke $A_1 A_2 U_3$, $A_2 A_3 U_1$, $A_3 A_1 U_2$ haben gleiche H-Neigung; die Ecken u ihrer (unter sich congruenten) Projectionen liegen in den Geraden, welche die Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ senkrecht halbiren, und zwar in gleichen Entfernungen von diesen Seiten, also auch vom Mittelpunkte c des Dreiecks. Die drei an $B_1 B_2 B_3$ grenzenden Dreiecke $B_1 B_2 O_3$, $B_2 B_3 O_1$, $B_3 B_1 O_2$ haben gegen $B_1 B_2 B_3$ dieselbe Neigung wie die drei vorigen gegen die HE; ihre Projectionen sind daher den Projectionen der vorigen congruent und die Entfernungen co den Entfernungen cu gleich. Hieraus und aus der gegenseitigen Lage der Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $b_1 b_2 b_3$ folgt, daß die Punkte o mit den Punkten u ein reguläres Sechseck bestimmen, dessen Seiten mit denen des Sechsecks $A_1 b_2 A_3 \ldots$ parallel sind, und welches gezeichnet werden kann, sobald man eines seiner Ecken hat. Nun liegt aber z. B. der Punkt o_3 in der Geraden, welche $b_1 b_2$ senkrecht halbirt (d. h. in der verlängerten Verbindungslinie $b_3 A_3$), und ist von der auf $A_2 A_3$ senkrechten $b_1 v$ um die halbe Diagonale des regulären Fünfecks $A_2 A_3 O_3 B_1 O_2$ (welches aus seiner Seite $A_2 A_3$ construirt werden kann) entfernt; wodurch sich dieser Punkt o_3 bestimmt. — Nach diesen Erläuterungen läßt sich die H-Projection des Ikosaeders ausführen.

Die H-Distanzen $O_1 o_1$, $U_1 u_1$, $B_1 b_1$ der Punkte O, U, B erhält man, wenn man die Dreiecke $A_1 O_1 o_1$, $v U_1 u_1$, $v B_1 b_1$ construirt, von deren jedem man eine Kathete und die Hypotenuse kennt. Der Außenwinkel v des Dreiecks $v U_1 u_1$ zeigt zugleich den Winkel des Ikosaeders.

162. Betrachtet man die Projectionen der vier letztern Polyeder, und bedenkt, daß Alles, was für die beiden Gegenseiten $A_1 A_2 A_3 \ldots$

und $B_1 B_2 B_3$ .. gilt, auch für jedes andere Paar Gegenseiten gelten muß, (da es gleichgiltig ist, mit welcher Seite man den Körper in die HE legen will,) so ergeben sich folgende Sätze:

1) Jeder Seite des Körpers entspricht eine parallele Gegenseite. ($A_1 A_2 A_3 \ldots \parallel B_1 B_2 B_3 \ldots$).

2) Je zwei Gegenkanten sind parallel. ($A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$, $A_2 A_3 \parallel B_2 B_3$, u. s. f.).

3) Die Gerade, welche die Mittelpunkte zweier Gegenseiten verbindet, steht senkrecht auf den Ebenen beider Seiten (denn sie projicirt sich auf diese Ebenen als ein Punkt c).

4) Diese Gerade hat immer dieselbe Länge, welches Paar Gegenseiten man auch wählen mag; oder die Entfernung zweier Gegenseiten ist bei allen Paaren dieselbe.

5) Eine Ebene, welche eine Kante senkrecht halbirt, halbirt auch deren Gegenkante senkrecht. (Die Verbindungslinie der Mittelpunkte von $A_1 A_2$ und $b_1 b_2$ ist die H-Spur einer verticalen Ebene, welche $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ senkrecht halbirt.)

Eine solche Ebene E geht zugleich durch die vier Mittelpunkte der zwei Paar Gegenseiten, welche in den halbirten Kanten zusammenstoßen; daher schneiden sich die beiden Geraden, welche die einander gegenüberliegenden Mittelpunkte verbinden, und zwar müssen sie sich im Schnittpunkte C gegenseitig halbiren; denn diese Verbindungslinien bilden in der Ebene E mit den vier Geraden, von denen je zwei aus dem Halbirungspunkte einer Kante nach den Mittelpunkten M der entsprechenden Seiten gehen, eine Figur, bestehend aus zwei Vierecken $CM_1K_2M_3$ und $CM_2K_1M_4$ (Fig. 61), deren Congruenz leicht zu erweisen ist (die Winkel K sind dem Winkel des Polyeders gleich). Zugleich zeigt die Natur dieser Vierecke, daß auch die Verbindungslinie der Punkte K durch C geht und in C halbirt wird; und hieraus folgt wieder, daß die beiden Diagonalen des Rechtecks, welches durch die in Rede stehenden Gegenkanten bestimmt wird, ebenfalls im Punkte C sich schneiden und halbiren. Die Endpunkte einer solchen Diagonale heißen Gegenecken des Polyeders. Eine Gerade zwischen zwei Gegenecken, oder zwischen den Halbirungspunkten zweier Gegenkanten, oder zwischen den Mittelpunkten zweier Gegenseiten heißt eine Axe des Körpers. Man hat demnach noch folgende Sätze:

6) Jedes der vier Polyeder hat drei Systeme von Axen. Die Axen

jedes einzelnen Systems sind unter sich gleich. Die Axen sämmtlicher Systeme gehen durch einen und denselben Punkt C, welcher der Mittelpunkt des Körpers heißt, und werden in diesem Punkte halbirt.

7) Daher läßt sich sowohl in als um ein solches Polyeder eine Kugel beschreiben, und beide Kugeln haben einerlei Mittelpunkt C.

8) Eine durch zwei Gegenecken gelegte Axe bildet gleiche Winkel mit den Kanten, welche in diesen Ecken zusammenstoßen (denn die Axe ist die gemeinschaftliche Diagonale der unter sich congruenten Rechtecke, welche durch jene Kanten und ihre Gegenkanten bestimmt werden).

9) Verbindet man jede von den in einem Eck zusammenkommenden Kanten durch eine Ebene mit der durch dieses Eck gehenden Axe, so gehen diese Ebenen durch die im Gegeneck zusammenkommenden Kanten, und die Winkel zwischen je zwei benachbarten Ebenen sind gleich (denn die Dreikante, welche durch die Axe und je zwei benachbarte Kanten bestimmt werden, stimmen in ihren Seiten überein und sind congruent).

10) Eine durch zwei Gegenkanten gelegte Ebene geht durch den Mittelpunkt C und halbirt den Winkel des Polyeders (was sich aus Fig. 61 ersehen läßt).

Das reguläre Tetraeder ist in obigen Betrachtungen nicht mitbegriffen. Es läßt sich aber ohne Schwierigkeit zeigen, daß auch um und in dieses eine Kugel beschrieben werden kann.

Aufgaben.

Die regulären Polyeder bei gegebener Kante zu projiciren, wenn ein Eck A in der HE liegt, und die Axe, welche durch A und sein Gegeneck B geht, senkrecht auf der HE steht.

163. Für die Auflösung der einzelnen Fälle gelten folgende allgemeine Bemerkungen:

1) Die Axe AB projicirt sich als ein Punkt (A oder b), von welchem die Projectionen der in A und B zusammenstoßenden Kanten auslaufen.

2) Die Projectionen der genannten Kanten sind gleichlang. (Denn die Kanten haben nach Nr. 162, 8 einerlei Neigung gegen AB, also auch einerlei H-Neigung.)

3) Die Projectionen einer an B liegenden Kante fällt in die Ver-

längerung der Projection ihrer an A liegenden Gegenkante. (Denn beide Kanten haben dieselbe projicirende Ebene.)

4) Die Winkel zwischen den Projectionen der von A und B ausgehenden Kanten sind gleich. (Denn aus Nr. 162, 9 folgt, daß die Projectionen der von A ausgehenden Kanten gleiche Winkel zwischen sich haben; diese Winkel werden aber durch die Projectionen der von B ausgehenden Kanten halbirt, da diese die Verlängerungen der erstern sind; oder es fallen die letztern Kantenprojectionen in die erstern [beim Oktaeder].)

5) Aus (2) und (4) ersieht man, daß die projicirten Endpunkte der von A und B ausgehenden Kanten immer ein reguläres Polygon bestimmen, dessen Mittelpunkt A ist.

Das Tetraeder.

kommt hier nicht in Betracht, weil in ihm keine Axe durch zwei Ecken möglich ist.

Das Hexaeder.

164. Sind O die Endpunkte der drei von B ausgehenden und U die Endpunkte der von A ausgehenden Kanten, so bestimmen die Projectionen o und u ein reguläres Sechseck, dessen Seiten die Projectionen der übrigen Kanten des Würfels darstellen. Fig. 62.

Die Axe AB ist die Diagonale des Rechtecks AU_3BO_3, welches zu Seiten zwei Kanten des Hexaeders und die Diagonalen zweier Hexaederseiten hat. Macht man auf den Schenkeln eines rechten Winkels $\mathfrak{UA} = \mathfrak{UM}$ = der Hexaederkante und $\mathfrak{UB} = \mathfrak{AM}$ (Diagonale der Hexaederseite), so ist $\mathfrak{AUB}$ die Hälfte jenes Rechtecks, daher $\mathfrak{AB}$ = AB. Wird noch $\mathfrak{UV} \perp \mathfrak{AB}$ gefällt, so zeigt $\mathfrak{UV}$ die Länge für die H-Projectionen der Hexaederkanten (oder den Halbmesser des um das Sechseck $o_1\ u_2\ o_3 \ldots$ beschriebenen Kreises), wodurch die H-Projection des Hexaeders selbst bestimmt ist. Ferner ist $\mathfrak{VA}$ die H-Distanz der Punkte U und $\mathfrak{VB}$ die H-Distanz der Punkte O (denn denkt man sich das ganze Rechteck gezeichnet und $\mathfrak{OW} \perp \mathfrak{AB}$ gezogen, so ist $\mathfrak{AW} = \mathfrak{VB}$).

Das Oktaeder.

165. Die H-Projection bildet ein Quadrat sammt seinen beiden Diagonalen. Die H-Distanz für A ist Null; die H-Distanz für B ist der Diagonale des Quadrats gleich; die H-Distanz der übrigen Ecken ist die halbe Diagonale.

Das Dodekaeder.

Fig. 63. **166.** Die Projectionen der Kanten AD und BE liegen so, daß die Endpunkte d und e ein reguläres Sechseck bestimmen. Das Dreieck $d_1\, d_2\, d_3$ ist die Projection des horizontal liegenden regulären Dreiecks $D_1\, D_2\, D_3$, welches zur Seite die Diagonale $\mathfrak{D}_2\, \mathfrak{D}_3$ der Dodekaederseite $\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}_2\mathfrak{U}_1 \ldots$ hat. Mit diesem Dreieck wird man daher die Zeichnung der Dodekaederprojection beginnen und dann den Mittelpunkt A und die Punkte e bestimmen. Die Kante $U_1\, U_2$ liegt horizontal; ihre Projection zeigt ihre wahre Länge, ist parallel mit $d_2\, d_3$ und wird durch eine aus A auf sie gefällte Senkrechte Ap halbirt; man kann demnach diese Projection zeichnen, wenn man ihre Entfernung von A kennt, und diese wird folgendermaßen gefunden. Da Ap die Projection der Fünfeckshöhe $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ ist, so ist Aq die Projection von $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}$; macht man daher

$$\mathfrak{A}'q = Aq$$
$$q\mathfrak{Q}' \perp \mathfrak{A}'q$$
$$\mathfrak{A}'\mathfrak{Q}' = \mathfrak{A}\mathfrak{Q},$$

so ist $\mathfrak{Q}'\mathfrak{A}'q$ die H-Neigung der AP (oder des Fünfecks $A D_2 U_1 \ldots.$); verlängert man ferner $\mathfrak{A}'\mathfrak{Q}'$ und macht

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{P}' = \mathfrak{A}\mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{P}'p \perp \mathfrak{A}'q,$$

so ist $\mathfrak{A}'p$ die Länge der Projection Ap von AP. Hiernach lassen sich die Projectionen u_1 und u_2 bestimmen. Es müssen aber die sechs Fünfecke, welche zu dreien in A und B zusammenstoßen, congruente Projectionen haben; daher berührt ein mit Ap um A beschriebener Kreis nicht allein die projicirte Kante $u_1\, u_2$, sondern zugleich die Projectionen uu und oo der übrigen Kanten, welche in den genannten Fünfecken den Punkten A und B gegenüberliegen; die Berührungspunkte werden durch die Geraden $d_1\, e_1$, $d_2\, e_2$,... bestimmt, und wenn man von jedem dieser Punkte nach beiden Seiten hin die halbe Dodekaederkante auf der Tangente abträgt, so erhält man die Punkte o und u. Die H-Projection des Körpers ist nun leicht zu vollenden.

Die H-Distanz der Punkte D ist $\mathfrak{Q}'q$. Die Punkte U haben die H-Distanz $\mathfrak{P}'p$. Durchschneidet man die verlängerte pu_2 von e_1 aus mit $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ in v, so ist vp der Abstand der Punkte E von der Ebene der Punkte U, oder auch der Abstand der Punkte D von der Ebene der Punkte O. Der Punkt B hat von der Ebene $E_1\, E_2\, E_3$ dieselbe Ent-

fernung wie A von der Ebene $D_1\, D_2\, D_3$. Daher ergeben sich folgende H-Distanzen:

0	für den Punkt	A
Q'q	" die Punkte	D
P'p	" " "	U
Q'q + pv	" " "	O
P'p + pv	" " "	E
P'p + pv + Q'q	" den Punkt	B.

Das Ikosaeder.

167. Sind U die Endpunkte der von A ausgehenden und O die Endpunkte der von B ausgehenden Kanten, so bestimmen die Punkte o mit den Punkten u ein reguläres Zehneck. Die Ebene der Punkte U liegt horizontal, und eben so die Ebene der Punkte O; daher zeigt jede Seite des Fünfecks $U_1\, U_2\, U_3 \ldots$ oder $O_1\, O_2\, O_3 \ldots$ die wahre Länge der Ikosaederkante. Hiernach ist die H-Projection des Körpers leicht zu zeichnen. Fig. 64.

Die Höhe p der Pyramiden, welche durch die Ebenen UU.. und OO.. vom Ikosaeder abgeschnitten werden, ist die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen andere Kathete Au_1 und dessen Hypotenuse $u_1\, u_2$ ist. Aehnlich findet man die Höhe t des trommelartigen Körpers, welcher nach Abzug der beiden Pyramiden vom Ikosaeder übrig bleibt (entweder mittels der Linien $u_1\, o_4$ und $u_1\, u_2$, oder mittels der Linie u_1 v und der wahren Höhe der Ikosaederseite). Dann hat man folgende H-Distanzen:

0	für den Punkt	A
p	" die Punkte	U
p + t	" " "	O
2p + t	" den Punkt	B.

Aufgaben.

Die regulären Polyeder bei gegebener Kantenlänge zu projiciren, wenn eine Kante $A_1\, A_2$ in der HE liegt und die in dieser Kante zusammenstoßenden Seiten gleiche H-Neigung haben.

168. Beim Tetraeder wird eine durch $A_1\, A_2$ gelegte verticale Ebene die gegenüberliegende Kante senkrecht halbiren. Bei den vier

übrigen Körpern steht eine durch $A_1 A_2$ und deren Gegenkante $B_1 B_2$ gelegte Ebene vertical (was mittels Nr. 162, 10 zu erweisen), so daß die Projection $b_1 b_2$ der letztern Kante mit $A_1 A_2$ zusammenfällt. Die Projectionen der beiden in $B_1 B_2$ aneinandergrenzenden Seiten sind unter sich congruent und fallen mit den Projectionen der beiden an $A_1 A_2$ liegenden Seiten zusammen.

Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder zu projiciren, bleibt dem eigenen Nachdenken des Schülers überlassen.

Das Dodekaeder.

Fig. 65. **169.** Die an $A_1 A_2$ liegenden Fünfecke seien mit den Buchstaben A, U, D bezeichnet; die an $B_1 B_2$ liegenden mit B, O, E.

Da die Punkte e auf die Punkte d fallen (Nr. 168), so stehen die Kanten $D_1 E_1$ und $D_2 E_2$ vertical, mithin auch die Ebenen der an ihnen liegenden vier Fünfecke, und diese projiciren sich also auf die HE als gerade Linien dm. Die Linien $A_1 A_2$, $u_1 u_2$, $u_3 u_4$ werden durch $d_1 d_2$ senkrecht halbirt; $U_1 U_2$ und $U_3 U_4$ liegen horizontal, also auch $U_1 U_4$ und $U_2 U_3$; daher stellt jede Seite des Vierecks $u_1 u_2 u_3 u_4$ die Diagonale der Dodekaederseite in wahrer Größe dar, und das Viereck selbst ist ein Quadrat. Die Kanten $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$ müssen (da sie mit $U_2 U_3$ und $U_1 U_4$ parallel sind) horizontal liegen und sich in wahrer Größe projiciren. Eine durch die vier Punkte M geführte Ebene halbirt die Kanten $D_1 E_1$ und $D_2 E_2$ senkrecht, liegt also selbst horizontal. Die Linie $m_1 d_1$ ($= m_3 d_1 = m_4 d_2 = m_2 d_2$) stellt die Höhe der Dodekaederseite in wahrer Größe dar; $o_2 d_1$ und $o_2 m_1$ sind die beiden Stücke dieser Höhe, in welche sie durch die Diagonale $O_2 U_2$ zerlegt wird. Die verlängerte $A_1 A_2$ halbirt $m_1 m_2$ und $m_3 m_4$ senkrecht in v und w; vw zeigt die wahre Länge der durch die Mittelpunkte von $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$ gehenden Axe, und $d_1 d_2$ die Länge der Axe zwischen den Kanten $D_1 E_1$ und $D_2 E_2$; daher ist $d_1 d_2 = vw$ und beide halbiren sich. — Die vorstehenden Auseinandersetzungen leiten nicht nur auf eine einfache Construction der Projection, sondern auch auf mehrere Proben für die Genauigkeit dieser Construction. Man wird zuerst das Quadrat $u_1 u_2 u_3 u_4$ zeichnen, dann die Punkte A bestimmen, hierauf die Punkte d und endlich die Punkte m. (Ist $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{D}_3$ .. [Fig. 63] der Dodekaederseite congruent, so ist $u_1 u_2 = \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3$; d_1 ist der Durchschnittspunkt zweier um u_1 und u_2 beschriebener Bögen vom Halbmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$; m_1 findet

man, wenn man $d_1 u_2$ zieht und um das Stück AQ verlängert; u. s. w.)

Legt man eine VE durch $D_1 E_1$ unter gleichen Winkeln gegen die in $D_1 E_1$ zusammenhängenden Seiten (also parallel mit $A_1 A_2$), so hat gegen diese das Dodekaeder ganz dieselbe Stellung wie gegen die HE; daher wird die V-Projection desselben seiner H-Projection congruent sein und sich von letzterer nur in der Lage gegen den Grundschnitt unterscheiden. Denkt man sich nämlich eine der H-Projectionen congruente Figur über dem Grundschnitt $d_1 g$ so gezeichnet, daß $m_1 m_2$ in $d_1 g$ und v in d_1 fällt, so ist diese Figur die V-Projection. Hieraus ersieht man, daß die H-Distanzen der Dodekaederecken unmittelbar auf der Geraden vw abgenommen werden können, und zwar in folgender Art:

0	ist die H-Distanz der Punkte	A
vs	" " " " "	U
vb_2	" " " " "	D
vc	" " " " "	M
vb_1	" " " " "	E
vt	" " " " "	O
vw	" " " " "	B.

(Wie hat man in Nr. 160 die VE anzunehmen, damit die V-Projectionen der Figur 65 ähnlich werde?)

Das Ikosaeder.

170. Sind U die Spitzen der an $A_1 A_2$ liegenden und O die Spitzen der an $B_1 B_2$ liegenden Dreiecke, so fallen die Projectionen o in die Projectionen u; die Kanten $O_1 U_1$, $O_2 U_2$ und die durch sie gehenden Ebenen stehen vertical, weshalb sich die in diesen Ebenen liegenden zwei Paar Dreiecke als gerade Linien projiciren, welche paarweise unter dem Winkel des Ikosaeders zusammenstoßen. Die Spitzen M jener vier Dreiecke liegen in der Ebene, welche die Kanten $O_1 U_1$ und $O_2 U_2$ senkrecht halbirt; sie haben also einerlei H-Distanz, und die Projectionen $m_1 m_2$, $m_3 m_4$ zeigen die wahre Länge der Körperkante. Zugleich werden diese Projectionen von der verlängerten $A_1 A_2$ senkrecht halbirt (wie leicht zu erweisen). Die Endpunkte der fünf von M_1 ausgehenden Kanten liegen in einer verticalen Ebene, und ebenso die Endpunkte der fünf Kanten, welche im Gegenpunkte M_4 zusammenkommen; denn die beiden durch diese Endpunkte bestimmten Fünfecke sind die Basen der zwei Pyramiden, deren Spitzen M_1 und M_4 sind, und es wurde früher Fig. 66.

(Nr. 167) gezeigt, daß die Ebenen dieser Basen senkrecht auf der durch beide Spitzen gehenden Axe stehen; diese Axe $M_1 M_4$ liegt aber hier horizontal, weßhalb jene Ebenen senkrecht zur HE sein müssen. Dasselbe gilt von den Ebenen der Fünfecke, welche mit den Punkten M_2 und M_3 zwei andere Pyramiden bestimmen. Man sieht hieraus, daß die Projectionen der erwähnten vier Fünfecke vier gerade Linien $o_1 m_2$, $o_2 m_3$, $o_1 m_4$, $o_2 m_1$ geben. Endlich ist $o_1 o_2 = vw =$ der zwischen Gegenkanten liegenden Axe, und diese Länge ergibt sich als Diagonale des regulären Fünfecks, welches durch die Endpunkte der von B_1 ausgehenden Kanten bestimmt wird. Mit Hülfe dieser Axe kann man nach den obigen Erläuterungen die H-Projection des Ikosaeders herstellen. (Bei genauer Zeichnung muß $o_1 m_1 =$ der Höhe der Ikosaederseite und $o_1 m_2 =$ der Höhe des mehrerwähnten Fünfecks sein.)

Wird eine VE durch $U_1 O_1$ senkrecht zur Ebene $O_1 U_1 O_2 U_2$ gelegt, so muß die V-Projection des Körpers der H-Projection congruent sein, und man überzeugt sich auf dieselbe Weise wie vorhin beim Dodekaeder, daß auf vw die H-Distanzen sämmtlicher Ecken angezeigt sind. Es ist nämlich

0	die H-Distanz	der	Punkte	A
vb_2	"	"	"	"	U
vc	"	"	"	"	M
vb_1	"	"	"	"	O
vw	"	"	"	"	B.

(Wie müßte man die VE legen, um eine der Fig. 64 ähnliche V-Projection zu erhalten?)

171. Zur Uebung:

1) Man projicire das Tetraeder, das Hexaeder und das Oktaeder so, daß jedesmal die V-Projection der H-Projection congruent ist.

2) Man zeichne den Winkel jedes regulären Polyeders, ohne ein Dreikant aufzulösen, und ohne die Projectionen des Körpers zu benützen.

3) Für jedes reguläre Polyeder werde der Halbmesser der einbeschriebenen und der umbeschriebenen Kugel gesucht.

172. Aufg. Einen Körper, dessen Bestimmungsstücke gegeben sind, zu projiciren, wenn seine Stellung gegen die Grundebenen in folgender Weise vorgeschrieben ist:

1) Die Ebene einer bestimmten Seite Z hat eine gegebene H-Neigung α;

2) eine bestimmte Kante K in dieser Seite bildet mit der H-Spur der Ebene einen gegebenen Winkel φ;

3) die H-Spur der Ebene schließt mit dem Grundschnitt einen Winkel ψ ein.

Aufl. Durch die Angaben (1) und (2) ist die Stellung des Körpers gegen die HE, also auch die Figur der H-Projection bestimmt; und indem die Angabe (3) hinzukommt, bestimmt sich auch die Figur der V-Projection. Nur die Entfernungen der beiden Projectionen vom Grundschnitt bleiben willkürlich, da man die Grundebenen noch in beliebigen Abständen vom Körper annehmen kann. (Sollten auch diese Abstände — welche übrigens völlig unwesentlich sind — bestimmte Werthe erhalten, so müßten für ein bestimmtes Eck beide G-Distanzen gegeben sein.)

Man projicire zuerst den Körper auf die Ebene der Seite Z, als HE, bestimme die H-Distanzen der Ecken, und ändere dann die gegenseitige Stellung des Körpers und der HE nach vorgeschriebener Weise, entweder dadurch, daß man den Körper fest denkt und der HE eine andere Lage gibt, oder durch Bewegung des Körpers bei unbewegter HE. Hat man nach dieser Aenderung die neue H-Projection und die neuen H-Distanzen gefunden, so nimmt man die VE in der angegebenen Lage hinzu, auf welcher dann die Projection leicht herzustellen ist.

Um die Ausführung an einem Beispiele zu erläutern, sei eine Pyramide ABCS gegeben, in welcher die Basis ABC als die Seite Z gilt, AB als die Kante K. Die HE gehe durch das Eck A. — Man kann nun die Projectionen des Körpers auf doppeltem Wege erhalten.

I. Es sei AO die H-Spur der Ebene ABC. Denkt man sich diese Ebene sammt der darauf stehenden Pyramide in die HE umgeklappt, so nimmt die Umklappung AB_1C_1 eine solche Lage ein, daß W. $B_1AO = \varphi$. Man zeichne für diese Lage die H-Projection AB_1C_1s der Pyramide, bestimme die H-Distanz h ihrer Spitze, und bewege hierauf die Ebene ABC wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück. Dann fallen die neuen H-Projectionen der Ecken in die aus B_1, C_1, s auf AO gefällten Senkrechten. Führt man eine zu AO senkrechte VE AQ ein, so würde die V-Projection der Basis vor der Zurückbewegung in den Grundschnitt fallen; die V-Projection der Spitze läge in der Verlängerung Fig. 67.

der auf AQ senkrechten sm, und zwar von m um h entfernt, so daß man V-Projection der ganzen Pyramide leicht zeichnen könnte. Die Figur dieser V-Projection kann sich aber während jener Zurückbewegung nicht ändern, sondern dreht sich blos um A so, daß am Ende der Bewegung die Grundlinie Ac′ mit ihrer ersten Lage Ac′ in AQ den Winkel α einschließt. Sie bestimmt sich daher, wenn man

$$QAc' = \alpha$$
$$Ab' = Ab'$$
$$Ac' = Ac'$$
$$Am = Am$$
$$Ams' = 90^0$$
$$ms' = h$$

macht. Es ist nicht nöthig, die V-Projectionen der Kanten zu ziehen, da man die V-Projectionen b′, c′, s′ der Ecken nur in der Absicht gesucht hat, aus ihnen die zugehörigen H-Projectionen a, b, s und die H-Distanzen abzuleiten. Sind diese gefunden, so vertausche man die VE AQ mit der vorgeschriebenen VE, welche die AO unter dem Winkel ψ schneidet, trage auf diese die V-Projectionen der Ecken über (nach Nr. 125) und führe die Projectionen der Pyramide vollständig aus.

Fig. 68. II. Ist ABCs die Projection der Pyramide auf die Ebene der Basis, mit welcher man anfänglich die HE zusammenfallen läßt, und zieht man in dieser Ebene die Gerade AO so, daß BAO $= \varphi$, so wird man, um der Aufgabe zu genügen, zunächst die HE um AO so weit abwärts drehen, daß der Winkel zwischen ihr und der nach unten gekehrten Fläche der Basis $= \alpha$ ist. Um auf dieser neuen HE die Projection angeben zu können, nehme man eine zu AO senkrechte VE zu Hülfe, welche die Ebene der Basis in AQ schneiden soll. So lange die letztere als HE gilt, ist AQ der Grundschnitt, und man findet die zu ABCs gehörige V-Projection Ab′c′s′ nach Nr. 43. Die neue Lage der HE schneidet die VE nach A𝔔 so, daß QA𝔔 $= \alpha$; für diesen neuen Grundschnitt A𝔔 bleibt die V-Projection der Pyramide dieselbe; die H-Projection aber wird eine andere, und man findet ihre einzelnen Punkte b, c, s, nach Nr. 125. Auch die Lage der Linie AO ändert sich; denn da sie im Raume auf A𝔔 senkrecht ist, so muß sie noch senkrecht auf ihr bleiben, wenn das Grundsystem zur Zeichnungsebene aufgeklappt wird. Statt AO erscheint daher A𝔒 ($\perp$ A𝔔).

Die vorgeschriebene VE schneidet die A𝔒 unter dem Winkel ψ.

Man zeichne ihren Grundschnitt und trage auf sie die Projectionen der Ecken aus der VE AO über (Nr. 125).

173. Uebungsaufgaben.

1) Den Mittelpunkt der Kugel zu finden, welche um eine gegebene dreiseitige Pyramide beschrieben werden kann.

2) Den Mittelpunkt der in eine gegebene dreiseitige Pyramide beschriebenen Kugel zu finden.

3) Ueber einem gegebenen spitzwinkeligen Dreieck (als der Basis) eine Pyramide so zu construiren, daß die Kanten an der Spitze drei rechte Winkel bilden.

c. Schnitte der Polyeder durch Ebenen.

174. Wird ein gegebenes Polyeder durch eine gegebene Ebene geschnitten, so erhält man die Projectionen der Durchschnittsfigur, wenn man die Schnittlinien dieser Ebene mit den Ebenen der Polyederseiten projicirt und von denselben nur diejenigen Stücke nimmt, welche durch die Kanten des Polyeders begrenzt werden; oder wenn man die Schnittpunkte der Polyederkanten mit der gegebenen Ebene sucht und gehörig verbindet. Die wahre Durchschnittsfigur läßt sich nach Nr. 141 finden.

† Die beiden Mittel, durch welche man die Projectionen der Schnittfigur erhalten kann, lassen sich zuweilen vortheilhaft verbinden. Ist z. B. eine Pyramide, deren Basis ABCD . . . in der HE liegt (und deren Spitze S heißen mag), durch eine Ebene zu schneiden, so weiß man zum voraus, daß die Punkte, in denen die H-Spur dieser Ebene von den zur Basis gehörigen Kanten oder ihren Verlängerungen geschnitten wird, die H-Spuren für die Seiten der Schnittfigur sind. Hat man daher einmal den Punkt bestimmt, in welchem eine Seitenkante CS der schneidenden Ebene begegnet, so ergeben sich unmittelbar die Projectionen für die in den Seitenflächen CBS und CDS liegenden Seitenlinien der Schnittfigur, also auch für die auf die Kanten SB und SD fallenden Punkte, von denen aus in ähnlicher Weise fortgeschritten werden kann.

Die Lösung der hieher gehörigen Aufgaben wird am einfachsten, wenn die Schnittebene senkrecht auf einer Grundebene steht. Denn dann fällt eine Projection der Schnittfigur in die Spur der Ebene und die Umklappung der Figur mit der Ebene läßt sich bequem ausführen. (Es ist daher in manchen Fällen die Beiziehung einer neuen Grundebene, senkrecht zur schneidenden Ebene, von Nutzen.)

175. Aufg. In einer Seite F eines gegebenen geraden Prisma's ist eine Gerade parallel mit der Basis gezogen

und durch diese Gerade eine Ebene unter gegebener Neigung φ gegen die erwähnte Seite F gelegt. Man soll das Netz des durch die Ebene abgeschrägten Prisma's zeichnen.

Aufl. Legt man die HE durch die Basis des Prisma's und die VE senkrecht zur Seite F, so steht auch die Schnittebene senkrecht zur VE; ihre V-Spur bildet mit dem Grundschnitt den Winkel $90^\circ - \varphi$ und enthält die V-Projection des Schnitts; die H-Projection desselben ist die Basis des Prisma's.

Die horizontale Umklappung der Schnittfigur mit ihrer Ebene ergibt sich nach Nr. 62, ††. Die übrigen Seiten des abgeschnittenen Körpers sind ganz leicht zu erhalten, so daß die Herstellung des Netzes keine Schwierigkeit hat.

176. Aufg. Ein schiefes Prisma senkrecht zu den parallelen Kanten abzuschneiden und das Netz zu zeichnen.

Aufl. Man lege die HE durch die Basis, die VE parallel zu den Seitenkanten, zeichne die Spuren der Schnittebene (Nr. 27), bestimme die H-Projection des Schnitts (Nr. 44) und mittels derselben die Schnittfigur selbst. Die übrigen Seiten des Netzes sind rechtwinkelige Trapeze, deren Basen Seitenlinien der Schnittfigur und deren parallele Seiten aus der VE zu entnehmen sind (Nr. 29).

Ist das Prisma dreiseitig, so kann man das Netz auch leicht dadurch erhalten, daß man die gebrochene Oberfläche des Prismas in eine Ebene ausbreitet (d. h. die drei Seitenparallelogramme construirt und aneinanderlegt) und die parallelen Kanten durch eine Gerade senkrecht schneidet. Dann ergeben sich sogleich die Trapeze, welche die Seiten des abgeschnittenen Körpers bilden; und wenn man aus den in diese Trapeze fallenden Stücken jener Geraden ein Dreieck construirt, so hat man die Schnittfigur.

177. Aufg. Eine Pyramide, deren Bestimmungsstücke gegeben sind, wird durch eine Ebene geschnitten, welche drei bestimmte Seitenkanten in gegebenen Entfernungen von der Spitze trifft. Man soll den Schnitt projiciren und das Netz der abgestumpften Pyramide zeichnen.

Aufl.

A) Ist die Pyramide dreiseitig, so klappe man zwei Seiten in die Ebene der Basis um, trage auf den umgeklappten Kanten die gege-

benen Entfernungen ab und vollende das Netz. Durch Zurückbewegung der Seiten findet man die Projectionen der drei Schnittpunkte auf die Basis, also auch die Projection der Schnittfigur.

B) Hat die Pyramide mehr als drei Seiten, aber die gegebenen Punkte, durch welche die Schnittebene gehen soll, liegen auf drei benachbarten Kanten, so läßt sich die Aufgabe in ähnlicher Weise behandeln wie die der Nr. 153; oder auch so wie im folgenden Falle.

C) Die Pyramide habe eine größere Seitenzahl, und von den drei Kanten, auf denen die Schnittpunkte X, Y, Z gegeben sind, liege keine unmittelbar neben der andern.

Sind AS, CS, ES diese Kanten, so lege man durch je zwei derselben eine Ebene, wodurch eine dreiseitige Pyramide entsteht, welche ACE zur Basis hat. Von dieser Pyramide klappe man zwei Seiten um, etwa ACS und AES, trage auf den umgeklappten Kanten die gegebenen Entfernungen $S_1X_1 = S_2X_2$, S_1Y_1, S_2Z_1 ab, ziehe Y_1X_1, Z_1X_2 und verlängere sie, bis CA und EA in P und Q geschnitten werden; dann ist PQ die H-Spur der Schnittebene XYZ. Nun lege man die VE senkrecht zu PQ, zeichne die V-Projection der Pyramide, bestimme die H-Projection eines der Schnittpunkte X, Y, Z, etwa x, sammt der zugehörigen V-Projection x′ (Nr. 44), und verbinde x′ mit dem Punkte O, wo PQ den Grundschnitt trifft, so hat man die V-Spur OP′ der Schnittebene XYZ. Die Schnitte der OP′ mit den V-Projectionen der Pyramidenkanten sind die V-Projectionen der Punkte, in denen die Ebene XYZ diese Kanten trifft; die zugehörigen H-Projectionen sucht man nach Nr. 44. Fig. 69.

(Genauigkeitsproben: Die so gefundenen H-Projectionen y und z müssen zugleich in die aus Y_1 und Z_1 auf AC und AE gefällten Senkrechten fallen. — P, x, y müssen in gerade Linie liegen; ebenso Q, x, z.)

Nachdem nun die Projectionen der Schnittfigur bekannt sind, kann man leicht diese Figur selbst mit der Ebene XYZ umklappen, und auch die übrigen Stücke des Körpernetzes durch horizontale Umklappung der Seiten finden.

178. Aufg. Von einer Pyramide ist außer der Basis ABC... noch eine Seite ABS sammt der Neigung α dieser Seite gegen die Basis gegeben. Die Pyramide wird durch eine Ebene abgestumpft, welche der Seite ABS nach der Linie XV unter

dem Winkel φ begegnet. Man soll das Netz des Körpers zeichnen.

Fig. 69. **Aufl.** Man lege die HE durch die Basis, zeichne an AB die Umklappung ABS_3 der Seite ABS, suche die H-Spur R der (in X_0V_0 umgeklappten) Linie XV, so hat man einen Punkt für die H-Spur der Schnittebene. Diese Spur RQ läßt sich als die Kante eines Dreikants auffassen, dessen beide andere Kanten die Linien RB und RV sind, und von welchem man eine Seite BRV_0 und zwei Winkel $180^0 - \alpha$ und φ kennt. Sucht man daher (Nr. 112) die Seite BRQ dieses Dreikants, so kann man RQ ziehen. Nun lege man die VE senkrecht zu RQ, zeichne beide Projectionen der vollständigen Pyramide und bestimme die Projectionen eines der Punkte X, V. Durch die V-Projection desselben geht die V-Spur der Schnittebene. Das weitere Verfahren ist dasselbe wie bei der vorigen Aufgabe.

Anmerk. Wird eine Pyramide, deren Basis in der HE liegt, durch eine beliebige Ebene geschnitten, so sind (wie schon in Nr. 174, † bemerkt wurde) die Punkte, in denen die Richtungen der Basenkanten die H-Spur der Ebene treffen, die Spuren für die Seiten der Schnittfigur, und diese Punkte behalten ihre Lagen, wenn man die schneidende Ebene um ihre H-Spur dreht. Man kann sich nun die Seitenkanten der Pyramide unter die Basis hinab und über die Spitze hinaus verlängert denken, so daß ein Vielkant sammt seinem Scheitelvielkant sich darstellt, und die Stellung der schneidenden Ebene, unter Beibehaltung ihrer H-Spur, beliebig ändern. Verfolgt man dabei die Aenderungen der in der HE erscheinenden Projectionen, so ergibt sich folgender Lehrsatz der ebenen Geometrie:

„Wenn die n-Seiten eines veränderlichen n-Ecks nach n festen Punkten gerichtet bleiben, welche in einer Geraden liegen, und (n — 1) Ecken dieses Polygons in eben so vielen festen Geraden verbleiben, welche sich in einem Punkte s schneiden, so bleibt auch das noch übrige Eck in einer festen, durch s gehenden Geraden."

(Der Satz läßt sich in Umkehrung aussprechen, auch durch Hinzuziehen der Diagonalen des Polygons noch erweitern.)

179. Uebungsaufgaben.

1) Ein gegebenes Prisma so zu schneiden, daß drei bestimmte Kanten in gegebenen Punkten getroffen werden.

2) Einen gegebenen Körper so zu schneiden, daß eine bestimmte Kante senkrecht halbirt wird.

3) Ein rechtwinkeliges Parallelepiped }
4) Ein schiefwinkeliges Parallelepiped } durch eine Ebene zu schnei-

den, welche gegen zwei bestimmte Seiten gegebene Neigungen und von einem bestimmten Eck eine gegebene Entfernung hat.

5) Eine vierseitige Pyramide nach einem Trapez zu schneiden, dessen parallele Seiten in der Basis und einer bestimmten Seitenfläche liegen und gegebene Längen haben.

6) Eine vierseitige Pyramide nach einem Trapez zu schneiden, dessen parallele Seiten durch zwei in bestimmten Seitenflächen gegebene Punkte gehen.

7) Eine vierseitige Pyramide nach einem Parallelogramm von gegebenem Inhalt zu schneiden. *

8) Einen Würfel nach einem Dreieck zu schneiden, welches einem gegebenen (spitzwinkeligen) Dreieck congruent ist.

180. Aufg. Ein dreiseitiges Prisma so zu schneiden, daß die Schnittfigur einem gegebenen Dreieck ähnlich ist und durch einen auf dem Prisma gegebenen Punkt geht.

Aufl.

A) Ist das Prisma gerade, so lege man die HE durch die Basis, welche dann sogleich die H-Projection des Schnittes vorstellt, und löse die Aufgabe der Nr. 145. Hat man so die Lage der Schnittebene gefunden, so kann man die Punkte bestimmen, in denen die einzelnen Kanten geschnitten werden, und das Netz herstellen.

Die Spitzen der Winkel W_1, W_2, W_3 in dem gegebenen Dreieck (welchem der Schnitt ähnlich werden soll) können sich unter die drei Kanten K_1, K_2, K_3 des Prisma's auf sechs verschiedene Arten vertheilen, nach folgendem Schema:

K_1	K_2	K_3
W_1	W_2	W_3
W_1	W_3	W_2
W_2	W_3	W_1
W_2	W_1	W_3
W_3	W_1	W_2
W_3	W_2	W_1

* Um für die Lösbarkeit der Aufgaben 5—7 einen größern Spielraum zu erlangen, kann man zulassen, daß statt einer bestimmten Pyramidenfläche auch die (durch Verlängerung der Kanten zu gewinnende) Erweiterung derselben benützt werden dürfe.

Jedem solchen Falle entsprechen (nach Aufg. Nr. 145) zwei Lagen der Schnittebene, so daß in Allem $6 . 2 = 12$ Auflösungen möglich sind.

† Ist das gegebene Dreieck gleichschenkelig (z. B. $W_2 = W_3$), so reducirt sich die Anzahl der Auflösungen auf $3 . 2 = 6$.

†† Ist das Dreieck gleichseitig ($W_1 = W_2 = W_3$), so gibt es nur $1 . 2 = 2$ Auflösungen.

B) Ist das Prisma schief, so suche man seinen senkrechten Durchschnitt (Nr. 176) und nehme ihn für die Basis. Dadurch wird das Prisma zu einem geraden, und die weitere Behandlung der Aufgabe ist dieselbe wie vorhin. *

181. Aufg. Ein Prisma, dessen Basis ein Parallelogramm ist, so zu schneiden, daß die Schnittfigur einem gegebenen Parallelogramme ähnlich ist und durch einen gegebenen Punkt des Prisma's geht.

Aufl. Man halbire das Prisma durch eine Diagonalebene und das gegebene Parallelogramm durch eine Diagonale. Schneidet man die dreiseitige Prismenhälfte so, daß der Schnitt dem halben Parallelogramm ähnlich wird (Nr. 180), so ist die Schnittebene die verlangte.

Fig. 70. Es sei KLMN die gegebene Gestalt des Schnittes und ABCD der senkrechte Durchschnitt des Prisma's (also die Projection des Schnitts auf die neue HE); die Diagonalebene gehe durch AC. Nun kann W. B sowohl die Projection des Winkels L, als auch die des Winkels K sein, je nachdem man die Diagonale KM oder die Diagonale LN der Diagonalebene des Prisma's entsprechen läßt. Soll das dreiseitige Prisma über ABC nach einer dem Dreieck KLM ähnlichen Figur geschnitten werden, so können hier von den 6 Paar Auflösungen, deren die Aufgabe der Nr. 180 im Allgemeinen fähig ist, blos 2 Paar in Anwendung kommen (da die Winkelspitze L nur auf die Kante B fallen kann); dasselbe gilt auch im andern Falle, wenn der Schnitt des Prisma's ABC dem Dreieck LNK ähnlich sein soll; und hieraus folgt, daß für die gegenwärtige Aufgabe die Zahl der möglichen Auflösungen $4 . 2 = 8$ ist. Zur Uebersicht der vier Paare dient nachstehendes Schema (wo unter B, t, u immer diejenigen Winkel in einer Reihe stehen, als deren Projectionen jene erscheinen können).

---

* Bei dieser und der folgenden Aufgabe dürfen auch nöthigenfalls die Seitenebenen des Prisma's über eine Basis hinaus verbreitet werden.

B	t	u
L	v	w
L	w	v
K	x	y
K	y	x

† Ist KLMN ein Rechteck (K = L, x = v, y = w) oder ein Rhombus (v = w, x = y), so ergeben sich nur 2.2 = 4 Auflösungen; und ihre Anzahl kommt auf 1.2 = 2 herab, wenn KLMN ein Quadrat (L = K, v = w = x = y) ist.

D. **Schnitte der Polyeder unter sich.**

182. Der Schnitt eines Polyeders durch ein zweites gibt in den meisten Fällen eine Figur, deren Seitenlinien in verschiedenen Ebenen liegen.

Verschwindet bei einem solchen Durchschnitt ein Theil des einen Polyeders ganz im zweiten, ohne an einer andern Stelle wieder zum Vorschein zu kommen, so sagt man, das erste bringe ein in das zweite. Fällt ein Stück des einen ganz innerhalb des zweiten, doch so, daß die Endstücke des ersten beiderseits aus letzterem vorragen, so durchbringt das erste das zweite (Fig. 73). Nimmt jedes ein Stück vom andern hinweg, ohne daß das eine an irgend einer Stelle vom andern ganz umschlossen wird, so schneiden sich beide gegenseitig aus (Fig. 71). Im ersten und letzten Falle ist die Schnittfigur eine einzige gebrochene, in sich geschlossene Linie; im zweiten besteht sie aus getrennten Stücken.

Sind die beiden Polyeder durch ihre Projectionen gegeben, so erhält man die Projectionen des Schnitts, wenn man entweder die Geraden projicirt, nach denen die Seiten des ersten Polyeders die Seiten des zweiten schneiden, aber immer nur das Stück einer solchen Geraden beibehält, welches innerhalb der sich schneidenden Seiten beider Polyeder zugleich liegt; oder wenn man die Punkte, in denen die Seiten des ersten von den Kanten des zweiten getroffen werden, mit den Punkten, in welchen die Kanten des ersten den Seiten des zweiten begegnen, in gehöriger Ordnung verbindet. Wie man sich hiebei zu benehmen habe, um einer zu verwickelten Zeichnung auszuweichen, soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

183. Aufg. Ein Prisma und eine Pyramide sind durch ihre Projectionen gegeben. Man soll ihren Durchschnitt pro-

jiciren und die Seiten der Schnittfigur auf dem Netze jedes Körpers angeben.

Fig. 71. **Aufl.** Die h-projicirende Ebene der Kante DG des Prisma's schneidet drei Kanten AC, AS, AB der Pyramide in den Punkten U, V, W, deren H-Projectionen die Punkte u, v, w sind, und deren V-Projectionen man nach Nr. 44 findet; die Pyramide selbst wird also durch jene projicirende Ebene nach einem Dreieck UVW geschnitten, und die Punkte, in denen die Kante DG die Pyramide trifft, können nirgend anders liegen als in den Seiten dieses Dreiecks. Zeichnet man seine V-Projection v'u'w', so findet man die V-Projectionen p^I, p^{II} dieser Punkte, und hieraus auch (nach Nr. 44) die H-Projectionen p_1, p_2. Ebenso ergeben sich die Punkte (p_3, p^{III}), (p_4, p^{IV}), in welchen die Pyramide von der Prismenkante EH geschnitten wird. Wendet man dasselbe Verfahren auch auf die Kante FJ an, so wird man finden, daß ihre V-Projection f'i' die V-Projection der Figur, nach welcher ihre h-projicirende Ebene die Pyramide schneidet (und welche hier ein Viereck ist), gar nicht trifft, woraus folgt, daß die Kante FJ selbst neben der Pyramide hinläuft, ohne ihr zu begegnen. — Die Punkte Q, in denen die Kanten der Pyramide die Seiten des Prisma's durchdringen, findet man auf ähnliche Weise. Die h-projicirende Ebene der Kante SB schneidet das Prisma nach einem Dreieck XYZ, dessen V-Projection x'y'z' von der V-Projection s'b' jener Kante in den Punkten q^I, q^{II} getroffen wird; und wenn man (nach Nr. 44) die zugehörigen H-Projectionen q_1, q_2 bestimmt, so hat man in (q_1, q^I), (q_2, q^{II}) die Schnittpunkte der Kante SB mit den Seiten GF und HF des Prisma's. Die Pyramidenkante SC begegnet den Prismenseiten GF, HF in den Punkten (q_3, q^{III}), (q_4, q^{IV}). Die Kante SA trifft das Prisma gar nicht. Daß auch keine der Kanten an der Basis ABC das Prisma schneiden kann, ersieht man unmittelbar aus den V-Projectionen der gegebenen Körper. — Es kommt nun noch darauf an, die erhaltenen Punkte P und Q gehörig durch Gerade zu verbinden, welche dann die Schnittlinien der Seiten beider Körper darstellen. Hiebei beachte man, daß immer zwei solche Punkte verbunden werden müssen, welche in einer und derselben Seite des Prisma's und zugleich in einer und derselben Seite der Pyramide liegen. Nun liegen z. B. die Punkte P_1 und P_3 beide in der Seite DH des Prisma's und beide in der Seite ASC der Pyramide; also ist $P_1 P_3$ der Schnitt jener Prismenseite mit dieser Pyramidenseite. Eben so ist $P_3 Q_4$ der

Schnitt von HF und ASC. Fährt man so fort, so findet man $P_1 P_3 Q_4 Q_2 P_4 P_2 Q_1 Q_3 P_1$ als Figur des Schnittes beider Körper.

(Es ist klar, daß man zur Auffindung der Punkte P und Q statt der h-projicirenden Ebenen der Kanten auch die v-projicirenden hätte anwenden können; oder auch die h-projicirenden Ebenen der Prismenkanten und die v-projicirenden der Pyramidenkanten; oder umgekehrt.)

Zeichnung des Netzes.

A) Für die Pyramide. Ist das Netz der vollständigen Pyramide entworfen (indem jedes Dreieck aus seinen drei Seiten construirt wurde), so bestimme man auf der Kante SC die Punkte Q_3 und Q_4, indem man die wahren Längen von SQ_3 und SQ_4 sucht, oder SC in Q_3 und Q_4 so theilt, daß

$$SQ_3 : SQ_4 : SC = sq_3 : sq_4 : sC.$$

Zieht man die Gerade sp_1r, theilt AC in R im Verhältniß von $ar : rc$ und SR im Verhältniß von $sp_1 : p_1r$, so findet man im Dreieck SAC den Punkt P_1; ähnlich erhält man den Punkt P_3 und kann nun das Stück $P_1 P_3 Q_4 Q_3$ der Schnittfigur in der Seite SAC des Netzes zeichnen. Auf dieselbe Weise trägt man die übrigen Stücke in die betreffenden Seiten über.

B) Für das Prisma. Man ziehe die Gerade hq_2k, construire das Dreieck HKJ aus seinen drei Seiten, theile KH in Q_2 im Verhältniß von $kq_2 : q_2h$, setze an JK ein Stück KF so, daß

$$FK : KJ = fk : ki$$

und vollende das Parallelogramm FH, so hat man eine Seite des Prisma's und in ihr einen Eckpunkt Q_2 der Schnittfigur. Auf der Kante HE trage man die Punkte P_3 und P_4 auf. Um den vierten Punkt in dieser Seite zu erhalten, lege man durch q_4 eine Gerade, welche zugleich entweder durch ein Eck des Parallelogramms fh geht oder mit einer seiner Seitenlinien parallel läuft, trage diese Gerade in die Seite FH des Netzes über (wie vorhin bei der Pyramide mit der Geraden SR geschah) und bestimme auf ihr (mittels einer Proportionaltheilung) den Punkt Q_4. — Ebenso verfährt man in Bezug auf die übrigen Seiten des Netzes.

Man kann auch, wenn der Raum es gestattet, für die Ebene jeder Seite der Pyramide oder des Prisma's die H-Spur suchen und in der

horizontalen Umklappung der Ebene sowohl die Ecken der Seite selbst als auch die Ecken der Schnittfigur (soweit sie in diese Seite fällt) angeben.

184. Derselbe Weg, welcher zur Auflösung der vorstehenden Aufgabe führt, läßt sich bei jeder andern hieher gehörigen Aufgabe einschlagen, die gegebenen Polyeder mögen sein, welche sie wollen. Eben so paßt die zweite Auflösung der nächstfolgenden Aufgaben (Nr. 185) auch für andere Polyeder als die dort betrachteten.

Bei gegebenen Pyramiden und Prismen lassen sich die auf den Seitenkanten liegenden Eckpunkte der Schnittfigur noch durch ein anderes, den genannten Körpern eigenthümliches Verfahren finden, welches in Nr. 185 Aufl. I, Nr. 186 und Nr. 187 erläutert ist.

185. Aufg. Den Schnitt zweier gegebenen Pyramiden zu projiciren.

A. Die Basen ABC, DEF beider Pyramiden liegen in der HE.

Fig. 72. **Aufl.** I. Wird die eine Pyramide von einer Ebene geschnitten, welche durch die Spitze gelegt ist, so bildet der Schnitt ein Dreieck, dessen Spitze in die Pyramidenspitze fällt. Geht die Ebene zugleich durch eine Kante der andern Pyramide, so kann diese Kante die erste Pyramide nirgendwo anders treffen, als in den Seiten jenes Dreiecks. Jede solche Ebene geht durch die Verbindungslinie ST beider Spitzen, ihre H-Spur also durch die H-Spur R dieser Linie. Zieht man nun z. B. RC, so hat man die H-Spur einer Ebene, in welcher die Kante SC einer Pyramide und die Spitze T der andern liegt, und die Punkte M, N sind die H-Spuren der beiden Geraden TM, TN, nach denen zwei Seiten (DTE und FTE) der Pyramide T von der Ebene geschnitten werden (also ist MNt die H-Projection des dreieckigen Schnitts der Ebene und der Pyramide); die Punkte p_2, p_8, in welchen die Projection Cs den Projectionen Mt, Nt begegnet, sind daher die Projectionen der Punkte P_2, P_8, in denen die Kante SC jene zwei Seiten der Pyramide durchdringt. Eben so kann man die H-Projectionen der Punkte finden, wo die übrigen Kanten der Pyramide S die Seiten der Pyramide T — und die Kanten der letztern die Seiten der erstern treffen; und durch gehörige Verbindung der erhaltenen Punkte ergibt sich die H-Projection der Schnittfigur. (Bei der in der Figur 72 gewählten

Lage der Pyramiden schneidet die eine Basis die andere in den Punkten P_1, P_9, P_6, P_5, welche der Schnittfigur angehören müssen.)

Die V-Projection der Figur entsteht, wenn man die V-Projectionen der Eckpunkte sucht (Nr. 44) und verbindet, wobei sich Proben ergeben.

Aufl. II. Sind die Punkte p_2 und p_8 auf die oben angegebene Weise oder auch nach der Methode der Nr. 183 gefunden, so hat man auch die H-Projectionen $P_1 p_2$, $P_9 p_8$ für die Schnitte $P_1 P_2$, $P_9 P_8$ der Seite BCS mit den Seiten EFT und DET. Der Schnitt der Seite EFT mit der Seite ACS muß durch P_2 gehen und hat seine H-Spur in V, wo EF nnd AC sich begegnen; daher ist Vp_2 die Richtung seiner H-Projection; die Projection selbst aber hat ihren Endpunkt in p_3, wo sie der projicirten Kante tF begegnet, und zugleich ist p_3 die Projection des Schnitts der Kante TF mit der Seite ACS. Da nun die Kante TF auch der Seite DFT angehört, so geht der Schnitt der letztern mit ACS durch P_3; seine H-Spur ist der Durchschnitt W der AC und DF, seine H-Projection hat also die Richtung $W p_3 p_4$. Dadurch bestimmt sich die H-Projection des Punkts P_4, in welchem die Seite DFT von der Kante AS getroffen wird, und somit auch die H-Projection $p_4 P_5$ des Schnitts der Seiten DFT und ABS. — Vom zweiten Stücke der Schnittfigur ist die Seitenlinie $P_8 P_9$ bereits projicirt. Die Projection $p_8 p_7$ würde man erhalten durch Verbindung des Punktes p_8 mit dem Durchschnitt der CA und ED; da aber in der Fig. 72 dieser Durchschnitt in zu große Entfernung fällt, so bestimme man den Punkt p_7 nach Aufl. I, und verbinde ihn mit p_8 und p_6. (Die zur Auffindung desselben angewandte Schnittebene TSRA führt zugleich auch auf den Punkt p_4, was als Genauigkeitsprobe dienen kann.)

Die V-Projection wird wie vorhin gefunden.

Zusatz. Läge das Dreieck DEF ganz innerhalb des Dreiecks ABC, so würde der projicirte Schnitt der Pyramiden eine geschlossene Figur geben, und man müßte bei wiederholter Anwendung des in Aufl. II gelehrten Verfahrens wieder auf denselben Punkt p_2 zurückkommen, von welchem man ausgegangen war. *

* Eine aufmerksame Betrachtung des in der ersten Auflösung angegebenen Verfahrens lehrt, daß man zur Zeichnung der H-Projection der Schnittfigur die V-Projectionen der Pyramiden nicht weiter nöthig hat, als um die H-Spur R der durch die Spitzen gehenden Geraden ST bestimmen zu können; daß man daher immer dieselbe h-projicirende Fläche erhalten wird, wenn man die Spitzen der Pyramiden in den

B) Liegen die Basen nicht in der HE, so denke man sich die gebrochene Oberfläche jeder Pyramide über die Basis hinaus bis zur HE fortgesetzt und zeichne ihre H-Spur (indem man die Spuren der Seitenkanten sucht und verbindet). Dann kann man die Aufgabe in ähnlicher Weise behandeln wie vorhin, und hat nur zu beachten, daß alle jene Stücke der Schnittfigur, welche unter die ursprünglichen Basen der Pyramiden hinabfallen, wegzulassen sind.

Eine oder mehrere Seitenlinien der Schnittfigur können in einer Basis selbst liegen; es kann daher behufs der zweiten Auflösung nöthig werden, außer den Spuren der gebrochenen Oberflächen auch die Spuren für die Ebenen der Basen zu bestimmen. Was die erste Auflösung betrifft, so reicht man mit dem in A gelehrten Verfahren auch hier völlig aus, falls keine der Basenkanten einer Pyramide mit der andern Pyramide zum Durchschnitt kommt. Läßt sich aber nicht mit Sicherheit voraus sehen, daß ein solcher Durchschnitt unmöglich ist, so wende man auf die Basenkanten die Methode der in Nr. 183 enthaltenen Auflösung an.

186. Aufg. Den Durchschnitt zweier gegebenen Prismen M und N zu projiciren.

Fig. 73. **Aufl.** Der Anblick der gegebenen Projectionen von M und N zeigt, daß hier keine von den Kanten, welche den Basen des einen Körpers angehören, den andern Körper trifft.

---

projicirenden Lothen Ss, Tt so verrückt, daß ihre Verbindungslinie wieder durch R geht. Nimmt man noch hinzu, daß man auf eine ähnliche Bemerkung gekommen wäre, wenn man irgend zwei andere Polygone in der HE als Basen der Pyramiden vor sich gehabt hätte, so ergibt sich folgender Lehrsatz:

Schneidet man zwei Parallellinien Ss, Tt durch eine beliebige Anzahl von Geraden, welche alle in einem und demselben Punkte R zusammenkommen, und läßt immer die auf einer und derselben Parallelen gelegenen Schnittpunkte als Spitzen eines Systems von pyramidal gebrochenen Oberflächen gelten, deren gemeinschaftliche Basis in einer durch R gehenden und zu jenen Parallelen senkrechten Ebene beliebig angenommen ist, so können die sämmtlichen Pyramidalflächen der beiden Systeme paarweise zusammengefaßt werden, indem man immer zwei solche, deren Spitzen mit R in gerader Linie liegen, als ein Paar betrachtet. Gibt nun irgend ein solches Paar einen Durchschnitt, so gibt auch jedes andere Paar einen Durchschnitt, und die sämmtlichen Durchschnittsfiguren liegen auf einer prismatisch gebrochenen Oberfläche, deren Kanten den Geraden Ss, Tt parallel sind.

Legt man durch eine Kante AB des Prisma's M eine Ebene parallel zu den Kanten des Prisma's N (Nr. 52), so wird letzteres nach einem Parallelogramm VW geschnitten, und die Punkte P_1, P_2, in welchen die Seitenlinien dieses Parallelogramms von der Kante AB getroffen werden, sind die Schnittpunkte dieser Kante und der betreffenden Seiten des Prisma's N.

Hat man so die Punkte gefunden, in denen die sämmtlichen Kanten von M die Seiten von N durchdringen, so suche man ebenso die Schnitte Q der Kanten von N mit den Seiten von M, und verbinde die erhaltenen Punkte in richtiger Ordnung.

187. Aufg. Den Durchschnitt einer gegebenen Pyramide mit einem gegebenen Prisma zu projiciren, dessen beide Basen ganz außerhalb der Pyramide liegen.

Aufl. Zieht man durch die Spitze der Pyramide eine Parallele L zur Seitenkante des Prisma's, so ist jede durch L geführte Ebene den Prismenkanten parallel und kann daher das Prisma nur nach einem Parallelogramme schneiden. Geht eine solche Ebene zugleich durch eine Seitenkante der Pyramide, so sind die Schnittpunkte dieser Kante mit jenem Parallelogramm die Punkte, in denen die Kante die betreffenden Prismenseiten durchdringt.

Eine Ebene durch L und eine Prismenkante schneidet die Pyramide nach einem Dreieck. Da, wo die Prismenkante diesem Dreieck begegnet, durchdringt sie die betreffenden Pyramidenseiten.

Hat man sämmtliche Kanten beider Körper auf obige Art behandelt, so ist nur noch übrig, die erhaltenen Punkte gehörig zu verbinden.

188. Uebungsaufg. Ein Würfel sei in solcher Stellung projicirt, daß eine seiner Diagonalen senkrecht zu HE ist (Nr. 164), und werde durch eine horizontale Ebene nach einem Dreieck geschnitten. Die H-Projection dieses Dreiecks gelte als Basis eines senkrechten Prisma's, dessen Höhe größer ist als die H-Distanz des höchsten Würfelecks. Man soll den Durchschnitt des Prisma's und Würfels zeichnen.

189. Nicht immer läßt sich sogleich voraussehen, ob zwei durch ihre Projectionen gegebene Polyeder zum Durchschnitt kommen oder nicht. Sind jedoch die gegebenen Körper Pyramiden oder Prismen, so ist die

Entscheidung darüber bald gegeben, und aus den drei vorhergehenden Nummern ist das hiebei zu beobachtende Verfahren leicht abzunehmen.

Es wurde z. B. bei den in Fig. 73 vorliegenden Prismen zuerst die Richtung für die H-Spuren der mit sämmtlichen Seitenkanten parallelen Schnittebenen bestimmt. Hätte nun von den in dieser Richtung gezogenen Spuren keine einzige die beiden (in der HE gelegenen) Basen der Prismen zugleich schneiden können, so würden die Prismen selbst keinen Durchschnitt gegeben haben.

(Warum? — Wie kommt man bei den in Nr. 185, B und Nr. 187 aufgeführten Fällen zur Entscheidung?)

Zweite Abtheilung.

Krumme Linien und krumme Flächen.

Zweite Abtheilung.

Erstes Kapitel.

Von krummen Linien.

190. Gegenstand mathematischer Untersuchungen kann eine krumme Linie nur dann sein, wenn sie nach einem bestimmten Gesetze gebildet ist. Von der Art dieses Gesetzes hängt die Natur der Curve selbst ab, und die Kenntniß desselben muß immer zugleich die Mittel zur Darstellung der Curve liefern.

Die nächste Folge jener Gesetzmäßigkeit in der Entstehung einer Curve ist Gesetzmäßigkeit der Form und Stetigkeit ihres Verlaufs. Hat das Auge das Gesetz der Form erkannt, so reicht eine mäßige Anzahl von Punkten der Curve hin, um von ihr selbst eine allgemeine Vorstellung hervorzurufen.

191. Liegen alle Punkte einer Curve in einer Ebene, so wird die Curve eben- oder einfachgekrümmt genannt; außerdem heißt sie gewunden oder doppeltgekrümmt.

So wenig ein Stück einer gesetzmäßigen ebenen Curve eine gerade Linie bilden kann, eben so wenig kann ein Stück einer nach einem bestimmten Gesetze gewundenen Curve in eine Ebene fallen; kommt eine krumme Linie vor, welche zum Theil in einer Ebene fortläuft und dann sich aus derselben erhebt, so ist diese immer entweder eine völlig gesetzlose Linie, oder eine Zusammensetzung von zwei verschiedenen Curven, deren jede ihr besonderes Entstehungsgesetz hat.

Obgleich (wie eben bemerkt) kein noch irgend meßbarer Theil einer Curve geradlinig sein kann, so ist es doch möglich auf einer Curve

einen Bogen von so geringer Länge zu denken, daß die Abweichung des Bogens von der zu ihm gehörigen Sehne nicht mehr nachzuweisen ist. Ein Bogen, welcher unendlich klein ist, d. h. kleiner als jede noch angebbare Größe, heißt ein Element der Curve, und es ist erlaubt, ein solches Element für gerade zu nehmen. In diesem Sinne stellt eine Curve die Grenze vor, welcher sich eine in oder um sie beschriebene gebrochene Linie fortwährend nähert, wenn man ihre Bruchstücke immer kleiner und deren Anzahl immer größer werden läßt. Vermehrt man z. B. die Seiten eines in einen Kreis beschriebenen Polygons ohne Aufhören, so werden diese Seiten, welche Anfangs Sehnen des Kreises sind, zu Elementen desselben; ihre Menge übersteigt aber dann jede noch so große Zahl, oder sie ist unendlich groß. Eine ebene krumme Linie ist die Grenze für eine in der Ebene liegende gebrochene, eine doppeltgekrümmte die Grenze für eine doppeltgebrochene, d. h. eine solche von welcher irgend drei aufeinanderfolgende Bruchstücke nicht in derselben Ebene liegen; demnach können auch drei aufeinanderfolgende Elemente einer doppeltgekrümmten Linie im Allgemeinen nicht in einerlei Ebene liegen.

Eine Curve kehrt entweder in sich selbst zurück (wie der Kreis) und heißt dann eine geschlossene; oder sie ist nicht geschlossen, d. h. sie setzt sich vermöge ihres Bildungsgesetzes ohne Ende fort und hat einen oder mehrere unendliche Zweige (wie z. B. die Curve in Fig. 87, welche sowohl oberhalb als unterhalb der Geraden SN einen unendlichen Zweig hat). Das Bildungsgesetz einer Curve kann auf mehrere getrennt liegende Theile führen, welche zusammen erst die vollständige Curve ausmachen (wie z. B. in Fig. 89); dann heißt jeder einzelne Theil ein Ast der Curve. Ein solcher Ast kann wieder entweder in sich geschlossen sein oder in's Unendliche laufen.

192. Die Erklärung von einer Tangente, welche gewöhnlich in der Elementargeometrie bei Gelegenheit des Kreises gegeben wird, ist für die höhere Geometrie zu eng, indem eine Gerade sehr wohl nur einen einzigen Punkt mit einer Curve gemein haben und doch keine Tangente sein — aber auch eine Curve in einem Punkte berühren und zugleich in andern Punkten schneiden kann. Um zu dem allgemeinen Begriffe einer Tangente an einer (ebenen oder gewundenen) Curve zu gelangen, lege man durch den als Berührungspunkt gewählten Punkt A und einen

zweiten Punkt B der Curve eine nach beiden Seiten unbegrenzte Gerade G, und denke sich diese Gerade dadurch um A gedreht daß der Punkt B auf der Curve immer näher gegen A rückt. Hat man mit dieser Drehung so lange fortgefahren, bis der Punkt B auf den Punkt A gefallen ist, so stellt G die **Tangente** der Curve im Punkte A dar.* Bei jener Drehung der Linie G wird der Winkel zwischen der angestrebten Tangente in A und der Richtung der Sehne AB äußerst klein, wenn B sehr nahe an A kommt, und kann (mit einem Winkel von noch meßbarer Größe verglichen) als verschwindend angesehen werden, wenn B dem Berührungspunkte A **unendlich** nahe gekommen oder die Sehne AB zu einem Elemente der Curve geworden ist; die Richtung des in A entspringenden Elements ist demnach von der Richtung der Tangente in A nicht mehr zu unterscheiden, und in diesem Sinne sagt man, die Tangente einer Curve sei die **Verlängerung eines Elements**, oder eine Curve habe in jedem Punkte die Richtung ihrer Tangente. Der Winkel, unter welchem eine Curve eine Gerade oder eine Ebene schneidet, ist also der Winkel zwischen dieser Geraden oder Ebene und der durch den Schnittpunkt gelegten Tangente der Curve. Den Winkel, unter welchem eine Curve eine andere schneidet, bringt man zur Anschauung, wenn man durch den Schnittpunkt an jede Curve eine Tangente zieht. Zwei Curven

* Um einzusehen, wie hier eine Gerade durch das **Zusammenfallen** zweier Punkte sich bestimmen kann, bemerke man, daß, während B auf der Curve etwa von rechts her durch den Punkt A auf dessen linke Seite rückt, die Richtung der AB in stetiger Drehbewegung begriffen bleibt. Sowie den beiden Lagen von B, in denen dieser Punkt von rechts und links möglichst nahe an A gerückt erscheint, zwei bestimmte Lagen der AB entsprechen, so muß auch dem Momente des Durchgangs von B durch A eine bestimmte Uebergangslage jener beweglichen Geraden entsprechen, und dieß ist die Tangente in A. — Ist die gegebene Curve eben, so bleibt die bewegliche AB fortwährend in der Curvenebene; also hat man auch die als Tangente auftretende Uebergangslage in dieser Ebene zu denken. Ist die Curve gewunden, so beschreibt die AB eine krumme Fläche, welche man eine Kegelfläche (im weitern Sinne des Worts; vgl. Kap. II) nennt, und dieser stetigen Fläche gehört auch die Tangente an.

(Wendet man die allgemeine Definition der Tangente auf den **Kreis** an, so ergibt sich der Lehrsatz, daß die Tangente auf dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Halbmesser senkrecht steht, als unmittelbare Folge der Definition. Bedeutet nämlich M den Kreismittelpunkt, so sind die Außenwinkel an der Basis des gleichschenkeligen Dreiecks ABM einander gleich und nähern sich rechten Winkeln um so mehr, je weiter die Abnahme von AB fortschreitet.)

berühren sich in einem Punkte, wenn sie in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Tangente haben.

Eine Ebene berührt eine Curve im Punkte A, wenn sie durch die in A an die Curve gelegte Tangente geht.

193. Aus der obigen Erklärung einer Tangente geht hervor, daß die Tangente einer ebenen Curve ganz in der Ebene der Curve liegt; eine durch die Tangente geführte Ebene hat also mit einer solchen Curve entweder gar keinen außerhalb der Tangente gelegenen Punkt gemein, oder sie geht durch alle Punkte der Curve zugleich. Eine gewundene Curve aber wird von einer durch eine Tangente gelegten Ebene (einer berührenden Ebene) im Allgemeinen noch in Punkten geschnitten, welche der Tangente nicht angehören. Durch Drehung der Ebene um die Tangente kann man einen dieser Schnittpunkte dem Berührungspunkte unendlich nahe rücken oder mit ihm zusammenfallen lassen, und dann heißt die Ebene eine Osculations-Ebene der Curve. Die Osculations-Ebene enthält zwei aufeinanderfolgende Elemente der gewundenen Curve, weshalb man sagt, es finde zwischen ihr und der Curve Berührung zweiter Ordnung statt.

194. Eine Gerade, welche eine Curve senkrecht schneidet (d.i. senkrecht auf der durch den Schnittpunkt gehenden Tangente steht), heißt eine Normale der Curve, und die Ebene, in welche alle möglichen Normalen eines und desselben Curvenpunktes fallen, eine Normal-Ebene. Diejenige Normale eines Punktes, welche bei einer einfachgekrümmten Curve in die Ebene der Curve, oder bei einer doppeltgekrümmten Curve in die Osculations-Ebene des Punktes fällt, wird als Hauptnormale unterschieden. Wenn bei einer ebenen Curve das Wort Normale ohne weitern Beisatz gebraucht wird, so versteht man darunter immer die Hauptnormale, indem andere Normalen hier seltener in Betracht kommen.

Zwei Curven, welche durch einen und denselben Punkt gehen, berühren sich in diesem Punkte, wenn sie für ihn einerlei Normal-Ebene haben. (Dagegen können zwei Curven einen gemeinsamen Punkt und für diesen eine gemeinsame Normallinie haben, ohne in Berührung zu stehen.)

A. Ueber ebene Curven.

195. Da die descriptive Geometrie wirkliche graphische Operationen nur an solchen Curven auszuführen hat, welche ganz in der Zeichnungsebene liegen, also nur an einfachgekrümmten, so ist zunächst diese Klasse der Curven einer nähern Betrachtung zu unterwerfen.

In diesem von ebenen Curven handelnden Abschnitt hat man sich nicht nur jede in Rede kommende Curve, sondern auch alle Punkte und Linien, welche in Beziehung zu ihr treten, in der Zeichnungsebene zu denken.

196. Eine ebene Curve construiren, heißt, so viele Punkte von ihr nach ihrem Bildungsgesetze bestimmen, daß man ihren Lauf deutlich erkennen und sie selbst aus freier Hand vollenden kann. Die richtige Zeichnung einer Curve setzt nicht blos eine geübte Hand voraus, sondern auch ein wohlgeübtes Auge, welches aus einer mäßigen Anzahl von Punkten sich die Gestalt der Curve vor dem wirklichen Ziehen zu abstrahiren im Stande ist, nach dem Ziehen aber Verstöße gegen die Stetigkeit ihres Laufes sogleich bemerkt, und sieht, wie sie zu corrigiren sind.

197. Gewisse Curven sind durch eine bestimmte Anzahl von Peripheriepunkten völlig bestimmt (so z. B. der Kreis durch drei Punkte). Ist eine Curve durch n Punkte oder durch ein einbeschriebenes n-Eck bestimmt, und man zeichnet ein zweites n-Eck, welches dem vorigen ähnlich ist, so kann man um dieses nur eine Curve von der Art der vorigen beschreiben, und diese Curve, welche die erste in verjüngtem oder in vergrößertem Maßstabe vorstellt, heißt der ersten ähnlich. Zwei ähnliche Curven können als die Grenzen zweier ähnlichen Polygone betrachtet werden.

Alle möglichen Kreise sind sich ähnlich. Ist überhaupt eine Curve (abgesehen von ihrer Lage in der Ebene) durch ein einziges Bestimmungsstück gegeben (wie der Kreis durch seinen Halbmesser), so sind alle Curven der gleichen Art, welche sich durch Aenderungen in der Größe jenes Bestimmungsstücks ergeben können, unter sich ähnlich.

Tangenten. Normalen.

198. In Beziehung auf eine ebene Curve können, außer der Forderung, durch einen gegebenen Punkt der Peripherie eine Tangente zu

legen, noch die beiden Aufgaben gestellt werden: 1) eine Tangente soll durch einen gegebenen Punkt gehen, der nicht auf der Peripherie, aber in der Ebene der Curve liegt; 2) eine Tangente soll mit einer gegebenen Geraden parallel sein, welche in der Ebene der Curve (oder auch parallel zu dieser Ebene) gezogen ist. Auch in diesen beiden Fällen ergibt sich die Tangente als Grenzlage einer die Curve schneidenden Linie.

1) Ist (Fig. 76) T der gegebene Punkt der gesuchten Tangente und TAB eine beliebig durch ihn gelegte Gerade, welche die Curve in A und B schneidet, so denke man sich diese Gerade in solchem Sinne um T gedreht, daß die Länge der Sehne AB sich verkürzt. Kann diese Verkürzung bis zum Zusammenfallen der Punkte A, B getrieben werden, so ist im Momente des Zusammenfallens die Gerade zur Tangente geworden und der Punkt p, in welchem sich A und B vereinigt haben, ist ihr Berührungspunkt. * — Der gegebene Punkt T kann eine solche Lage gegen die Curve haben, daß keine durch ihn gehende Tangente möglich ist. In andern Fällen gibt es mehr als eine Lage für die Tangente. Um alle durch T gehenden Tangenten zu finden, denke man sich eine unbegrenzte Gerade um T so lange in einerlei Sinn gedreht, bis sie wieder in ihre Ausgangslage zurückgekommen ist, verfolge dabei die Bewegung ihrer Schnittpunkte mit der Curve (deren mehr als zwei auftreten können) und beachte, wie oft und an welchen Stellen je zwei dieser Punkte zusammenfallen. Hiezu aber muß bemerkt werden, daß ausnahmsweise auch ein Zusammenfallen zweier solcher Schnittpunkte vorkommen kann, ohne daß dadurch die von T ausgehende Gerade zu einer Tangente wird; eine solche Ausnahme ist nämlich möglich an Stellen, wo zwei Bögen einer Curve sich durchschneiden oder berühren (Fig. 85, 84), und der Grund der Ausnahme liegt darin, daß dann die beiden Schnittpunkte vor ihrem Zusammenfallen nicht einem und demselben dieser Bögen angehört haben.

2) Soll an eine Curve eine Tangente parallel mit einer in ihrer Ebene liegenden Geraden G gezogen werden, so denke man sich zunächst die Curve durch eine unbegrenzte Parallele P zu G geschnitten und diese, während sie immer parallel zu G bleibt, in solchem Sinne verschoben, daß zwei ihrer Schnittpunkte mit der Curve einander näher rücken. Schreitet die Annäherung bis zum Zusammenfallen fort, so wird die bewegte Gerade P zur Tangente im Punkte der Vereinigung. ** — Es kann parallel

---

* Diese Entstehung der Tangente bleibt im Einklang mit der Erklärung in Nr. 192; denn denkt man sich den Berührungspunkt p als ursprünglich gegeben, nimmt auf der Curve zwei Punkte A, B auf verschiedenen Seiten von p, übrigens willkürlich, an, verlängert jede Seite des Dreiecks ABp unbegrenzt, und läßt die AB auf irgend eine Weise ihre Lage so ändern, daß die Punkte A, B auf der Curve sich einander und also auch dem Punkte p stetig nähern, so werden bei wirklicher Vereinigung der Punkte die Richtungen sämmtlicher Dreiecksseiten in eine Gerade zusammenfallen; die Grenzlage von pA oder von pB ist demnach zugleich die Grenzlage für AB.

** Der Nachweis, daß diese Entstehung der Tangente zur Erklärung in Nr. 192 stimmt, ist bereits in der Anmerkung zu [1] enthalten.

mit G mehrere Tangenten der Curve geben; um sie alle zu finden, hat man die parallele Verschiebung der P über die ganze Ebene (oder, falls die Curve sich schließt, über einen entsprechenden Theil der Ebene) zu erstrecken. Ausnahmsweise können zwei Schnittpunkte der P zusammenfallen ohne daß diese hiedurch in eine Tangente übergeht; dann nämlich, wenn im Punkte des Zusammenfallens die Curve sich selbst durchschneidet oder berührt. — Die Gerade G kann auch so gegen die Curve liegen, daß eine ihr parallele Tangente nicht möglich ist (z. B. wenn in Fig. 89 die G die Lage KF_2 hat; oder wenn in Fig. 87 die QN als gegebene Gerade G gilt).

199. Die Kenntniß der Eigenschaften einer Curve (oder ihres Entstehungsgesetzes, aus welchem sich ihre sämmtlichen Eigenschaften ableiten lassen müssen) lehrt auch immer ein Verfahren, wie man die Tangente durch geometrische Constructionen finden kann, mag für dieselbe der Berührungspunkt oder ein anderer Punkt oder die Richtung gegeben sein. Ist aber blos die Peripherie einer Curve vorhanden ohne nähere Bezeichnung ihrer geometrischen Eigenschaften, so erhält man meist schon durch entsprechendes Anlegen des Lineals (oder, bei gegebener Richtung, des Schiebdreiecks) die Lage der Tangente mit demjenigen Grade von Genauigkeit, welcher bei Zeichnungsoperationen überhaupt gefordert werden kann. Am weitesten geht diese Genauigkeit bei den in Nr. 198 näher besprochenen zwei Fällen; nur kann man hier über den Berührungspunkt in Ungewißheit sein, indem bei geringer Krümmung der Curve die Tangente sich so innig an jene anschmiegt, daß sie (auch bei großer Schärfe des Zeichnungsstiftes) nicht sowohl einen Punkt, als vielmehr ein Stück der Peripherie selbst mit ihr gemein zu haben scheint. Zu genauerer Bestimmung des eigentlichen Berührungspunktes kann man sich einer Hülfscurve bedienen.

1) Ist z. B. an die Curve in Fig. 74 vom Punkte T aus eine Tangente zu ziehen, Fig. 74.
so lege man durch T eine Anzahl gerader Linien, welche die Curve schneiden, halbire die Stücke dieser Geraden, welche als Sehnen in die Curve fallen, und verbinde die sämmtlichen Halbirungspunkte m durch eine stetige krumme Linie. Je mehr sich die schneidende Gerade einer berührenden nähert, um so näher werden die beiden Grenzpunkte der auf ihr liegenden Sehne am Halbirungspunkte liegen, und für die Tangente selbst fallen alle drei Punkte in einen einzigen zusammen, nämlich in den Berührungspunkt, welcher demnach ein Punkt der Curve m′m″m‴.... sein muß und sich um so genauer bestimmen wird, je deutlicher sich der Zug dieser Hülfscurve erkennen läßt; er ist der Punkt, wo die Hülfscurve auf die gegebene Curve stößt. (Trifft erstere, rückwärts fortgesetzt, die letztere in einem zweiten Punkte, so gibt es von T aus eine zweite Tangente; oder fallen von einer durch T gehenden Geraden mehrere Stücke als Sehnen in die gegebene Curve, so sind mehrere Hülfscurven und also auch mehrere Tangenten möglich.)

Noch bessere Dienste leistet eine Hülfscurve, welche sich über die gegebene Curve hinaus fortsetzt, indem dann der Berührungspunkt als wirklicher Durchschnitt zweier Curven sich sichtbar machen muß. Um eine solche Hülfscurve zu erhalten, errichte
Fig. 76. man (Fig. 76) in den Punkten A, B, wo eine der durch T gelegten Geraden die gegebene Curve schneidet, Senkrechte auf AB nach entgegengesetzten Seiten hin, und gebe jeder die Länge der Sehne AB (nämlich $Aq = Br = AB$); ebenso verfahre man in Beziehung auf eine Anzahl anderer von T ausgehender Geraden und verbinde die Endpunkte jener Senkrechten durch eine stetige Curve q′q..rr′. Da, wo diese die gegebene Curve schneidet, liegt der Berührungspunkt einer durch T gehenden Tangente Tp; denn denkt man sich TBA um T so weit gedreht, bis sie Tangente wird, so ist $AB = 0$ geworden, also auch $Aq = Br = 0$. Statt auf den Sehnen Senkrechte zu errichten, kann man auch durch die Endpunkte sämmtlicher Sehnen Parallelen mit einer beliebigen Richtung ziehen, und im Uebrigen wie vorhin verfahren.* — Ein anderer Weg läßt sich einschlagen, wenn der von der Berührung betroffene Curvenbogen flach genug ist, um für einzelne Punkte n desselben unmittelbar die Tangenten (und also auch die Normalen) mit Verläßigkeit ziehen zu können. Sind (Fig. 75)
Fig. 75. n′f′, n″f″,.... verschiedene Normalen, und man fällt auf jede von T aus eine Senkrechte, so bestimmen die sämmtlichen Fußpunkte f′, f″,... eine Curve,** welcher auch der Berührungspunkt p angehören muß; denn die verlangte Tangente ist eben die Senkrechte, welche aus T auf die durch den Berührungspunkt p gehende Normale gefällt werden kann.

2) Hat man an eine Curve eine Tangente parallel mit einer Geraden AB zu legen, so ziehe man eine Reihe von Sehnen parallel mit AB, halbire jede, und verbinde die Halbirungspunkte durch eine stetige Curve. Der Punkt p, wo diese auf die gegebene Curve trifft, ist (aus demselben Grunde wie bei Fig. 74) der Berührungspunkt der Tangente. — Eine über die gegebene Curve hinausgehende Hülfscurve erhält man in gegenwärtigem Falle durch ein Verfahren, welches sich aus entsprechender Abänderung der Fig. 76 leicht ergibt; oder auch (wenn die Curve nicht zu stark gekrümmt
Fig. 77. ist) auf folgende Weise. Man lege durch eine Anzahl von Punkten c′, c″, c‴,..... der Curve nach einerlei Seite hin Tangenten und gebe allen gleiche Länge; durch den Endpunkt t′ der ersten ziehe man in der der Curve zugekehrten Richtung eine Parallele t′d′ mit AB und mache $t'd' = t'c'$; eben so verfahre man in Bezug auf alle übrigen Tangenten und lasse die Parallelen mit AB immer in demselben Sinne gerichtet sein wie die erste. Die Endpunkte d der Parallelen werden anfangs auf der concaven Seite der Curve liegen, endlich aber auf die convexe Seite fallen, so daß eine durch sie geführte stetige Curve die gegebene Curve in irgend einem Punkte p schneiden muß, und dieser Punkt p ist der Berührungspunkt der verlangten Tangente;

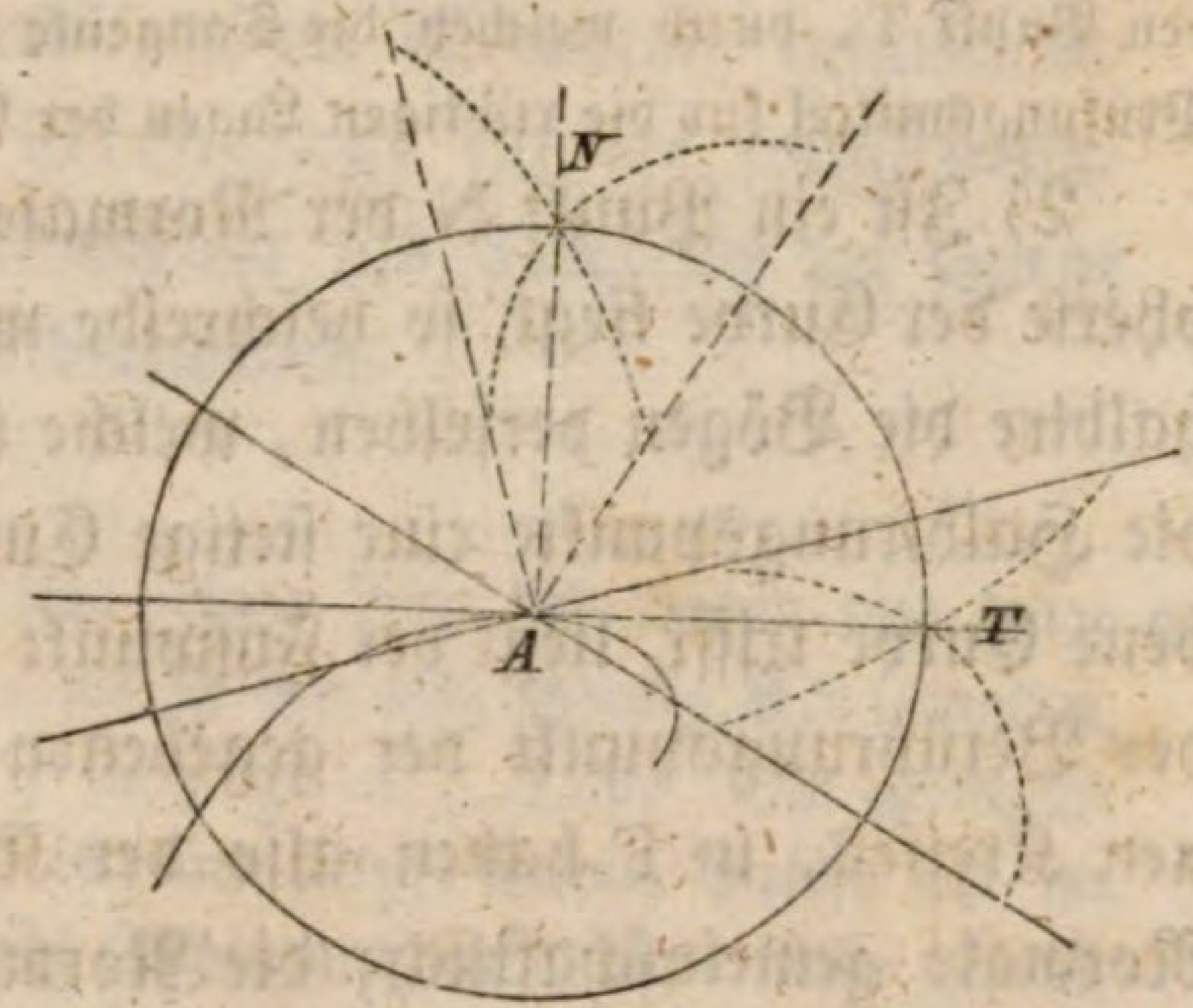
---

* Kehrt man in beiden Fällen die Richtungen der Linien Aq, A′q′,... und eben so die der Br, B′r′... um, so erhält man jedesmal eine neue Curve, welche wieder durch p gehen muß und nöthigenfalls zur völligen Richtigstellung des Punkts p gebraucht werden kann.

** Geht eine Normale nf durch T, so wird die Senkrechte $Tf = 0$, woraus erhellt, daß T auf der Hülfscurve liegt.

denn für letztere müssen offenbar td und tc zusammenfallen, und daher vereinigen sich auch d und c in p. — Endlich ergibt sich für die gegenwärtige sowohl als für die vorige Angabe eine Hülfscurve auch dadurch, daß man über und unter jeder mit AB parallelen oder nach T gerichteten Sehne ein gleichseitiges Dreieck construirt und die Spitzen der Dreiecke stetig verbindet.

3) Die Richtung einer durch einen Punkt A der Curve selbst zu ziehenden Tangente wird unsicher, wenn die Curve in der Nähe des Punktes A ziemlich stark gekrümmt ist. Man könnte sich zwar immer eine zweite, flachere Curve verschaffen, welche mit der gegebenen die Tangente im Punkt A gemein hat; dadurch nämlich, daß man von A aus rechts und links Sehnen zieht, diese durch Verlängerung verdoppelt (oder verdreifacht ꝛc.) und die neuen Endpunkte stetig verbindet. Besser aber ist es, nach einem zweiten Punkt der Tangente zu suchen. Durch Näherungsconstructionen kann ein solcher auf verschiedene Art gefunden werden, z. B. auf folgende. Man beschreibt um A einen Kreis, zieht durch A gerade Linien, welche die Curve und den Kreis schneiden, trägt auf jeder Geraden die ihr angehörige Curvensehne von der Kreisperipherie aus ab (und zwar nach auswärts wenn die Sehne rechts, nach einwärts wenn die Sehne links von A liegt) und führt durch die erhaltenen Punkte eine stetige Curve, welche dann den Kreis in einem der verlangten Tangente zugehörigen Punkte T schneidet. *



200. Bei der Aufgabe, eine Normale einer Curve zu zeichnen, sind in Beziehung auf das, was gegeben ist, dieselben drei Fälle zu unterscheiden wie bei den Tangenten.

1) Bei gegebenem Fußpunkte der Normalen zieht man durch diesen eine Tangente und auf sie eine Senkrechte. Ergibt sich aus der Natur der Curve (ihr Bildungsgesetz als bekannt angenommen) ein einfaches Verfahren, die Normale unmittelbar zu ziehen, so kann man umgekehrt mit ihrer Hülfe die Tangente finden; so z. B. beim Kreise, wo jeder Halbmesser eine Normale ist.

---

* Man sieht leicht, daß die Hülfscurve immer durch A gehen muß; daß man ihre Punkte noch einfacher durch Abtragen des Kreishalbmessers von den Punkten der gegebenen Curve aus erhält; daß man eine zweite auf den Punkt T führende Hülfscurve erhält wenn man die rechts von A liegenden Curvensehnen einwärts vom Kreise anträgt; daß man (unabhängig von T) auf gleiche Weise einen zur verlangten Tangente gehörigen Punkt T′ findet, welcher auf dem Kreise dem Punkt T diametral gegenüberliegt u. s. f. Es fehlt also nicht an Mitteln zur Controle.

Die Normale vor der Tangente zu zeichnen ist aber auch dann möglich, wenn blos die Peripherie der Curve gezeichnet vorliegt, und zwar durch eine Näherungsconstruction, welche der in vorstehender Figur für die Tangente benützten entspricht. Dreht sich ein rechter Winkel um seinen in den Fußpunkt A der Normalen verlegten Scheitel, und wird das Stück, welches der eine Schenkel als Sehne in die Curve legt, auf dem andern Schenkel vom Umfang des um A beschriebenen Kreises aus abgeschnitten, so ist der geometrische Ort des so erhaltenen Punktes eine Curve, welche den Kreis in einem der Normale zugehörigen Punkte N schneidet. (Sucht man, unabhängig von N, auch den Punkt T, durch welchen die Tangente in A gehen muß, so hat man ein neues Prüfungsmittel für die richtigen Lagen der Normale und Tangente.)

2) Ist ein Punkt N der Normalen gegeben, der nicht auf der Peripherie der Curve liegt, so beschreibe man um ihn eine Anzahl von Kreisen, halbire die Bögen derselben, welche in die Curve fallen, und lege durch die Halbirungspunkte eine stetige Curve; in F, wo diese Curve die gegebene Curve trifft, liegt der Fußpunkt der Normalen; denn F ist offenbar der Berührungspunkt der gegebenen Curve und eines um N beschriebenen Kreises, in F haben also der Kreis und die Curve Tangente und Normale gemeinschaftlich; die Normale des Kreises ist aber der Halbmesser NF. (Werden von einem um N beschriebenen Kreise mehrere Bogen durch die gegebene Curve ausgeschnitten, so gibt es von N aus mehrere Normalen.)

Eine andere Hülfscurve findet man unter Anwendung der vorigen Kreise, wenn man die Punkte A, B, in denen ein solcher Kreis die gegebene Curve schneidet, mit N verbindet, auf den Richtungen AN, NB von A und B aus die Sehne AB, jedoch nach entgegengesetzten Seiten der Curve, abschneidet, und dieß in Bezug jedes anderen Kreises entsprechend wiederholt. (Man kann, wie leicht zu sehen, auf letztere Art zwei Hülfscurven zugleich erhalten, welche sich auf der gegebenen Curve in F kreuzen müssen.)

3) Um zu einer Curve eine Normale parallel mit einer gegebenen Geraden zu ziehen, nimmt man eine Senkrechte S zu letzterer an und legt eine Tangente an die Curve parallel mit S; der Berührungspunkt ist der Fußpunkt der Normalen (und es werden so viele Normalen möglich sein, als Tangenten mit S parallel sein können).

Asymptoten.

201. Eine Gerade, welche gegen eine nichtgeschlossene Curve so liegt, daß letztere sich ihr bei immer weiterer Fortsetzung immer mehr (und bis unter jeden beliebig kleinen Abstand herab) nähert, ohne sie je wirklich zu erreichen, heißt eine Asymptote der Curve.

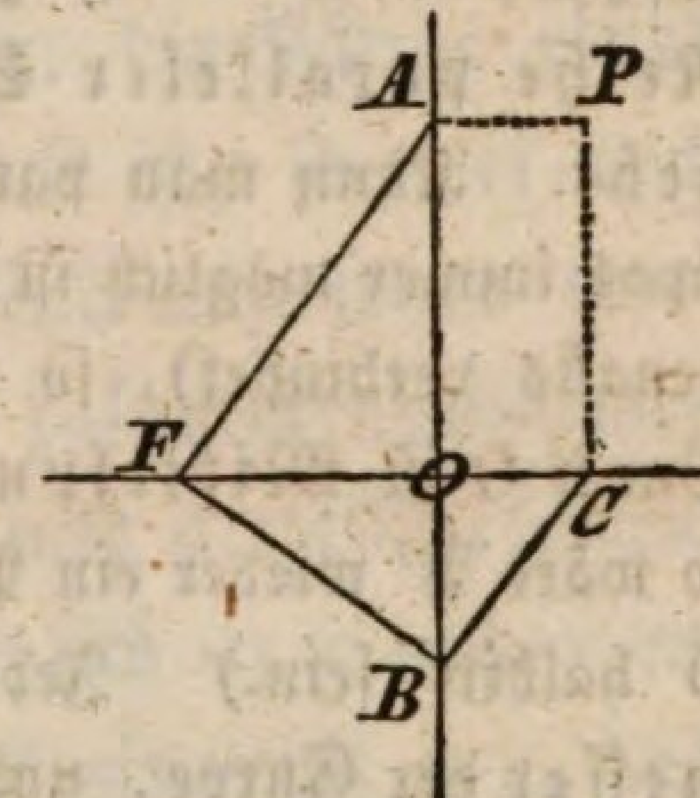
Nicht jede in's Unendliche laufende Curve läßt eine Asymptote zu; dagegen kann es für eine und dieselbe Curve mehrere Asymptoten geben.

Läßt man an einer endlosen Curve eine Tangente in der Art fortgleiten, daß der Berührungspunkt in immer größere Entfernung rückt, so verschwindet zuletzt die Tangente selbst in unendlicher Entfernung, falls die Curve keine Asymptote hat. Besteht aber eine Asymptote, so wird der Winkel jener Tangente gegen die Asymptote bei fortgesetzter Entfernung des Berührungspunktes immer kleiner und kann unter jedes Maß herabsinken. Die Tangente strebt mit der Asymptote zusammenzufallen, oder die Asymptote ist die Grenzlage für die fortgleitende Tangente. Man kann deshalb die Asymptote als Tangente der Curve bei unendlich fernem Berührungspunkt betrachten.

Beispiele.

1) Man lasse um einen festen Punkt A eine gerade Linie sich drehen und trage auf jeder Lage derselben von dem Punkte aus, wo sie eine feste Gerade MN schneidet, jenseits dieser letztern ein constantes Stück ($p'q' = p''q'' = \ldots$) ab. Der geometrische Ort für den Endpunkt (q) dieses Stücks ist eine stetige Curve, welche sich der Geraden MN, als einer Asymptote, zweimal (rechts und links) ohne Ende nähert. (Denn in dem rechtwinkeligen Dreieck pqr bleibt die Hypotenuse constant, der Winkel an p aber nimmt fortwährend ab, mit ihm also auch die gegenüberstehende Kathete qr, d. h. die Entfernung des Curvenpunkts q von MN.) Fig. 78.

2) Zwei sich rechtwinkelig schneidende (unbegrenzte) Gerade AB, FC sind gegeben und auf einer derselben ein Punkt F; auf der andern ist der Punkt A beliebig genommen, AF, FB $\perp$ AF, BC $\perp$ BF gezogen, zuletzt das Rechteck OP vollendet. Mit der Lage des Punkts A ändert sich die von P; der geometrische Ort des Punkts P ist eine endlose Curve mit zwei getrennten Aesten, für welche die gegebenen Geraden AB, FC Asymptoten sind.



3) Zwischen den Schenkeln eines gegebenen (festen) Winkels TOU oder seines Scheitelwinkels liege ein Punkt P so, daß ein Parallelogramm, welches ihn zum Eckpunkt und Stücke der Schenkel zu Seiten hat, von gegebenem Inhalt ist. Der geometrische Ort für P ist eine aus zwei endlosen Aesten bestehende Curve, welcher die Schenkel des Winkels als Asymptoten zugehören; denn bei dem unveränderlichen Inhalt des veränderlichen Parallelogramms wird dessen Höhe um so kleiner, je größer die Grundlinie. Fig. 79.

Anmerk. Diese Curve eignet sich, um beispielsweise an ihr zu zeigen, wie aus dem Bildungsgesetze unmittelbar die Construction einer Tangente hergeleitet werden kann (vgl. Nr. 199). Ist P der Punkt, für welchen die Tangente gezeichnet werden soll, P′ ein zweiter Punkt der Curve (so daß die Parallelogramme OP und OP′ gleichgroß sind), so ist aus bekannten Gründen der Elementargeometrie* QR, || P′P.

---

* Wegen Pv : vP′ = Qv : vR′ ist $\triangle$ PvP′ $\sim$ $\triangle$ QvR′. (Nimmt man P mit

Denkt man sich nun, der Punkt P′ nähere sich dem Punkte P, so nähert sich zugleich R′ dem Punkte R; während die (unbegrenzte) Gerade PP′ sich um P dreht, dreht QR′ sich um Q, und bei dem Zusammenfallen von P′ mit P hat QR′ die Lage QR angenommen. Mithin ist die Tangente in P parallel zu QR; das zwischen die Asymptoten fallende Stück der Tangente ist im Berührungspunkte P halbirt; man erhält sie unmittelbar, wenn man QT = OQ (oder auch RU = OR) macht und TP (oder UP) zieht. — Versetzt man in Gedanken den Punkt P auf der Curve in sehr große und immer wachsende Entfernung, so daß eine der Parallelogrammseiten, etwa OR, immer größer, die andere OQ immer kleiner wird, so wächst auch OU ohne Ende, während OT ohne Ende abnimmt; wodurch sich bestätigt, daß die Tangente TPU die Gerade OU (die Asymptote) zur Grenzlage hat.

Zugleich ergeben sich noch einige wesentliche Eigenschaften der Curve. 1) Legt man durch einen beliebigen Punkt P der Curve eine beliebige Gerade PM (oder P𝔐) und sucht einen andern auf diese Gerade fallenden Punkt der Curve, so findet man nur einen solchen Punkt, da seine Bestimmung von einer durch Q gelegten Parallelen zu PM (oder P𝔐) ausgeht; die Curve kann also von einer Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden. — 2) Es ist PN (= QR′) = P′M; ebenso P𝔑 = 𝔓′𝔐 (= Q𝔑′). Schneidet also irgend eine Gerade die Curve und die Asymptoten, so ist auf dieser Geraden das Stück zwischen dem einen Curvenpunkt und der einen Asymptote gleich dem Stück zwischen dem andern Curvenpunkt und der andern Asymptote. — 3) Hieraus folgt ferner, daß die Halbirungspunkte einer Reihe paralleler Sehnen auf einer Geraden liegen, welche durch O geht. Kann man parallel mit diesen Sehnen eine Tangente an die Curve ziehen (was immer möglich ist, wenn eine solche Sehne zwei Punkte des nämlichen Curvenasts verbindet), so muß der Berührungspunkt auf jene Gerade fallen. — 4) Der Punkt O ist Mittelpunkt der Curve. (Denn wäre O𝔑′ = OR, 𝔑′𝔓′ = RP, so wäre 𝔓′ wieder ein Punkt der Curve, P𝔓′ würde dann aber durch O gehen und in O halbirt sein.) Jede durch den Mittelpunkt gelegte Gerade heißt ein Durchmesser der Curve, und zwar ein reeller, wenn er in den Winkel TOU und seinen Scheitelwinkel fällt (also die Curve schneidet), ein imaginärer, wenn er in die Nebenwinkel von TOU fällt. Die Tangenten in zwei auf einem reellen Durchmesser liegenden Punkten sind parallel und die durch die Asymptoten ausgeschnittenen Stücke gleichgroß, bestimmen also ein Parallelogramm. Zieht man einen andern Durchmesser parallel mit jenen Tangenten, so sieht man leicht, daß jeder dieser beiden Durchmesser die Sehnen halbirt, welche mit dem andern parallel sind. Zwei Durchmesser solcher Art heißen conjugirte oder einander wechselseitig zugeordnete; von zwei conjugirten Durchmessern ist stets der eine reell, der andere imaginär. (Uebrigens heißt ein Durchmesser auch den Sehnen zugeordnet die er halbirt.) — 5) Das Dreieck TOU hat die doppelte Größe des Parallelogramms OP; folglich sind alle Dreiecke, welche je durch eine Tangente und die beiden Asymptoten eingeschlossen

---

einem Curvenpunkte 𝔓′ im Scheitelwinkel zusammen, was im Verlauf der obigen Betrachtung geschehen wird, so ist auch Pv : v𝔓′ = Qv : v𝔑′, also Q𝔑′ ∥ P𝔓′.)

werden, gleichgroß. — 6) Ferner sind alle Parallelogramme gleichgroß, deren Ecken auf den Asymptoten so liegen, daß zwei Gegenseiten die Curve berühren (denn ein solches Parallelogramm ist das Vierfache von einem der zuvor genannten Dreiecke).

Endlich sieht man, daß eine Curve der hier betrachteten Art leicht auf folgende Art gezeichnet werden kann. Zwischen den Schenkeln eines in fester Lage gegebenen Winkels QOR wähle man einen Punkt A, lege durch ihn eine Gerade, welche die Fig. 80. Schenkel des Winkels in den Punkten Q, R trifft, und mache $RB = QA$. Wird die Gerade um A gedreht, so ändert sich die Lage des Punkts B, und sein geometrischer Ort ist eine Curve, für welche die beiden Linien OR, OQ Asymptoten sind.

Maß der Krümmung.

202. Auf einer Curve MN seien rechts und links von dem will- Fig. 81. kürlich gewählten Punkt A zwei andere Punkte X, Y genommen. Verlängert man die Sehnen AX und YA in einerlei Sinn (nach V und Z), so bildet sich ein Winkel $VAZ = \Phi$, der um so kleiner ausfällt, je näher X und Y an A liegen, und einen unendlich kleinen Werth φ annimmt, wenn durch stetige Drehung der Geraden YZ, AV um A die Punkte X, Y unendlich nahe an A rücken (oder die Bögen AX, AY zu Elementen Ax, Ay sich verkürzen). Sowie aber die Länge eines Elements, obwohl unmeßbar klein, dennoch nicht Null ist, so darf auch der unmeßbar klein gewordene Winkel φ nicht als Null angesehen werden; denn würde man annehmen, die beiden in A zusammenstoßenden Curvenelemente Ax und Ay lägen genau auf einer und derselben Geraden G, so müßte von zwei neuen Elementen, welche sich in x und y an die vorigen anreihen, aus dem nämlichen Grunde das eine mit Ax, das andere mit Ay in gerader Linie, beide also wieder auf G liegen u. s. f.; man käme somit in offenbaren Widerspruch mit dem Begriffe der krummen Linie.

Wenn nun die Verlängerungen der in A zusammenstoßenden Elemente nicht absolut zusammenfallen, so könnte die Frage entstehen, welche dieser beiden Verlängerungen als Tangente der Curve in A zu nehmen sei (Nr. 192). Es geht aber aus den Erklärungen in Nr. 192 selbst hervor, daß keine dieser Verlängerungen die Tangente in aller Strenge darstellt, da die unendliche Annäherung der Punkte x und y an A von ihrem wirklichen Zusammenfallen mit A verschieden ist. Handelt es sich indessen um den Winkel der Tangente in A gegen irgend eine Gerade von merklich verschiedener Richtung, so ist es für die Bestimmung dieses

(meßbaren) Winkels völlig gleichgiltig, ob man die strenge Tangente oder die Verlängerung von Ax oder die von Ay annimmt, da die drei zuletztgenannten Richtungen nur unendlich kleine Abweichungen unter sich haben.*

Insofern man der Curve im Punkte A die Richtung ihrer Tangente zuschreibt, an die Stelle der Tangente aber die Verlängerung eines der Elemente Ax, Ay setzen will, hat man zu beachten, daß dann die Curve, im Sinn von N nach M betrachtet, in der Richtung yAz am Punkte A ankommt, in der Richtung Axv ihn verläßt. Der unendlich kleine Winkel φ zeigt also die im Punkte A stattfindende Aenderung der Richtung an und kann zur Beurtheilung der Krümmung an dieser Stelle dienen, wenigstens zur Vergleichung der Krümmung in A mit der Krümmung der Curve in einem andern ihrer Punkte. Ist nämlich A′ irgend ein zweiter Punkt der Curve, in welchem die Elemente A′x′, A′y′ aneinander grenzen, und nimmt man diese sowie die dem Punkte A entsprechenden Elemente sämmtlich unter sich gleich an, so werden im Allgemeinen die beiden unendlich kleinen Winkel φ und φ' zwischen je zwei zusammengehörigen (in einerlei Sinn verlängerten) Elementen einander nicht gleich sein. Die Curve ist in A′ stärker oder schwächer gekrümmt als in A, je nachdem φ' größer oder kleiner ist als φ. — Der Winkel φ heißt der Krümmungswinkel oder Contingenzwinkel der Curve im Punkte A.

---

* Eine unendlich kleine Größe kann nicht blos, sondern muß in Rücksicht einer meßbaren Größe als verschwindend (werthlos) angesehen werden; denn würde die letztere durch das Hinzutreten einer unendlich kleinen eine noch irgend meßbare Aenderung erfahren, so wäre eben das Hinzugetretene noch meßbar, d. h. nicht mehr unendlich klein. — Eine Summe von unendlich kleinen Größen kann nur dann einen meßbaren Werth erhalten, wenn der Summanden unendlich viele sind.

Während von dem Verhältniß einer unendlich kleinen Größe zu einer meßbaren nicht gesprochen werden kann (indem letztere die erstere unendlichmal enthält), können zwei unendlich kleine Größen gleicher Art in ein bestimmtes Verhältniß zu einander treten. Es können z. B. zwei Curvenelemente unter sich gleich oder ungleich sein; denkt man sich alle Elemente einer Curve einander gleich, so sind zwei Curvenbögen, von denen der eine drei, der andere fünf solcher Elemente umfaßt, beide noch unendlich klein, verhalten sich aber wie 3:5. In gewissem Sinne erscheinen also auch die unendlich kleinen Größen meßbar, wenn man als Maßstab selbst eine unendlich kleine Größe voraussetzt, was allerdings dem gewöhnlichen Begriffe des Messens widerspricht.

† Es gibt noch eine andere Auffassung des Krümmungswinkels. Denkt man parallel zu AX und AY Tangenten an die Curve MN gezogen und so bewegt, daß sie den durch Drehung um A sich verkürzenden Sehnen AX, AY stets parallel bleiben, so nimmt der spitze Winkel zwischen beiden Tangenten (und folglich auch der Winkel zwischen den ihren Berührungspunkten entsprechenden Normalen) gleichzeitig mit VAZ den unendlich kleinen Werth φ an; ihre Berührungspunkte (von denen der eine immer zwischen A und x, der andere immer zwischen A und y bleibt) sind dann dem Punkte A von beiden Seiten unendlich nah gerückt; ihr Schnittpunkt hat sich der Peripherie unendlich genähert, ohne wirklich auf sie zu fallen. Bedeuten t, u die Berührungspunkte in ihrer unendlichen Annäherung an A, so sagt man, die Curve habe zwischen t und u die Krümmung φ, oder φ sei der Contingenzwinkel für das Element tu. Um damit die Krümmung der Curve an einer andern Stelle zu vergleichen, hat man dort ein Element t′ u′ von gleicher Länge mit tu zu nehmen. — Die beiden verschiedenen Auffassungen des Contingenzwinkels entspringen daraus, daß man eine Curve entweder als die Grenze eines einbeschriebenen oder eines umbeschriebenen Polygons auffassen kann. Im ersten Falle (der in den früheren Erörterungen vorzugsweise im Auge behalten wurde) gelangt man zum Begriff des Elements, dessen Grenzpunkte immer zwei aufeinanderfolgende Ecken des ursprünglichen Polygons bleiben, durch das Verkürzen der Sehne oder Polygonseite, und man erlaubt sich, das Element für gerade zu nehmen, auch seine Richtung näherungsweise an Stelle der Tangente zu setzen. Im zweiten Falle liegt das Element zwischen den Berührungspunkten zweier aufeinanderfolgenden Tangenten (das Wort im strengen Sinne genommen) und man darf von seiner Krümmung nicht ganz absehen, weil sonst der (Contingenz-) Winkel zwischen den durch die Grenzpunkte gelegten Normalen Null wäre.

Zu einem wirklichen Maße für die Krümmung ist der Contingenzwinkel nicht geeignet, theils wegen seiner unendlichen Kleinheit, theils weil er von der unendlich kleinen Länge der Elemente mit abhängt. Man hat deßhalb zu einem andern Mittel, die Krümmung einer Curve an bestimmten Stellen zu veranschaulichen, gegriffen, und dieses besteht in der Vergleichung kleiner Curvenbögen mit Kreisbögen. Ein Kreis nämlich hat in allen seinen Punkten einerlei Krümmung, was schon daraus hervorgeht, daß er in sich selbst gedreht werden kann, andererseits durch obige Erörterungen über Contingenzwinkel bestätigt wird. (Umkehrt läßt sich auf Grund dieser Erörterungen der Beweis führen, daß eine ebene Curve, welche in allen ihren Punkten gleichstark gekrümmt ist, ein Kreis sein muß.) Zwei Kreise aber von verschiedenem Halbmesser haben verschiedene Krümmung. (Denn sind AX, AY zwei gleiche Sehnen eines Kreises, A′X′, A′Y′ zwei ebensogroße Sehnen eines andern Kreises, so wird der spitze Winkel zwischen den Richtungen zweier solcher Sehnen in dem mit kleinerem Halbmesser beschriebenen Kreise größer sein als im andern; oder sind TU, T′U′ gleichlange Bögen

ungleicher Kreise, so ist der spitze Winkel zwischen den Tangenten in T und U ein anderer als der zwischen den Tangenten in T' und U'; und dieß Alles behält seine Geltung, wie klein auch jene Sehnen oder diese Bögen gedacht werden mögen, wenn sie nur immer am einen Kreis ebensogroß bleiben wie am andern.) Da nun vom Grad der Krümmung eines Kreises die unmittelbare Anschauung eine deutliche Vorstellung gibt, so wird man auch die Krümmung einer andern Curve für einen bestimmten Punkt mit Sicherheit beurtheilen können, wenn man den Kreis kennt, welchem sich die Curve in jenem Punkte am meisten nähert.

Fig. 81. **203.** Legt man in eine Curve MN von einem beliebigen Punkte A aus zwei Sehnen AX, AY, und errichtet auf ihnen aus ihren Mitten D, E Senkrechte, so ist deren Durchschnitt C der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Curve MN in den drei Punkten X, A, Y (und gewöhnlich noch in andern Punkten) schneidet. Rückt der eine Schnittpunkt X unendlich nahe an A, so wird AX zu einem Elemente sowohl des Kreises als der Curve MN, oder es berührt der Kreis die Curve in A. Dabei kann aber der Kreis noch jeden beliebigen Halbmesser haben, da über die Lage des Punktes Y nichts bestimmt ist, oder es gibt unendlich viele Kreise, welche eine Curve in einem gegebenen Punkte A berühren. (Die Mittelpunkte aller solcher Kreise liegen in der Normalen des Punktes A.) Unter diesen Kreisen legt sich derjenige am innigsten an die Curve an, den man erhält, wenn auch der Punkt Y unendlich nahe an A rückt, so daß zwei Elemente Ax, Ay dem Kreise und der Curve gemeinschaftlich entsprechen. Zwischen der Curve und diesem Kreise findet Berührung zweiter Ordnung oder Osculation statt; der Kreis selbst heißt Osculations- oder Krümmungskreis, sein Halbmesser Krümmungshalbmesser und sein Mittelpunkt C Krümmungsmittelpunkt für den Punkt A der Curve, weil letztere in der nächsten Umgebung des Punktes A die nämliche Krümmung hat wie dieser Kreis.

Unter der Voraussetzung, daß AX und AY unendlich klein, gehen die Linien DC, EC in Normalen der Curve über; der Krümmungsmittelpunkt C erscheint sonach als Durchschnitt der Normalen zweier Punkte, welche zu beiden Seiten von A ihm unendlich nahe liegen. Je kleiner der Contingenzwinkel, in um so größerer Entfernung von A fällt also

der Krümmungsmittelpunkt, oder es wächst der Krümmungshalbmesser wie die Krümmung der Curve abnimmt, und eine Curve hat in demjenigen Punkte ihre größte Krümmung, für welchen der Krümmungshalbmesser am kleinsten wird. Dieß läßt sich noch genauer aussprechen. Es ist aus der Elementargeometrie bekannt, daß, wenn zwei auf verschiedenen Kreisen genommene Bögen gleiche Länge haben sollen, die zugehörigen Centriwinkel sich umgekehrt verhalten müssen wie die entsprechenden Halbmesser. Sind nun t, u die beiderseits von A liegenden Fußpunkte der beiden Normalen, in welche die Linien CD, CE übergehen, so daß der unendlich kleine Curvenbogen tAu zugleich ein Bogen des Krümmungskreises, der zugehörige Centriwinkel gleich dem Contingenzwinkel ist, und nimmt man in Beziehung auf einen andern Punkt A der Curve den entsprechenden Bogen $t'A'u' = tAu$, so stehen die Contingenzwinkel der Curve an den Stellen A und A' (und also die dort stattfindenden Krümmungen selbst) im umgekehrten Verhältniß mit den entsprechenden Krümmungshalbmessern.

Will man zu einer möglichst scharfen, von der Einführung der Curvenelemente völlig freien Erklärung des Krümmungskreises für den Punkt A gelangen, so kann man von einem Kreise ausgehen, welcher in A mit der Curve die strenge Tangente gemein (seinen Mittelpunkt also auf der Normalen für A) hat, und diesen Berührungskreis sich so ändern lassen, daß ein Punkt Y, in welchem er die Curve noch schneidet, sich dem Punkte A bis zum wirklichen Zusammenfallen nähert. Bewegt sich der Punkt Y auf der Curve von rechts durch A hindurch und über ihn nach links hinaus, so wird der Mittelpunkt des veränderlichen Kreises stetig auf der Normale fortschreiten; diejenige Lage des Mittelpunkts, welche dem Momente des Zusammenfallens von Y und A entspricht, ist der Krümmungsmittelpunkt. — Obwohl dieser Punkt weder mit dem Durchschnitt der obengenannten Normalen in t und u noch mit dem Schnitt einer dieser Normalen und der Normale für A in aller Strenge zusammenfällt, kann man ihn (solange die Krümmungen für zwei durch endliche Abstände getrennte Curvenpunkte verglichen werden) unbedenklich mit einem jener Schnittpunkte vertauschen, da diese ihm unendlich nahe liegen.

† Schneidet ein Kreis, welcher die gegebene Curve in A berührt, diese noch in mehreren Punkten, so wird, während der Kreis durch Zusammenfallen des einen Schnittpunkts mit A in den Osculationskreis übergeht, jeder andere Schnittpunkt in eine bestimmte Lage auf der Curve einrücken. In einem besondern Falle kann aber ein zweiter Schnittpunkt, zugleich mit dem ersten, ebenfalls nach A fallen; dann nämlich,

wenn die Normale des Punkts A eine Axe der Symmetrie* für die gegebene Curve ist. Geht z. B. ein Kreis, welcher die Curve der Fig. 87 im Scheitel S berührt, durch den Punkt P, so geht er auch durch dessen symmetrischen Gegenpunkt 𝔓; sobald also P nach S gerückt ist, wird auch 𝔓 sich mit S vereinigt haben. In einem solchen besondern Falle nennt man die Berührung zwischen dem Kreise und der Curve eine Berührung dritter Ordnung. (Sowie von den Punkten, die ein Kreis überhaupt mit einer gegebenen Curve gemein haben kann, zwei zusammengefallen sind, wenn der Kreis mit der Curve in Berührung erster Ordnung tritt, drei aber, wenn der Kreis eine Berührung zweiter Ordnung mit der Curve eingeht, so ergibt sich Berührung dritter Ordnung durch das Zusammfallen von vieren jener Punkte.)

Aus der symmetrischen Gestaltung einer Curve folgt, daß die dem Scheitel auf beiden Seiten zunächst liegenden Bögen seines Krümmungskreises beide außerhalb oder beide innerhalb der Curve fallen. In gewöhnlichen Fällen aber geht ein Krümmungskreis in seinem Berührungspunkte von der concaven Seite der Curve auf ihre convexe Seite über. Ist nämlich A ein gewöhnlicher Punkt der Curve, AB seine Normale, und setzt man eine zweite Normale PB, welche einem benachbarten Curvenpunkte P rechts von A entspricht, so in stetige Bewegung, daß P nach A und darüber hinaus nach links geht, so wird der auf AB fortrückende Schnittpunkt B beider Normalen beim Durchgang durch den Krümmungsmittelpunkt C den Sinn seiner Bewegung in der Regel nicht ändern; das Stück PB der beweglichen Normalen wird also, wenn es unmittelbar vor dem Zusammenfallen mit AB größer als der Krümmungshalbmesser war, unmittelbar nach dem Zusammenfallen kleiner als dieser sein d. h. P liegt vorher außerhalb, nachher innerhalb des Krümmungskreises. (Ist dagegen AB Symmetral-Axe, so wird B, nachdem die Lage C erreicht ist, rückläufig.)

204. An vorstehende Betrachtungen anknüpfend, findet die Mathematik Mittel, für jeden Punkt einer hinreichend definirten Curve den Krümmungshalbmesser und die Lage des Krümmungsmittelpunkts genau

---

* d. i. eine Gerade, welche jede zu ihr senkrechte Sehne der Curve halbirt, mithin die Curve selbst in zwei symmetrisch zu einander liegende (und congruente) Hälften theilt. Es ist klar, daß es nicht für jede Curve eine solche Axe gibt; andererseits kann eine Curve auch mehr als eine haben.

Ein Punkt, in welchem eine Curve ihrer Symmetral-Axe begegnet ohne sich selbst dort zu schneiden, heißt ein Scheitel der Curve.

Wenn im Scheitel die symmetrischen Hälften einer Curve einander berühren, so ist die gemeinsame Tangente die Symmetral-Axe. Außerdem steht die Tangente im Scheitel senkrecht auf der Symmetral-Axe (vgl. Nr. 198, 2), oder letztere ist eine Normale der Curve.

zu bestimmen. Die zeichnende Geometrie sieht sich aber für solche Bestimmungen auf Näherungsconstructionen angewiesen, wenn blos die Peripherie einer Curve gegeben ist, deren Eigenschaften man nicht genauer kennt.

Soll für einen Punkt A der gegebenen Curve MN (Fig. 82) der Krümmungshalbmesser auf graphischem Wege gefunden werden, so ziehe man vorerst die Normale AB (Nr. 200), lege dann in die Curve von A aus nach beiden Seiten hin eine Anzahl Sehnen AM′, AM″, ..., AN′, AN″...., halbire jede dieser Sehnen senkrecht, errichte aus dem Punkte, wo die Halbirungslinie die Normale AB schneidet, auf letzterer eine Senkrechte nach der Seite zu, auf welcher die betreffende Sehne liegt, und mache diese Senkrechte jener Sehne gleich. Durch gehörige Verbindung der Endpunkte sämmtlicher Senkrechten erhält man eine stetige Curve, auf welcher der gesuchte Krümmungsmittelpunkt liegen muß (wie man sogleich einsieht, wenn man sich AM′ und AN′ bis in's Unendliche abnehmend denkt); und da jener Punkt auch in der Normale AB liegt, so fällt er in C, wo die Normale jene Hülfscurve schneidet. Der Krümmungshalbmesser ist CA. Fig. 82.

Ein Uebelstand hierbei ist, daß die Winkel, unter denen die Mittenlothe der Sehnen die Normale schneiden, zuletzt sehr klein werden. Die hiebei zu befürchtenden Fehler reduciren sich auf ihre Hälften, wenn man die Senkrechten auf den Sehnen nicht in deren Mitten, sondern in den Endpunkten M, N errichtet und dann die auf der Normalen von A aus abgeschnittenen Stücke halbirt. — Statt die auf der Normale errichteten Senkrechten den Sehnen selbst gleich zu machen, kann man ihnen die doppelten (dreifachen ꝛc.) Längen der Sehnen geben, auch die Richtungen dieser Senkrechten umkehren, woraus Mittel zur Controle entspringen.

Eine Hülfscurve anderer Art ergibt sich, wenn man durch den Endpunkt M (oder N) jeder Sehne eine Parallele zu AC zieht und auf ihr von M (oder N) aus die Länge des betreffenden Mittenlothes abträgt; oder auch indem man auf der Tangente AT von A aus die Länge der Sehne (auf einerlei Seite mit der Sehne) abträgt und im erhaltenen Punkte das entsprechende Mittenloth gleichlaufend mit AC aufsetzt.

† Lassen sich für eine erst zu construirende Curve die Krümmungsmittelpunkte direct aus dem Gesetz der Curve finden, so bieten, nach Bestimmung weniger Peripheriepunkte, die zugehörigen Krümmungskreise eine sichere Anlehnung für den Zug der Peripherie selbst.

Besondere Punkte.

205. In Beziehung auf die Peripherie einer ebenen Curve kann man eine convexe und eine concave Seite unterscheiden, indem (wenn die Curve als Grenzfall eines in sie beschriebenen Polygons gilt) der Winkel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden (unverlängerten) Elementen entweder $> 180^0$ oder $< 180^0$ erscheint, je nachdem man ihn von der einen oder der andern Seite auffaßt. Die convexe Seite eines

Winkels ist aber diejenige, auf welche die Rückverlängerung eines Schenkels fällt; daher wird die Verlängerung irgend eines Curvenelements, mithin auch die Tangente in irgend einem Punkte der Curve, wenigstens anfänglich (in der Nähe jenes Elements) auf der converen Seite der Curve liegen. Umgekehrt: wenn man von einer Geraden, welche mit einer Curve einen Punkt T gemein hat, beweisen kann, daß entweder alle ihre übrigen Punkte oder doch wenigstens die in der Nähe von T rechts und links auf ihr genommenen Punkte auf der converen Seite der Curve liegen, so ist die Gerade eine Tangente der Curve und T der Berührungspunkt.

In der Regel liegt die Tangente einer Curve so, daß die dem Berührungspunkte benachbarten Bogenstücke auf einerlei Seite derselben fallen. Oefters aber läßt sich auch auf einer Curve ein Punkt von der Beschaffenheit finden, daß, wenn man durch ihn eine Tangente zieht, der Curvenbogen rechts vom Berührungspunkte diesseits der Tangente fällt, der Bogen links aber jenseits. Ein solcher Punkt heißt ein Wendepunkt der Curve, weil von ihm aus diejenige Seite der Curve, welche anfangs die concave war, zur converen wird. So ist in Fig. 83 der Punkt W ein Wendepunkt.

Fig. 83. Schneidet eine Gerade die in Fig. 83 dargestellte Curve in drei Punkten V_1, V, U_1, so kann man den einen Punkt V_1 mit V zusammenfallen machen, wenn man die $V_1 U_1$ durch Drehung um V in die berührende Lage VU bringt; der dritte Schnittpunkt U, welcher von dem Berührungspunkte V immer durch ein endliches Bogenstück getrennt bleibt, muß jenseits des Wendepunkts liegen, wenn V diesseits liegt; denn zwischen V und W krümmt sich die Curve von der Tangente VU ab, und erst über W hinaus wendet sie sich gegen die Tangente zurück. Ebenso würde eine Tangente, deren Berührungspunkt auf dem Curvenzweige WU_1 liegt, einen Schnittpunkt auf dem andern Zweige WV_1 geben. Verlegt man nun den Berührungspunkt V in den Wendepunkt W, so muß auch der Schnittpunkt U in W fallen; denn da W sowohl dem Zweige WU_1 als dem Zweige WV_1 angehört, so muß (nach dem Vorigen) U sowohl auf WV_1 als auf WU_1 liegen, was allein vom Punkte W gilt. Demnach stellt der Wendepunkt, als Berührungspunkt einer Tangente betrachtet, die Vereinigung von drei Schnittpunkten vor, und die Tangente selbst hat mit der Curve zwei Elemente gemein; sie vertritt also hier den Krümmungskreis. Da nun eine gerade Linie

die Grenze für einen Kreisbogen ist, dessen Halbmesser ohne Aufhören zunimmt, so sagt man, der Krümmungshalbmesser für den Wendepunkt einer Curve sei unendlich groß. Dieß zeigt sich auch dadurch, daß die beiden in der nächsten Nähe vom Wendepunkte errichteten Normalen, welche durch ihren Schnitt den Krümmungsmittelpunkt geben sollen, parallel laufen (sich erst in unendlicher Entfernung schneiden), indem, wie vorhin bemerkt, die beiden im Wendepunkte zusammenhängenden Elemente, auf denen jene Normalen senkrecht sind, in die Tangente des Wendepunkts fallen, oder der Contingenzwinkel im Wendepunkte Null ist.

Auf einer Curve, welche von einer Geraden im Allgemeinen in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann, ist kein Wendepunkt möglich, weil ein solcher das Zusammenfallen dreier Schnittpunkte voraussetzt.

206. Eine Curve kann von einem Punkte aus die Richtung ihres Zuges plötzlich in die entgegengesetzte verwandeln, und ein solcher Punkt heißt dann ein Rückkehrpunkt. Denkt man z. B. eine Curve ARB Fig. 84, I, II. von einem bewegten Punkte beschrieben, welcher jeden Augenblick die Richtung seiner Bewegung um einen sehr kleinen Winkel gesetzmäßig ändert, und läßt diesen Winkel für den Punkt R Null sein, während zugleich der beschreibende Punkt rückläufig wird, so ist R ein Rückkehrpunkt. Unter obigen Voraussetzungen muß der beschreibende Punkt nach Ueberschreitung des Punktes R dasselbe Element noch einmal durchlaufen, welches er unmittelbar vor Erreichung dieses Punktes zurückgelegt hat; in diesem Doppelelemente berühren sich also die zwei Zweige AR, BR der Curve, oder die Verlängerung des genannten Elements ist eine gemeinschaftliche Tangente beider Zweige. Liegen diese Zweige auf verschiedenen Seiten dieser Tangente (wie in Fig. 84, I), so sagt man, die Curve bilde im Rückkehrpunkte eine Spitze; liegen die Zweige auf einerlei Seite der Tangente (wie in Fig. 84, II), so hat die Curve dort einen Schnabel.

Um ein Beispiel für die Entstehung eines Rückkehrpunkts zu haben, lasse man in Fig. 87 eine Gerade als Normale der Curve PS𝔓 fortschreiten und verfolge dabei den Weg des dem jeweiligen Fußpunkt entsprechenden Krümmungsmittelpunkts. Auf der beweglichen Normalen ist dieser Punkt selbst in Bewegung, und zwar gegen die Curve hin, solange der Fußpunkt von P gegen S rückt, dagegen von der Curve weg, wenn der Fußpunkt über S hinaus gegen 𝔓 rückt; denn die Krümmung der Curve PS𝔓 ist im Scheitel S am größten und nimmt mit der Entfernung von S ab.

Der Krümmungskreis für den Rückkehrpunkt einer Curve reducirt sich auf einen Punkt, oder der Krümmungshalbmesser ist Null; denn da die zwei dem Rückkehrpunkte zunächst benachbarten Curvenelemente sich decken, so müßten auch zwei aufeinander folgende Elemente des Krümmungskreises in einanderfallen, was nicht möglich ist, so lange der Halbmesser eine noch irgend meßbare Länge hat.

Anmerk. Wäre an die Curve Fig. 83 oder Fig. 84, I eine Tangente parallel mit einer gegebenen Geraden zu ziehen und diese Gerade hätte zufällig eine solche Lage, daß die gesuchte Tangente die Curve im Wendepunkt W oder im Rückkehrpunkt R berühren müßte, so würde sich ausnahmsweise die Tangente nicht auf die in Nr. 198, 2 besprochene Art ergeben, da in der Nähe von W oder R die Curve von einer zur betreffenden Tangente parallelen Geraden in nur einem Punkte geschnitten wird. (Aehnliches gilt in Bezug auf Fig. 84, II; dort schneidet zwar eine zu RT Parallele die Curve in zwei Punkten, deren Zusammenfallen aber hier nicht der wahre Grund der Berührung ist.)

207. Ein Punkt, durch welchen eine Curve öfter als einmal geht, heißt ein mehrfacher Punkt derselben. So ist p ein Doppelpunkt der Curve A; q ein dreifacher Punkt der Curve B.

Fig. 85, I—IV.

In einem nfachen Punkte sind n Tangenten möglich, wenn die Bögen der Curve sich in demselben durchschneiden (Fig. II); aber nur eine Tangente, wenn sich die Bögen sämmtlich berühren (Fig. III); in Fig. IV läßt der dreifache Punkt r zwei Tangenten zu, weil in ihm zwei Bögen sich berühren, während sie vom dritten geschnitten werden. Ferner giebt es für einen nfachen Punkt n Krümmungshalbmesser, welche jedoch in besondern Fällen zum Theil oder auch alle unter sich gleich sein können.

† Wenn man in Fig. 78 (Nr. 201, 1) das constante Stück pq auf den betreffenden Linien auch nach der Seite von A hin abträgt, so erhält man einen zweiten Zweig der Curve, welcher, falls jenes Stück nicht kleiner ist als der Abstand des Punkts A von der Geraden MN, durch A geht; und zwar ist A ein Doppelpunkt, wenn pq größer als jener Abstand ist, ein Rückkehrpunkt aber wenn pq dem Abstand gleich ist.

208. Es kann zuweilen eine Zusammengehörigkeit zwischen einer Curve und einem einzelnen Punkt, welcher gar nicht auf ihrer Peripherie liegt, stattfinden, ungefähr in der Weise, wie in gewissen Fällen zwei getrennt liegende Curvenzweige als zusammengehörig gedacht werden müssen. Von einem solchen vereinzelt auftretenden Punkte sagt man, er gehöre als isolirter Punkt zur betreffenden Curve.

Fragt man z. B. nach dem geometrischen Ort eines Punkts, der von der Peripherie eines gegebenen Kreises einen gegebenen Abstand hat, so findet man als voll-

ständigen Ort zwei concentrische Kreise, welche nothwendig zusammengehören. Einer dieser Kreise reducirt sich auf einen Punkt, wenn der gegebene Abstand dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich ist, und in diesem Falle besteht also der gesuchte Ort aus einem Kreise und seinem Mittelpunkt (als isolirtem Punkt).

Isolirte Punkte können unter Anderm bei ebenen Schritten krummer Flächen vorkommen. Zieht man z. B. durch den Punkt P eines Kreises eine Tangente an ihn, stellt sich die Fläche vor, welche durch Umdrehung des Kreises um diese Tangente erzeugt wird, und legt durch P eine Ebene E unter beliebigem Winkel gegen die Tangente, so besteht der vollständige Schnitt dieser Ebene und der krummen Fläche aus einer Curve und dem isolirten Punkte P. (Eine Ebene, welche parallel zur E und in geringem Abstand von ihr angenommen wird, bringt einen aus zwei getrennten Zweigen bestehenden Schnitt hervor; durch fortgesetztes Annähern der Parallelebene an die E wird der innere Zweig sich mehr und mehr zusammenziehen und zuletzt in den Punkt P übergehen.)

Rectification.

209. Um eine Curve zu rectificiren, d. h. ihre Länge in gerader Linie anzugeben, müßte man ihre einzelnen Elemente, welche ursprünglich unter unendlich kleinen Contingenzwinkeln zusammenhängen, alle in einerlei Richtung aneinanderfügen. Da aber die Elemente selbst unendlich kleine Größen sind, ihre Anzahl dagegen unendlich groß ist, so kann man diese Aufgabe graphisch nie genau lösen, sondern muß sich mit einem annähernden Resultate begnügen. Ein solches erhält man, wenn man auf der Curve Bogenstücke von so geringer Länge abnimmt, daß ihre Abweichung von den zugehörigen Sehnen nicht mehr auffällt, und dann diese kleinen Sehnen mittels des Zirkels auf eine Gerade aufträgt (wobei natürlich vorausgesetzt werden muß, daß die Curve selbst möglichst richtig und scharf gezeichnet ist).

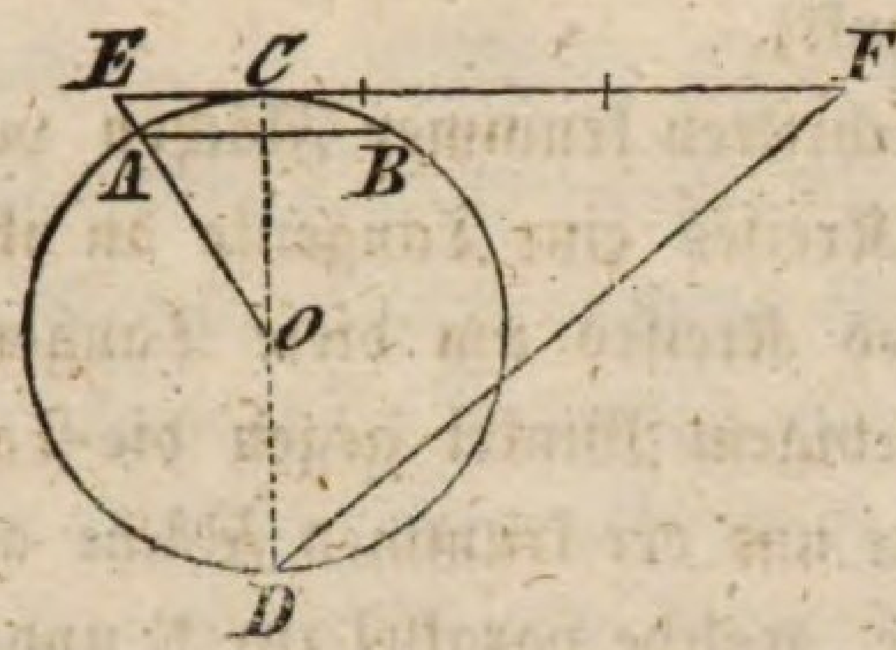
Läßt sich die Curve in mehrere congruente Stücke zerlegen (wie z. B. die in Fig. 88), so braucht man nur eines dieser Stücke auf die angegebene Weise zu rectificiren. In dieser Art könnte man auch beim Kreise verfahren; besser aber thut man hier, eine der folgenden Näherungsconstructionen anzuwenden.*

1) Sucht man eine Linie, welche sich zum Durchmesser verhält wie 11 : 7, so hat man nahezu die Länge des Halbkreises.

2) Man kommt der Peripherie des ganzen Kreises nahe, wenn man das Dreifache des Durchmessers um ein Fünftel der Quadrantensehne vermehrt.

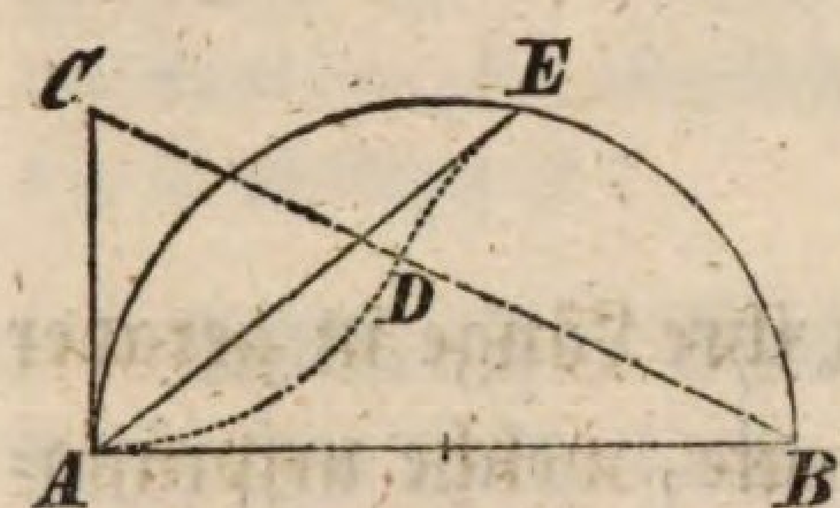
* Hat man Rectificationen ganzer oder halber Kreisumfänge öfter vorzunehmen, so wird man eine solche Rectification ein für allemal ausführen und die übrigen durch Bestimmung proportionaler Linien ersetzen.

Ist nämlich d = 2r der Durchmesser, so ist die Quadrantensehne $= r\sqrt{2}$, ihr Fünftel $= \frac{1}{10} d\sqrt{2} = d.\,0,1414\ldots$



3) Es sei AB eine dem Halbmesser gleiche Sehne, der Durchmesser CD senkrecht zu ihr, EF Tangente in C. Zieht man durch A und den Kreismittelpunkt die Gerade OE und macht EF dem Dreifachen des Halbmessers gleich, so ist DF sehr nahe die Rectification des Halbkreises.

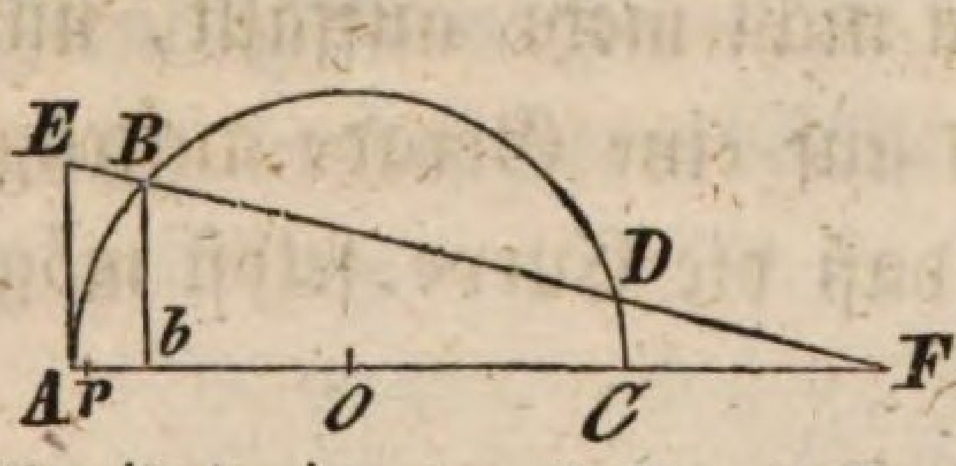
Denn bezeichnet r den Halbmesser, so ist $CE = \frac{r}{\sqrt{3}}$, $CF = r\,(3 - \frac{1}{\sqrt{3}})$, $DF^2 = CF^2 + 4r^2 = r^2.\,(13^1/_3 - 2\sqrt{3})$, $DF = r.\,3,141533$.



4) Ist AB ein Durchmesser, AC Tangente und gleich dem Halbmesser r, CD = CA, BE = BD, so weicht AE wenig von der Rectification des Quadranten ab.

Man hat $BC = r\sqrt{5}$, $BE = r\,(\sqrt{5} - 1)$, $AE^2 = 4r^2 - BE^2 = 2(\sqrt{5} - 1)r^2$, $AE = 1,5723.r$, während die Rechnung für den Quadranten $1,5708.r$ ergibt.

5) Soll ein Kreisbogen rectificirt werden, von welchem man weiß, daß er genau $^1/_3$, $^1/_5$, $^1/_6$ rc. des ganzen oder halben oder Viertels-Kreises ist, so geht man von einer der obigen Constructionen aus. Ist aber das Verhältniß des Bogens zu seinem Kreise nicht genau bekannt oder nicht einfach genug, so gibt, solange die Sehne des Bogens den Halbmesser nicht erreicht, nachstehendes Verfahren ein hinreichend genaues Resultat. *



Es sei AB der gegebene Bogen, AC der durch seinen Anfangspunkt gehende Durchmesser, AE Tangente. Trägt man auf der Verlängerung des Durchmessers das Stück CF = dem Halbmesser an, so schneidet eine durch F und B gelegte Gerade auf der Tangente ein Stück AE ab, welches für die Rectification des Bogens genommen werden darf. Kommt die Bogensehne dem Halbmesser sehr nahe und ist zugleich der Halbmesser groß, so thut man besser, das Stück CF kleiner als den Halbmesser zu nehmen, und zwar um ungefähr $^1/_6$ der Strecke Ab (der Projection des Bogens auf AC). — Fehlt der Raum zur Verlängerung der AC, so theile man den Bogen AB (durch Probiren) in drei gleiche Theile, mache den Bogen CD einem dieser Theile gleich und ziehe die Gerade DBE. (S. Anhang, I.)

Die letztere, von der Drittelung des Bogens ausgehende Construction, sowie jene, bei welcher man CF genau = Halbm. — $^1/_6$ Ab (= Op) macht, passen auch noch für größere Bogen bis nahe an den Quadranten.

---

* Größere Bögen müßte man in Stücke zerlegen (am besten in gleichgroße).

210. Liegt zwischen den Punkten A, B einer beliebigen Curve kein besonderer Punkt (Nr. 205—207) derselben, und bedeuten AT, BT Stücke der in T sich schneidenden Tagenten, AB die Sehne, so kommt der Ausdruck

$$\frac{AT + BT + 2AB}{3}$$

dem rectificirten Bogen AB um so näher, je flacher dieser Bogen ist. (S. Anhang, II.)

Für einen Kreisbogen geht (wegen AT = BT) obiger Ausdruck in $^2/_3$ (AT + AB) über und liefert selbst noch bei 60^0 ein brauchbares Resultat. Da nämlich die halbe Seite des um einen Kreis vom Halbmesser r beschriebenen regelmäßigen Sechsecks $= \frac{r}{\sqrt{3}}$ ist, so wird der Werth des Ausdrucks $= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right) r = 1{,}051567 . r$, also nur um 0,0044 . r oder um ungefähr $^1/_{250}$ des Halbmessers zu groß.

Durch vorsichtige Benützung des obenstehenden Ausdrucks läßt sich das zu Anfang der vorigen Nr. angegebene Rectificationsverfahren mit Vortheil in allen denjenigen Fällen ersetzen, wo man die Tangenten der Curve leicht und sicher zeichnen kann.

Eine zu rectificirende Curve von beträchtlicher Ausdehnung zerlegt man, je nach der größern oder geringern Krümmung an einzelnen Stellen, in mehr oder weniger Theile. Sind A_0, A_n die Endpunkte der Curvenstrecke, $A_1, A_2, A_3 \ldots$ zwischenliegende Punkte der Curve, $T_1, T_2, T_3 \ldots . T_n$ die Schnittpunkte für je zwei aufeinanderfolgende der durch die Punkte A gehenden Tangenten, so findet man durch wiederholte Anwendung der obigen Formel als annähernde Rectification

$$\frac{(A_0 T_1 + T_1 T_2 + T_2 T_3 + \ldots + T_n A_n) + 2(A_0 A_1 + A_1 A_2 + \ldots + A_{n-1} A_n)}{3}$$

oder, wenn die Summe aller Tangentenstücke durch t, die Summe der Sehnen durch s ausgedrückt wird:

$$\frac{t + 2s}{3} = t - \frac{2}{3}(t - s).$$

Die letztere Umformung dient zu bequemerer Ausführung; sie führt nämlich auf folgende Regel: Man schneide auf einer Geraden von einem Punkte A aus in einerlei Richtung die Längen AM = t und AN = s ab und theile NM in P so, daß NP = $^1/_3$ MN; dann ist AP sehr nahe der rectificirten Curve $A_0 A_n$ gleich. (Es ist klar, daß diese Regel

schon im einfachsten Falle, wo eine Zerlegung des gegebenen Bogens gar nicht eintritt, angewendet werden kann.)

211. Soll auf einer gegebenen Curve von einem Punkte A aus ein Bogen abgeschnitten werden, dessen Länge L in gerader Linie gegeben ist, so kann man diese Länge in so kleine Theile theilen, daß ein als Sehne in die Curve gelegter Theil vom zugehörigen Bogen nicht mehr merklich abweicht, mithin die Summe der Sehnen für die Summe der Bögen genommen werden darf. Läßt sich aber auf die Curve die Rectificationsmethode der Nr. 210 anwenden, so zerlege man die gegebene Länge L in Stücke von mäßiger Größe, trage diese Stücke von A aus als aufeinanderfolgende Sehnen ein und rectificire den von A bis zum Endpunkt der letzten Sehne reichenden Bogen A Q; diese Rectification wird größer als L sein; der sich ergebende Ueberschuß kann jedoch leicht (nach dem zu Anfang der Nr. erwähnten Verfahren) auf der Curve von Q aus rückwärts abgetragen werden.

212. Zuweilen kommt der Fall vor, daß auf einer Curve ein Bogen gefunden werden muß, welcher einem auf einer andern Curve gegebenen Bogen gleich sein soll. Die Lösnng einer solchen Aufgabe ist aus den vorangegangenen Betrachtungen zu entnehmen. — Will man dabei unmittelbar kleine (als gerade betrachtete) Bogenstücke mittels des Zirkels von der zweiten Curve auf die erste übertragen, so ist für die Kleinheit dieser Stücke diejenige Curve maßgebend, welche die stärkeren Krümmungen hat.*

Evolution.

213. Denkt man sich um eine Curve einen vollkommen biegsamen und unausdehnbaren Faden gelegt und diesen so abgewunden, daß das von der Curve abgelöste Stück immer straff gespannt bleibt, so beschreibt der Anfangspunkt des Fadens eine neue Curve, welche eine Evolvente der ersten genannt wird, während die ursprüngliche Curve selbst die Evolute heißt, und man sagt, die Evolvente sei durch Abwickelung (Evolution) der gegebenen Curve entstanden.

---

* Ein Werkzeug zur mechanischen Lösung der in Nr. 209—212 besprochenen Aufgaben — brauchbar namentlich dann, wenn die zu behandelnden Curven in großem Maßstab gezeichnet sind — ist Elliots Opisometer (beschrieben in Dinglers Journal Bd. 123, S. 75 und im Polytechnischen Centralblatt 1851, S. 1468).

Das abgewickelte Fadenstück bleibt bei seiner geradlinigen Anspannung fortwährend Tangente der Evolute; daher kann man die Evolvente auch entstehen lassen durch einen Punkt einer Tangente, welche, ohne zu gleiten, sich auf der Evolute fortwälzt.*

Ist P irgend eine Lage des beschreibenden Punktes, T der Berührungspunkt der Tangente für diese Lage, $\mathfrak{P}$ der Punkt auf der Evolute, mit welchem P früher zusammengefallen war, so ist, wie aus den obigen Erklärungen folgt, das Stück PT der Tangente eben so lang wie der Bogen $\mathfrak{P}$T der Evolute. Um daher eine Evolvente einer gegebenen Curve zu construiren, wenn $\mathfrak{P}$ der Ursprung der Abwickelung ist, ziehe man durch mehrere, nicht allzuweit auseinanderliegende Punkte Tangenten $T_2 P_2$, $T_3 P_3$, $T_4 P_4$,... an die Curve, trage auf diesen der Reihe nach die rectificirten Bögen $T_2 \mathfrak{P}$, $T_3 \mathfrak{P}$, $T_4 \mathfrak{P}$.... ab, und verbinde die Punkte $\mathfrak{P}$, P_2, P_3, P_4,.... durch eine stetige Curve. In Fig. 86 ist als Evolute ein Kreis gewählt, und in diesem Falle ist es am vortheilhaftesten, die Bögen $\mathfrak{P} T_2$, $T_2 T_3$, $T_3 T_4$,.... von gleicher Länge zu nehmen. Fig. 86.

Da der Kreis in allen Punkten dieselbe Gestalt hat (oder in sich selbst gedreht werden kann), so ist es hier gleichgiltig, in welchem Punkte man die Abwickelung anfangen läßt; es sind nämlich alle Evolventen, welche verschiedenen Anfangspunkten entsprechen, unter sich congruent. Im Allgemeinen ist dieß aber keineswegs der Fall, sondern es ändert sich die Gestalt der Evolvente, sowie man einen andern Punkt der Evolute als Anfang der Abwickelung nimmt, und es kann also eine und dieselbe Curve unendlich viele Evolventen haben.

Ist aber auch der Anfangspunkt $\mathfrak{P}$ der Abwickelung auf der Evolute bestimmt, so könnte es immer noch scheinen, als gebe es für diesen Punkt zwei Evolventen, da man die Abwickelung sowohl nach der rechten als nach der linken Seite hin vornehmen kann. Behält man jedoch die zuletzt erwähnte Beschreibungsart der Evolvente (mittels einer wälzenden Tangente) im Auge, so zeigt sich, daß diese beiden Curven als zwei Zweige einer einzigen Curve zu betrachten sind. Denn verfolgt man in Fig. 86 die Bewegung der Tangente rückwärts vom Punkte T_4 durch die Punkte T_3, T_2 nach dem Punkte T_1, so ist kein Grund vorhanden,

* Diese Erklärung der Evolvente paßt auch für eine gewundene Evolute, und man sieht leicht, daß in einem solchen Falle die Evolvente selbst eine gewundene Curve werden müßte.

diese Bewegung hier zu unterbrechen; bei Fortschreitung derselben aber kommt offenbar der beschreibende Punkt (welcher früher die Lagen P_4, P_3, P_2, $\mathfrak{P}$ durchlaufen hat) in die Lagen P^2, P^3, ... d. h. er erzeugt einen zweiten Zweig der Evolvente. Im vorliegenden Beispiele (nämlich für die Evolvente des Kreises) ist dieser Zweig dem ersten congruent; im Allgemeinen nicht. Congruenz beider Zweige findet bei einer andern Evolute nur dann statt, wenn sie eine Symmetral-Axe hat und auf dieser der Anfangspunkt der Abwickelung liegt. — Der Punkt $\mathfrak{P}$ heißt der Ursprung jedes Zweigs.

Nimmt man für einen Augenblick an, die Stücke $T_1\,T_2$, $T_2\,T_3$, ... der Evolute seien gerade Linien, d. h. substituirt man für die abzuwickelnde Curve (die nicht gerade ein Kreis sein soll) ein Polygon, und läßt statt der Tangente $T_2\,P_2$ die Verlängerung von $T_3\,T_2$, statt der Tangente $T_3\,P_3$ die Verlängerung von $T_4\,T_3$, ... eintreten, so erscheint die Evolvente aus Kreisbögen $\mathfrak{P}P_2$, P_2P_3, P_3P_4, ... zusammengesetzt, denen der Reihe nach die Halbmesser $T_2\,P_2 = T_1\,T_2$, $T_3\,P_3 = T_3\,T_2 + T_2\,P_2$, ..., und die Mittelpunkte T_2, T_3, ... zukommen; die Linien $T_2\,P_2$, $T_3\,P_3$, ... sind also Normalen der Evolvente. Dieß bleibt wahr, wenn man das als Evolute festgesetzte Polygon durch Verkleinerung und Vervielfältigung seiner Seiten nach und nach in eine stetige Curve übergehen läßt, so daß aus den Seiten Elemente und aus deren Verlängerungen Tangenten werden. Demnach ist jede Tangente einer Evolute eine Normale der Evolvente, und der Berührungspunkt dieser Tangente ist der Krümmungsmittelpunkt für den entsprechenden Punkt der Evolvente.* Umgekehrt ist jede Normale der Evolvente eine Tangente der Evolute, und die Evolute selbst ist der geometrische Ort für die Krümmungsmittelpunkte der Evolvente. Wenn daher zu irgend einer Curve, als Evolvente betrachtet, die Evolute verlangt wird, so hat man aus möglichst vielen Punkten der Curve Normalen zu errichten und eine Curve zu zeichnen, welche alle diese Normalen berührt. Für jede ebene Curve findet man nur eine Evolute.

Im Punkte $\mathfrak{P}$, wo die Evolvente auf die Evolute stößt, ist für beide

---

* Unter Benützung der Krümmungskreise und durch Beiziehung einiger sie verbindenden Kreisbögen (deren Mittelpunkte der Zeichner bei einiger Uebung leicht findet) läßt sich die Evolvente (in hinreichender Annäherung) ganz mittels des Zirkels ausziehen, auch wenn die Zahl der durch Rectification bestimmten Punkte P nicht sehr groß ist.

Zweige der erstern nur eine Normale möglich (nämlich die Evoluten-tangente T_1X), daher auch nur eine Tangente, oder der Punkt 𝔓 ist ein Rückkehrpunkt der Evolvente (vgl. Nr. 206), und die beiden Zweige derselben treffen in diesem Rückkehrpunkte die Evolute senkrecht.

Dieser Punkt 𝔓 existirt aber nicht immer (wie schon daraus hervorgeht, daß man zu jeder ebenen Curve, den Kreis ausgenommen, eine Evolute findet); er kann nämlich fehlen, wenn die gegebene Evolute einen Rückkehrpunkt hat.

Ist T in Fig. 84 eine Lage des beschreibenden Punkts, so wird allerdings während der Wälzung der Tangente dieser Punkt auf die Evolute (die man sich über A und B hinaus fortgesetzt zu denken hat) fallen, und zwar zweimal; nimmt man dagegen den beschreibenden Punkt auf der Verlängerung von TR (nicht RT), so kann die Wälzung ihn nie mit dem Berührungspunkt der Tangente zusammenfallen machen. (Gilt R als beschreibender Punkt, so ist er im Falle II zugleich ein Rückkehrpunkt für die Evolvente, im Falle I nicht. Im Fall II wird auch ein auf der verlängerten TR genommenen Punkt einen Rückkehrpunkt der entsprechenden Evolvente bilden, der aber, da er nicht auf der Evolute liegt, nicht die Bedeutung des Punkts 𝔓 hat.)

Der Punkt 𝔓 verwandelt sich in einen Wendepunkt der Evolvente, wenn die Evolute einen Wendepunkt hat und dieser zugleich für eine Lage des beschreibenden Punkts genommen wird.

Gilt in Fig. 83 nicht der Wendepunkt W selbst, sondern ein auf seiner Tangente beliebig gewählter Punkt P als beschreibender Punkt, so ist P ein Rückkehrpunkt der Evolvente, und außerdem wird es auch einen auf der Evolute liegenden Rückkehrpunkt 𝔓 geben.

Einen Wendepunkt kann die Evolvente auch erhalten, wenn die Evolute zwei unendliche Zweige hat, welche gegen eine gemeinsame Asymptote so liegen, daß der eine Zweig sich ihr rechts oberhalb, der andere links unterhalb nähert. — Liegen aber zwei Zweige einer Evolute rechts oberhalb und rechts unterhalb einer gemeinsamen Asymptote, so kann auf die Asymptote ein Punkt der Evolvente fallen, in welchem letztere mit ihrer Tangente in Berührung höherer Ordnung steht, ohne daß dieser Punkt ein Wendepunkt ist.

Eine Evolvente einer gegebenen Curve kann nur unter besondern Umständen in sich selbst zurückkehren. Im Allgemeinen setzt sie sich ins Unendliche fort. Ist dabei die Evolute eine geschlossene Curve, so bildet jeder Zweig der Evolvente spiralartige Umläufe und diese behalten unveränderlichen Abstand; denn eine Normale eines Umlaufs ist (als Tangente der Evolute) zugleich Normale für alle andern Umläufe, und zwei aufeinanderfolgende Umläufe schneiden auf ihr ein Stück aus, welches der Rectification der ganzen Evolute gleich sein muß.

214. Wird eine begrenzte gerade Linie um einen ihrer Punkte gedreht, so ist die Summe der von den beiden Endpunkten beschriebenen Bögen einem Bogen gleich, der die ganze Linie zum Halbmesser und den Drehungswinkel zum Centriwinkel hat. Läßt man also die Linie durch successive Drehungen (ohne Verschiebung) mit den Richtungen aufeinanderfolgender Seiten eines Polygons zusammenfallen, so ist die Summe der beiden von den Endpunkten durchlaufenen Wege gleich einem mit der ganzen Linie beschriebenen Kreisbogen, dessen Centriwinkel die Summe der betreffenden Außenwinkel des Polygonstücks ist, d. h. der Winkel zwischen der ersten und der letzten Seite dieses Stücks oder zwischen der ersten und letzten Lage der bewegten Linie (wobei auf der Linie selbst der Sinn der Richtung festgehalten werden muß). Dieß gilt auch noch, wenn die gerade Strecke sich auf einer Curve wälzt. Ist diese Curve ein Kreis, so sind die von den Endpunkten der Strecke beschriebenen Wege congruent; jeder ist also die Hälfte der vorhin gefundenen Summe. — Denkt man sich nun in Fig. 86 die Strecke $P_2 T_2$ so lange gewälzt, bis sie in $\mathfrak{P}$ den gegebenen Kreis berührt (wobei der Weg, auf welchem sich T_2 vom Kreise entfernt, dem Wege $P_2 \mathfrak{P}$ congruent ist), so ist der Evolventenbogen $P_2 \mathfrak{P}$ einem Kreisbogen gleich, dessen Halbmesser $\frac{1}{2} T_2 P_2$ und dessen Centriwinkel der Winkel zwischen $T_2 P_2$ und $T_1 X$ oder zwischen den Halbmessern $O T_2$ und und $O T_1$ ist (oder auch gleich einem mit $T_2 P_2$ um O beschriebenen Kreisbogen zwischen $O T_1$ und der Geraden, welche von O nach dem Schnittpunkt der $P_2 T_2$ und $X T_1$ geht). — Wälzt sich die Strecke $T_4 P_4$ bis zur Berührung in P_2, so sind die beiden von P_4 und T_4 beschriebenen Evolventenbögen zusammengenommen gleich dem Kreisbogen vom Halbmesser $T_4 P_4$ und vom Centriwinkel $T_4 O T_2$; der Weg des Punkts T_4 aber ist gleich einem Kreisbogen mit dem nämlichen Centriwinkel und dem Halbmesser $\frac{1}{2} (P_4 T_4 - P_2 T_2)$; hieraus ergibt sich für den Evolventenbogen $P_2 P_4$ die Länge eines Kreisbogens, dessen Centriwinkel $T_2 O T_4$ und dessen Halbmesser das arithmetische Mittel aus $T_2 P_2$ und $T_4 P_4$ ist; da nun T_3 den Bogen $T_2 T_4$ halbirt, so ist $T_3 P_3$ dieser Halbmesser. Man hat also eine einfache Regel zur Verwandlung eines beliebigen Bogens einer Kreis-Evolvente in einen Kreisbogen. Die Rectification der Evolvente läßt sich somit auf die des Kreises (Nr. 209) zurückführen. — Die einmalige volle Abwickelung eines gegebenen Kreises ist einem Kreise gleich, der zum Durchmesser die Rectification des gegebenen hat.

Roll-Curven.

215. Wie bei der Evolution eine Gerade auf einer Curve sich wälzt, so kann man auch eine Curve auf einer Geraden oder auf einer andern Curve sich wälzen lassen. Ein bestimmter Punkt der bewegten Curve beschreibt dann eine neue Curve, welche eine Roll-Curve heißt.

Für jede Rollcurve ist die Gerade, welche eine Lage des beschreibenden Punkts mit dem Punkte verbindet, in welchem die betreffende Lage der bewegten Curve die feste Linie (die Bahnlinie) berührt, eine Normale; denn beim ersten Ansatz zur Fortsetzung der stetigen Wälzung zeichnet der beschreibende Punkt einen unendlich kleinen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt jener Berührungspunkt ist. Der Berührungspunkt gibt aber hier nicht zugleich den Krümmungsmittelpunkt für den entsprechenden Punkt der Rollcurve; denn da die Normale der letztern nicht Tangente der Bahnlinie ist (was bei der Evolution der Fall war), so kann die Bahnlinie nicht die Evolute der Rollcurve oder der geometrische Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte sein.

Ist die wälzende Curve W in einer Lage gegeben, in welcher sie die Bahnlinie L im Punkte B berührt, und ist P_1 die zugehörige Lage des beschreibenden Punkts (welche übrigens auch mit B zusammenfallen kann), so findet man eine neue Lage des letztern auf folgende Weise. Man nimmt im Sinne der Wälzung einen beliebigen Punkt A auf W und einen Punkt 𝔄 auf L so, daß der L-Bogen B𝔄 gleich dem W-Bogen BA (Nr. 212), zieht die W-Tangente AT und die L-Tangente 𝔄𝔗 (beide im Sinn der Wälzung oder beide im entgegengesetzten), macht $\mathfrak{W}.\mathfrak{T}\mathfrak{A}P_2 = \mathfrak{W}.TAP_1$ und $\mathfrak{A}P_2 = AP_1$, so ist P_2 ein Punkt der Rollcurve. (Einfacher wird die Construction, wenn W ein Kreis ist, und noch einfacher, wenn außerdem auch L ein Kreis oder eine Gerade ist.)

Wenn beim Beginn der Wälzung der beschreibende Punkt P nicht mit dem Berührungspunkt zwischen W und L zusammenfällt, so kann man die Wälzung immer in solchem Sinne vornehmen, daß P sich der L nähert und endlich auf sie fällt. In solcher Lage heißt P der Ursprung des Rollcurvenbogens. Diese Lage P_0 ist aber zugleich Ursprung eines zweiten Bogens der Rollcurve, welcher sich erzeugt, wenn man die Wälzung im vorigen Sinne noch weiter fortsetzt. Der Ursprung ist ein Rückkehrpunkt für die Rollcurve; denn die beiden von ihm aus-

gehenden Bögen derselben haben die durch ihn gelegte Tangente der L zur gemeinsamen Normalen. — Ist W eine endlose Curve, so hat die Rollcurve nur einen Rückkehrpunkt und zwei ins Unendliche laufende Zweige. Ist aber W geschlossen, so kehrt der beschreibende Punkt mehrmals auf die Bahncurve L zurück; zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Rückkehr-(Ursprungs-)Punkten liegt ein Gang der Rollcurve und ein der ganzen Peripherie von W gleicher Bogen der L. Im Allgemeinen ist die Zahl der Gänge unbegrenzt. Ist aber L eine geschlossene Curve und läßt sich zugleich das Verhältniß zwischen den Peripherien von L und W genau in ganzen Zahlen ausdrücken, so fällt im Verlauf der Wälzung einer der spätern Rückkehrpunkte auf einen frühern und die Rollcurve kehrt in sich selbst zurück.

216. Die Rollcurve heißt eine Cykloide, wenn ein Kreis auf einer Geraden sich wälzt, — eine Epicykloide, wenn ein Kreis auf einem andern Kreise sich so wälzt, daß dieser von außen berührt wird (wobei der bewegliche Kreis vom ruhenden entweder ebenfalls von außen oder auch von innen berührt werden kann), — eine Hypocykloide, wenn ein Kreis auf einem zweiten Kreise sich wälzt, den er von innen berührt. Diese drei Arten von Rollcurven führen den gemeinschaftlichen Namen cyklische Curven.

Ist für eine cyklische Curve die Bahnlinie L und der wälzende Kreis W gegeben, so ist die Curve an sich völlig bestimmt; man erhält zwar, wenn man auf einer beliebig gewählten Lage von W verschiedene Punkte als beschreibende annimmt, für jeden solchen Punkt eine besondere Curve, diese Curven sind aber alle einander congruent und unterscheiden sich blos hinsichtlich der Lage ihrer Rückkehrpunkte auf L.

Die einzelnen Gänge einer cyklischen Curve sind unter sich congruent.

Es seien P_0 und P' die beiden einen Gang begrenzenden Rückkehrpunkte. Da es offenbar gleichgiltig ist, ob die Wälzung, durch welche der Gang erzeugt werden soll, im Sinne von P_0 gegen P' oder im entgegengesetzten Sinne vorgenommen wird, so muß der Gang selbst aus zwei congruenten Hälften bestehen, und diese liegen symmetrisch gegen eine Axe, welche das Stück P_0P' der L senkrecht halbirt. Jede Ganghälfte entspricht der Abwälzung des halben Kreises W, und der Scheitel des Ganges ist von L (genauer: von dem Punkte, in welchem L und

eine durch den Scheitel gehende Lage von W sich berühren) um den Durchmesser von W entfernt. (Für zwei benachbarte Gänge ist diejenige Gerade, welche im betreffenden Rückkehrpunkt senkrecht auf L steht, eine Symmetral-Axe.)

Man sieht, daß die Zeichnung einer cyklischen Curve sich mit Leichtigkeit beliebig weit fortsetzen läßt, nachdem man einmal die Hälfte des ersten Gangs construirt hat. (Zur Ergänzung dieses ersten Ganges bedient man sich bei der Epi- und Hypocykloide am besten einer Reihe von mit L concentrischen Kreisen, weil diese zugleich für die Zeichnung der nachfolgenden Gänge zu brauchen sind.)

Um aber eine erste Ganghälfte zu construiren, beachte man zunächst, daß die Mittelpunkte aller Lagen von W bei der Cykloide auf einer Geraden C parallel zu L, bei Epi- und Hypocykloide auf einem Kreise C concentrisch mit L verbleiben. Nimmt man auf der durch den Ursprung P_0 gehenden Lage des Kreises W einen Punkt w beliebig und macht den L-Bogen $P_0 l$ gleich dem W-Bogen $P_0 w$ (der kleiner als $\frac{1}{2}$ W ist), so schneidet eine durch l normal zu L gezogene Gerade die Linie C im Mittelpunkt einer neuen Lage von W, auf welcher der beschreibende Punkt P_1 gefunden wird, wenn man in sie von l aus die Sehne $P_0 w$ im entsprechenden Sinne einträgt. Man überzeugt sich aber leicht, daß P_1 auch auf einer durch w gehenden und von L überall gleichweit abstehenden Linie liegen muß. Die Benützung dieser Linie (welche für die Cykloide eine Gerade, für die beiden andern Curven ein mit L concentrischer Kreis ist) macht das Eintragen der Sehne, selbst das Beschreiben eines größeren Bogens der W-Lage, entbehrlich, und ist schon deshalb vorzuziehen, weil die nämliche Linie später zur Ergänzung des Halbganges und zur Zeichnung nachfolgender Gänge gebraucht werden kann. — Auf dieselbe Art erhält man andere Punkte des ersten Halbgangs. Bequem ist es, auf der ursprünglichen Lage von W die Punkte w so zu nehmen, daß sie den halben Kreis W in gleiche Theile zerlegen.

217. Für die Cykloide leitet sich aus der angegebenen Construction noch folgende einfache Regel ab. Auf der ursprünglichen Lage von W nehme man von P_0 aus den Bogen $P_0 w$ in demjenigen Sinne ab, in welchem der Kreis bei der beabsichtigten Wälzung sich drehen wird (also entgegengesetzt dem Sinne, in welchem die Wälzung fortschreitet), ziehe $wP_1 \parallel L$, mache die Gerade wP_1 (in dem Sinne, in

welchem der Kreismittelpunkt sich bewegen wird) gleich dem Kreisbo- gen wP_0, so ist P_1 ein Punkt der Cykloide. Eine Parallele durch P_1 mit der Sehne P_0w ist Normale der Cykloide in P_1. — Ist (Taf. XII, **8**) P_0P ein Halbgang, P der Scheitel (also $P_0Q = \frac{1}{2} W$), $wv \parallel L$, so ist

$$vP_1 = vw - wP_1 = \tfrac{1}{2} W - \text{arc}\, P_0w = Pv.$$

Hierin ist eine noch einfachere Construction angezeigt, welche von der mittleren Lage des wälzenden Kreises und vom Scheitel P ausgeht. Eine Parallele durch P_1 mit der Sehne Pv ist Tangente der Cykloide.

In der Figur ist der Kreis W noch einmal so gezeichnet, daß er in P_0 die L von der andern Seite berührt, $\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q} \parallel L$ gezogen, PQ bis $\mathfrak{Q}$ verlängert. Wälzt sich nun der Kreis auf $\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}$, so beschreibt der Punkt P_0 den Halbgang $P_0\mathfrak{Q}$ einer zweiten Cykloide, welche der ersten congruent ist. Die Sehne wP_0 ist bis $\mathfrak{v}$ verlängert, das Parallelogramm $w\mathfrak{P}_1$ vollendet. Wegen

$$\mathfrak{v}\mathfrak{P}_1 = wP_1 = \text{arc}\; P_0w = \text{arc}\, P_0\mathfrak{v}$$

ist $\mathfrak{P}_1$ ein Punkt der zweiten Cykloide und $\mathfrak{P}_1P_1$ (die Normale der ersten) Tangente der zweiten. Mithin ist die zweite Cykloide die Evolute der ersten und $\mathfrak{P}_1$ der Krümmungsmittelpunkt für P_1 (Nr. 213). Da die $\mathfrak{P}_1P_1$ von der L halbirt wird, läßt sich für jeden Punkt der ersten Cykloide der Krümmungsmittelpunkt sehr leicht bestimmen. Zugleich sieht man, daß der rectificirte Halbgang $= \mathfrak{Q}P$, also die Rectification des vollen Cykloidenganges viermal so groß als der Durchmesser des wälzenden Kreises ist. Auch einzelne Bögen der Cykloide lassen sich ohne Mühe rectificiren. So ist (wenn man sich in der Figur blos den Halb- gang $P_0\mathfrak{Q}$ und den Kreis über $\mathfrak{P}_0P_0$ vorhanden denkt) der Bogen $P_0\mathfrak{P}_1 = 2 . P_0\mathfrak{v}$, der Bogen $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = 2\,(P_0\mathfrak{v}_2 - P_0\mathfrak{v}) = 2 . tt_2$. Ferner kann man leicht auf der Cykloide von einem gegebenen Punkte aus einen Bogen von gegebener Länge abschnei- den oder den Halbgang in gleiche Theile theilen.

218. Für die Epi- und Hypocykloiden gilt folgender Lehrsatz.

Der Durchmesser eines Kreises sei beliebig in zwei Stücke getheilt und über jedem Stück, als neuer Durchmesser betrachtet, wieder ein Kreis beschrieben. Nimmt man einen dieser drei Kreise als fest und läßt auf ihm die beiden übrigen sich wälzen, so sind dadurch zwei con- gruente cyklische Curven bestimmt, welche ganz zusammenfallen, wenn als beschreibender Punkt derjenige Punkt gilt, in welchem die in Be- wegung zu setzenden Kreise sich ursprünglich berühren.*

Beweis. Bezeichnet man durch R den Halbmesser des festen

---

* Die Construction einer Epicykloide, bei welcher der wälzende Kreis den festen umschließt, läßt sich also immer durch eine andere Construction ersetzen, bei welcher die Kreise sich gegenseitig von außen berühren.

Kreises K, durch r und r' die Halbmesser der beweglichen Kreise k und k', so ist entweder

$$\text{I)}\ R = r + r' \quad \text{(Hypocykloiden)}$$

oder

$$\text{II)}\ R = r - r' \quad \text{(Epicycloiden).}$$

Betrachtet man die drei Kreise zuerst in der obengenannten anfänglichen Lage und nimmt den Berührungspunkt der beiden beweglichen als beschreibenden Punkt, so daß dieser jetzt den gemeinsamen Scheitel der beiden den beweglichen Kreisen entsprechenden Rollcurven darstellt, so leuchtet ein, daß die beiden Curven auch den Ursprung gemein haben müssen, wenn man die Wälzung der Kreise im Falle I in gegensätzlichem, im Falle II in gleichem Sinne fortschreiten läßt. Dieser Ursprung heiße A. Um nun die völlige Identität der beiden Curven nachzuweisen, fassen wir (Taf. XII., **9**) den Kreis k in irgend einer seiner Lagen ins Auge, bei welcher er den festen Kreis (mit dem Mittelpunkt C) in B berührt, während sein Mittelpunkt in c und der beschreibende Punkt in P liegt. Die Normale BP schneidet den festen Kreis in B'. Wird ein Kreis construirt, welcher durch P geht und den festen in B' berührt, so ist

in Fig. I: $R = r + Pc'$, in Fig. II: $R = r - Pc'$,

also in jedem Falle $Pc' = r'$. Ferner ist (da zwei Kreisbögen von verschiedenen Halbmessern aber gleichen Centriwinkeln zusammen einem zum nämlichen Centriwinkel gehörigen Bogen gleichkommen, der mit der Summe jener Halbmesser beschrieben wird)

in Fig. I: $\text{arc}\,PB' = \text{arc}\,BB' - \text{arc}\,PB = \text{arc}\,B'A$,

in Fig. II: $\text{arc}\,PB' = \text{arc}\,PB - \text{arc}\,BB' = \text{arc}\,B'A$.

Also liegt in beiden Fällen der Punkt P auf der cyklischen Curve, welche erzeugt wird, wenn der Kreis k', von der Lage ausgehend, wo der beschreibende Punkt und der Berührungspunkt in A zusammenfallen, sich auf K im Sinne von A gegen B' wälzt; und dieß war zu erweisen.

Der Satz führt zugleich auf eine neue Construction. Sind R, r und also mittelbar auch r' gegeben und der Ursprung A willkürlich auf K gewählt, so nehme man zwei K-Bögen AB, AB' (für eine Hypocykloide in entgegengesetztem, für eine Epicykloide in einerlei Sinn) im Verhältniß von r : r' und bestimme auf der Geraden BB' (für die Hypocykloide innerhalb, für die Epicykloide außerhalb des Kreises K) einen Punkt P so, daß $BP : B'P = r : r'$; dann ist P ein Punkt der cyklischen Curve und BB' die zugehörige Normale.

Schneidet eine zweite Normale die erste in O, den Kreis K in 𝔅 und 𝔅′ (so daß A𝔅 : A𝔅′ = r : r′), so verhalten sich auch die K-Bögen B𝔅 und B′𝔅′ wie r : r′, die zugehörigen Sehnen aber wie O B : O 𝔅′. Liegt nun die zweite Normale der ersten sehr nahe, so wird das Verhältniß der Bögen nahezu mit dem der Sehnen übereinstimmen und zugleich O 𝔅′ von O B′ sehr wenig abweichen. Bezeichnet daher O den Punkt, wo die Normale BB′ von der ihr unmittelbar folgenden Nachbarlage geschnitten wird, also den Krümmungsmittelpunkt der cyklischen Curve für P, so muß die Proportion gelten

$$OB : OB' = r : r' = PB : PB',$$

d. h. O liegt mit P harmonisch gegen die Punkte B, B′. Hiernach läßt sich der Krümmungsmittelpunkt auf verschiedene Weise sehr einfach finden. 1) Bestimmt man in den Kreisen c, c′ die Gegenpunkte d, d′ des Punktes P, so muß die Richtung d d′ durch O gehen (denn die Sehnen B d, B′d′ sind parallel und verhalten sich wie BP:B′P). 2) Die d d′ muß den Punkt C enthalten; deshalb läßt sich einer der Punkte d, d′ durch den Mittelpunkt des festen Kreises ersetzen. 3) Da die d d′ durch den Endpunkt Q der gemeinsamen Sehne P Q gehen muß und auf ihr senkrecht steht, so werden durch Q die drei Punkte d, d′, C entbehrlich. (Für den dem Scheitel der Curve entsprechenden Krümmungsmittelpunkt sind diese Constructionen nicht zu brauchen; dafür bleibt die auch in den andern Fällen zunächst sich darbietende Construction mittels zweier durch B und B′ gelegter Parallelen von den Längen r und r′.)

Ist bei einer Hypocykloide der Durchmesser des wälzenden Kreises dem Halbmesser des festen gleich, so werden bei der oben zuletzt angegebenen Curvenconstruction die Bögen A B und A B′ einander gleich, und ihre Sehne, welche senkrecht auf dem durch A gehenden Durchmesser des festen Kreises steht, ist zu halbiren. Folglich geht in diesem Falle die Hypocykloide in den genannten Durchmesser über (was sich auch, unabhängig von jener Construction, sehr leicht direct beweisen läßt).

219. Roll-Curven in einem erweiterten Sinne entstehen, wenn der beschreibende Punkt nicht auf der wälzenden (krummen oder geraden) Linie, aber in unveränderlicher Verbindung mit ihr gedacht wird. Die Zeichnung solcher Curven ist aus den obigen Erörterungen über die eigentlichen Rollcurven und Evolventen abzuleiten.

Umhüllung.

220. Bewegt sich in der Ebene irgend eine krumme oder gerade Linie stetig nach einem vorgeschriebenen Gesetze, so kann man eine stetige Linie zeichnen, welche jene in allen ihren möglichen Lagen berührt. Diese Linie heißt die Umhüllungslinie der beweglichen, und letztere selbst die Umhüllte. Dabei kann auch die Umhüllte während ihrer Bewegung

ihre Dimensionen nach einem gegebenen Gesetze ändern, wenn nur ihre Art dieselbe bleibt.

Wenn man sich drei unmittelbar aufeinanderfolgende Lagen der Umhüllten vorstellt (zwischen denen also die Fortschreitungen, bei der vorausgesetzten Stetigkeit der Bewegung, unendlich klein sind), so ist das Stückchen der mittlern Lage, welches durch die erste und dritte Lage begrenzt wird, ein Element derselben, und gehört als solches zugleich der berührenden Umhüllungslinie an; die einander unendlich nahen Endpunkte dieses Elements (d. h. die Punkte, in denen die mittlere Lage von der ersten und dritten geschnitten wird) liegen also auf der Umhüllungslinie, und daher kann man sich diese auch gebildet denken durch die successiven Durchschnitte, welche zwischen den einzelnen Lagen der Umhüllten in deren stetiger Aufeinanderfolge sich ergeben.*

Beispiele.

Bei zwei concentrischen Kreisen schneiden bekanntlich alle Tangenten des innern gleiche Bögen vom äußern ab. Daher ist der innere Kreis die Umhüllungscurve einer Sehne des äußern, welche sich in diesem herumbewegt ohne ihre Länge zu ändern. (Ist diese Sehne der Durchmesser, so reducirt sich die Umhüllungscurve auf einen Punkt.)

Die Umhüllungscurve einer Geraden, welche auf einer ebenen Curve stets normal bleibt, ist die Evolute dieser Curve (vgl. Nr. 213).

Einer beweglichen Geraden, welche mit den Schenkeln eines gegebenen festen Winkels ein Dreieck von gegebenem Inhalt bestimmt entspricht als Umhüllungslinie die in Nr. 201, Beisp. 3, betrachtete Curve.

Ein Kreis von constantem Halbmesser, dessen Mittelpunkt auf einer Geraden fortrückt, wird durch zwei parallele Gerade umhüllt.

Aendert sich bei diesem Fortrücken der Halbmesser des Kreises so, daß er in constantem Verhältniß mit der Entfernung des Mittelpunkts von einem festen Punkte der

---

* In aller Strenge gefaßt, liefern jene successiven Durchschnitte die Ecken einer polygonalen Linie, welche der Umhüllungslinie umschrieben ist, aber ihr so nahe kommt, daß man die eine für die andere substituiren kann. Der eigentliche Berührungspunkt zwischen der Umhüllungslinie und einer bestimmten Lage der Umhüllten ist die Stelle, in welche der Schnittpunkt dieser festgehaltenen Lage und einer zweiten Lage in dem Momente einrückt, wo die zweite in Folge stetiger Bewegung mit der ersten ganz zusammenfällt. Inwiefern diese Stelle als eine bestimmte betrachtet werden kann, läßt sich einsehen, wenn man jene Bewegung noch über das Zusammenfallen beider Linien hinaus fortsetzt, wobei sogleich wieder ein wirklicher Schnittpunkt eintritt. So hat sich schon bei frühern Betrachtungen der Krümmungsmittelpunkt als Schnitt zweier unendlich nahen, genauer zweier zusammenfallenden Normalen bestimmt.

Geraden bleibt, so gehen jene Parallelen in zwei Gerade über, welche sich in diesem Punkte schneiden.

Als Umhüllungscurven eines Kreises, dessen Mittelpunkt bei constantem Halbmesser auf der Peripherie eines andern Kreises sich bewegt, erscheinen zwei concentrische Kreise (deren einer sich zu einem Punkte zusammenzieht, wenn der bewegliche Kreis dem festen gleich ist).

† Um sich im Zeichnen von Umhüllungscurven zu üben, kann man noch folgende Aufgaben behandeln.

1) Der Scheitel eines rechten Winkels rückt auf einer gegebenen Geraden fort, während der eine Schenkel beständig durch einen gegebenen Punkt geht; welche Gestalt hat die Umhüllungscurve des andern Schenkels? — 2) Statt der festen Geraden setze man einen Kreis und nehme den gegebenen Punkt innerhalb desselben. — 3) Wie vorhin; aber der gegebene Punkt liege außerhalb des Kreises. — 4) Eine Gerade bewegt sich so, daß die Stücke, welche sie von den Schenkeln eines gegebenen Winkels abschneidet, eine gegebene Summe haben;* welche Curve umhüllt sie? — 5) Ein Kreis von veränderlichem Halbmesser geht stets durch einen gegebenen Punkt, während sein Mittelpunkt auf einem andern Kreise bleibt; man zeichne seine Umhüllungscurve.

Linien zweiter Ordnung.

221. Unter den ebenen Curven zeichnen sich durch ihre vielen merkwürdigen Eigenschaften diejenigen besonders aus, welche (aus später anzuführenden Gründen) Linien der zweiten Ordnung genannt werden. Es sind deren drei, und man unterscheidet sie durch die Namen Parabel, Ellipse, Hyperbel.

Fig. 87. **222.** Eine Parabel ist der geometrische Ort eines Punktes, welcher von einem gegebenen Punkte F und einer gegebenen Geraden AB einerlei Entfernung hat. Die AB heißt die Directrix der Parabel, der Punkt F ihr Brennpunkt, und jede Gerade, welche ihn mit einem Punkte der Peripherie verbindet, ein Brennstrahl (radius vector). Fällt man $FD \perp AB$ und macht $DS = SF$, so ist S ein Punkt der Parabel und heißt ihr Scheitel; die verlängerte SF ist ihre Axe.

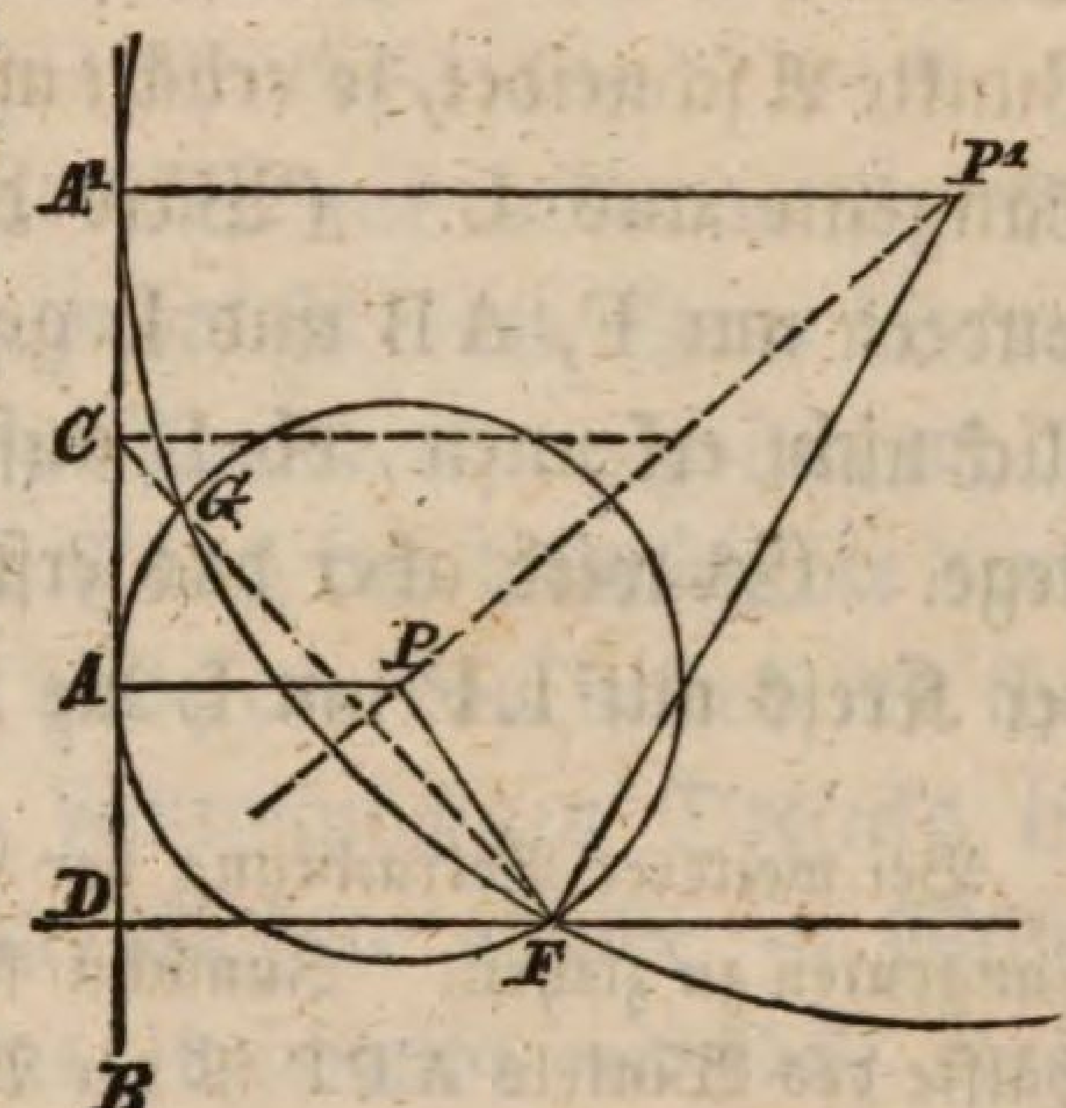
Die Parabel selbst ist nun leicht zu construiren. Denn legt man

* Ist das auf dem einen Schenkel abgeschnittene Stück Null geworden, so kann man, um die Bewegung der Geraden stetig fortzusetzeu, auf die Rückverlängerung dieses Schenkels übergehen; die hier abgeschnittenen Stücke müssen aber dann (weil man sie in entgegengesetzter Richtung zählt) als negativ aufgefaßt werden, so daß die gegebene Länge nicht mehr als Summe, sondern als Differenz der Abschnitte erscheint.

durch einen beliebigen Punkt p der Axe eine Senkrechte Pp𝔓 zu ihr und durchschneidet diese Senkrechte von F aus mit der Entfernung Dp, so sind die Schnittpunkte P und 𝔓 zwei Punkte der Parabel, und auf die nämliche Art kann man beliebig viele Paare von Punkten finden. Ueber S hinaus nach der Seite von D zu kann es keine Parabelpunkte mehr geben; denn fiele p auf diese Seite, so wäre $Dp < Fp$, also würde der um F mit Dp beschriebene Kreis die Pp𝔓 nicht mehr erreichen. Auf der Seite von S gegen F aber kann man den Punkt p so weit hinaus verlegen als man will, und man wird immer noch Punkte erhalten; die Parabel zeigt also auf dieser Seite zwei ins Unendliche laufende Zweige.

Da immer (wo auch p liegen möge) $pP = p𝔓$ ist, so sind die beiden Parabelzweige diesseits und jenseits der Axe congruent.

Die obige Erklärung der Parabel, in etwas veränderter Fassung, sagt, sie sei der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch den festen Punkt F geht und die feste Gerade AB berührt. Berühren zwei Lagen des veränderlichen Kreises (mit den Mittelpunkten P und P′) die AB in A und A′, so schneidet die verlängerte gemeinschaftliche Sehne die AB in einem Punkte C, welcher die Strecke AA′ halbirt



(denn es ist $CA^2 = CG.CF = CA'^2$); also halbirt eine durch C mit der Axe FD Parallele die Parabelsehne PP′. Da aber (indem $FC \perp PP'$) der Punkt C derselbe bleibt, wenn statt P und P′ zwei andere Parabelpunkte vorliegen deren Verbindungslinie parallel zu PP′ ist, so liegen immer die Halbirungspunkte beliebig vieler paralleler Sehnen auf einer zur Axe parallelen Geraden. Jede solche Gerade heißt ein Durchmesser der Parabel. Ein Durchmesser ist denjenigen Sehnen zugeordnet, die er halbirt.

Auf der Geraden PP′ kann es keinen dritten Parabelpunkt geben; denn der zugehörige Kreis müßte dann auch durch G gehen und die AB in einem Punkte A″ so berühren, daß $CA'' = CA' = CA$, was unmöglich. Die Parabel kann also von keiner Geraden in mehr als zwei Punkten geschnitten werden.

Hält man den Punkt P fest, während P′ (durch Aenderung des

zugehörigen Kreises) sich ihm mehr und mehr nähert, bis zuletzt die Richtung der PP′ in die Tangente für P übergeht, so sieht man, daß letztere auf FA senkrecht zu stehen kommt, denn der Punkt C (sowie A′ und G) fällt in A. Mithin halbirt die Tangente den Winkel FPA (und die Normale in P den Nebenwinkel). Zugleich sieht man, daß die verlängerte AP die Sehnen halbiren muß, welche zur Tangente in P parallel sind.

Soll (Fig. 87) von einem außerhalb der Parabel gegebenen Punkte L eine Tangente an sie gezogen werden, so ziehe man LF, beschreibe um L den Kreisbogen FA, welcher die AB in A trifft, halbire den Winkel FLA durch die Gerade LP und mache $AP \perp AB$; dann ist LP die Tangente und P ihr Berührungspunkt (denn LP halbirt den Winkel FPA). Da der Kreis um L die AB noch in einem zweiten Punkte 𝔄 schneidet, so erhält man (durch Halbirung von FL𝔄) eine zweite Tangente aus L. (Wäre die Peripherie der Parabel nicht gezeichnet, sondern nur F, AB und L gegeben, so läßt sich durch den blosen Anblick nicht erkennen, ob L auf der converen oder auf der concaven Seite liege. Es wird aber das erste oder das letzte der Fall sein, je nachdem der Kreis mit LF um L die AB schneidet oder nicht erreicht.)

Bei weiterer Betrachtung der Parabel findet man leicht noch andere Methoden, Tangenten zu ziehen. Zunächst fällt in die Augen, daß $FQ = FP$ (denn die eine Hälfte des Winkels APF ist der Wechselwinkel von W. PQF), und hierin liegt ein sehr einfaches Mittel, die Tangente PQ bei gegebenem Berührungspunkte zu finden. Ferner sieht man, daß die Linien AF und PQ sich gegenseitig senkrecht halbiren, und zwar muß ihr Schnittpunkt M auf die durch den Scheitel S gehende Tangente zu liegen kommen; denn diese letztere Tangente ist (als Halbirungslinie des flachen Winkels DSF) senkrecht auf DF, also parallel mit AD, und geht (wegen $DS = SF$) durch den Mittelpunkt M von AF. Sonach ist $SM \parallel Pp$ und also (wegen $QM = MP$) $QS = Sp$, worin abermals ein Mittel gegeben ist, die Tangente in P zu construiren (und zwar ohne Benützung des Brennpunkts). — Ist PN die Normale in P, so ist $FN = FQ = FP$ (oder die Punkte Q, P, N liegen um F im Kreise). Hiernach kann man die Normale unabhängig von der Tangente zeichnen; dasselbe ist aber auch durch den Satz ermöglicht, daß $pN = DF$, und die Wahrheit dieses Satzes folgt aus der Congruenz der Dreiecke pPN und DAF.

Die letzteren Bemerkungen führen auch auf eine Construction der Parabel selbst. Wird nämlich um F mit beliebigem Halbmesser ein Kreis beschrieben, der die Are (auf derjenigen Seite von F, auf welcher die Directrix nicht liegt) in N schneidet, und wird von N aus im Sinne von NF das constante Stück $Np = FD$ auf die Are getragen, so schneidet eine in p auf der Are errichtete Senkrechte den Kreis in zwei Parabel-

punkten. (Man kann in diesen Punkten sogleich die Tangenten beifügen, was für die Zeichnung der Peripherie sehr günstig ist.)

Um an die Parabel eine Tangente parallel mit einer gegebenen Geraden VW zu legen, fälle man $FMA \perp VW$, errichte $MP \perp FM$, $AP \perp AB$; dann ist MP die Tangente und P der Berührungspunkt, wie aus dem Vorhergehenden leicht zu beweisen. *

223. Eine Ellipse ist der geometrische Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei gegebenen Punkten F_1, F_2 eine gegebene Summe σ haben. Diese beiden Punkte heißen die Brennpunkte der Ellipse; jede Gerade von einem Brennpunkte nach einem Peripheriepunkte ist ein Brennstrahl. Fig. 88.

Trägt man vom Halbirungspunkte O der Strecke $F_1 F_2$ aus auf der Richtung derselben nach beiden Seiten die Stücke $OS_1 = OS_2 = \frac{1}{2}\sigma$ ab, so liegen die Punkte S_1, S_2 auf der Ellipse; denn

$$S_1 F_1 + S_1 F_2 = S_2 F_2 + S_1 F_2 = 2 . OS_1 = \sigma.$$

Zwei andere Punkte T_1, T_2 der Ellipse erhält man auf der Linie $T_1 O T_2$ (welche die $S_1 S_2$ senkrecht halbirt), wenn man sie von einem Brennpunkte aus mit OS_1 durchschneidet. Die Punkte S_1, S_2 heißen die Scheitel, und die Linien $S_1 S_2$, $T_1 T_2$ die Axen der Ellipse; die durch die Brennpunkte gehende Axe $S_1 S_2$ ist die größere von beiden, da ihre Hälfte $T_2 F_1$ ($= OS_1$) Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, in welchem die Hälfte OT_2 der andern eine Kathete abgibt. — Wählt man auf der großen Axe einen Punkt G und beschreibt mit GS_1 einen Kreis um F_1, mit GS_2 einen Kreis um F_2, so gehören die Schnittpunkte P, $\mathfrak{P}$ beider Kreise der Ellipse an, und in dieser Weise kann man unendlich viele Paare von Ellipsenpunkten finden; doch sieht man leicht, daß G immer zwischen F_1 und F_2 genommen werden muß, wenn sich jene Kreise schneiden sollen, und hieraus folgt zugleich, daß die Ellipse keinen unendlichen Zweig haben kann, sondern eine geschlossene Curve ist. Da die Verbindungslinie $P\mathfrak{P}$ jedesmal von $S_1 S_2$ senkrecht halbirt wird, so theilt die große Axe die Ellipse in zwei congruente Hälften. Aber auch die kleine Axe $T_1 T_2$ trennt die Ellipse in congruente Hälften; denn hätte man vorhin den Kreis vom Halbmesser $S_1 G$ um F_2, den andern um F_1

* Da bei jeder Richtung von PQ der Winkel $FMP = 90^0$ ist, so sieht man, daß die Umhüllungscurve in Nr. 220, Aufg. 1, eine Parabel sein muß. Man hat also wieder eine Construction, bei welcher man je einen Punkt der Curve und eine zugehörige Tangente auf einmal erhält.

beschrieben, so wäre statt des Dreiecks $F_1 P F_2$ das ihm congruente $F_1 P_0 F_2$ entstanden, dessen Spitze P_0 ebenfalls auf der Ellipse liegt, und aus der Lage beider Dreiecke folgt, daß die Verbindungslinie $P P_0$ durch $T_1 T_2$ senkrecht halbirt wird.* Demnach zerfällt die Ellipse durch die Verbindung beider Axen in vier congruente Quadranten. Der Durchschnitt O beider Axen ist **Mittelpunkt** der Ellipse.

Die Ellipse läßt sich auf mechanische Weise construiren mittels eines Fadens von der Länge der großen Axe, dessen beide Enden in den Brennpunkten befestigt sind; wird nämlich ein Stift so geführt, daß er den Faden stets in der Ebene des Zeichnungsblattes ausgespannt hält, so beschreibt dieser Stift die Ellipse. Denkt man sich dabei die beiden Brennpunkte einander so sehr genähert, daß sie in einen einzigen Punkt zusammenfallen, so wird der den Faden spannende Stift stets von diesem Punkte um die halbe Länge des Fadens entfernt sein, also einen **Kreis** um ihn beschreiben. Man sieht hieraus, daß der Kreis als ein besonderer Fall der Ellipse anzusehen ist.

Der obigen Erklärung zufolge erscheint die Ellipse als der geometrische Ort eines Kreises, der durch einen festen Punkt F_1 geht und einen festen Kreis (mit dem Halbmesser σ um F_2 beschrieben) von innen berührt. Sind P und P_1 die Mittelpunkte für zwei Lagen des beweglichen Kreises, welche den festen in K und K_1 berühren und sich in G schneiden, so wird $F_1 G$ durch die Richtung der $P_1 P$ senkrecht halbirt. Hält man den Punkt P fest, während der Punkt P_1 sich ihm auf der Ellipse immer mehr nähert, so fallen in dem Augenblick, in welchem die Richtung der Sekante $P P_1$ zur Tangente wird, die Punkte K_1 und G mit K zusammen und die Tangente kommt senkrecht auf $F_1 K$ zu stehen; **folglich halbirt die Tangente in P den Winkel zwischen dem einen der nach P gehenden Brennstrahlen und der Verlängerung des andern.**

Um von einem außerhalb gegebenen Punkte L eine Tangente an die Ellipse zu ziehen, verbinde man L mit einem Brennpunkte F_1, beschreibe um L mit $L F_1$ einen Kreisbogen, durchschneide ihn vom andern Brennpunkte F_2 aus mit der großen Axe $S_1 S_2$ in K, und halbire den Winkel $F_1 L K$; dann ist die Halbirungslinie LP eine Tangente und der Schnitt P der LP mit $K F_2$ ihr Berührungspunkt; denn sie halbirt, wie

---

* Man dürfte also auch (der Erklärung auf S. 160 zufolge) den Punkten T_1, T_2 den Namen Scheitel beilegen. Dieser Name soll aber hier auf die Endpunkte der **großen** Axe beschränkt bleiben, welche, da sie die Brennpunkte trägt, von vorwiegender Bedeutung ist.

leicht zu zeigen, auch den Winkel F_1PK.* Hätte man den Kreisbogen mit LF_2 beschrieben und von F_2 aus mit S_1S_2 durchschnitten, so würde man eine zweite Tangente von L aus erhalten haben. (Auf diese zweite Tangente kommt man auch, wenn man statt des Schnittpunkts K der um L und F_2 beschriebenen Kreise den zweiten Schnittpunkt derselben nimmt.)

Die Normale PN der Ellipse im Punkte P halbirt den Winkel F_1PF_2 der zu P gehörigen Brennstrahlen. Dieser Winkel ist Null, wenn P in S_2 oder S_1 fällt; und er wird von T_1T_2 halbirt, wenn P in T_1 oder T_2 fällt; daher sind beide Axen normal auf der Ellipse.

Schneidet F_1K die Tangente PM in M, so ist $OM = \frac{1}{2}KF_2 = OS_1$; also liegen die Punkte, in denen beliebige Ellipsentangenten von den aus den Brennpunkten auf sie gefällten Senkrechten getroffen werden, auf einem über der großen Axe beschriebenen Kreise.** Hieraus wird man ohne weitere Andeutung eine Lösung der Aufgabe finden: an eine Ellipse eine Tangente (oder auch eine Normale) zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel ist.

Der Fußpunkt der aus F_2 auf MP gefällten Senkrechten heiße M_2. Wird der über S_1S_2 beschriebene Kreis von der verlängerten MF_1 noch in $\mathfrak{M}$ geschnitten, so ist $F_2M_2 = F_1\mathfrak{M}$, also $F_1M \cdot F_2M_2 = S_1F_1 \cdot F_1S_2$, d. h. eine unveränderliche Größe für alle Lagen der Tangente. Geht nun die Tangente durch T_1, so ist jeder Brennpunkt von ihr um OT_1 entfernt, mithin ist jene unveränderliche Größe $= OT_1^2$, oder das geometrische Mittel aus den Abständen der beiden Brennpunkte von irgend einer Tangente der Ellipse ist immer der halben kleinen Axe gleich.

224. Eine Hyperbel ist der geometrische Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei gegebenen Punkten F_1, F_2 eine gegebene Differenz δ haben. Auch hier heißen diese Punkte die Brennpunkte und jene Entfernungen Brennstrahlen. Trägt man auf der Linie F_1F_2 von ihrem Halbirungspunkte O aus die Größe $\frac{1}{2}\delta$ nach beiden Seiten ab, so erhält man die beiden Scheitel S_1, S_2 der Hyperbel; die Fig. 89.

* Man sieht, daß man zur Lösung dieser Aufgabe die Peripherie der Ellipse gar nicht zu haben braucht, wenn nur die große Axe und die Brennpunkte gegeben sind.

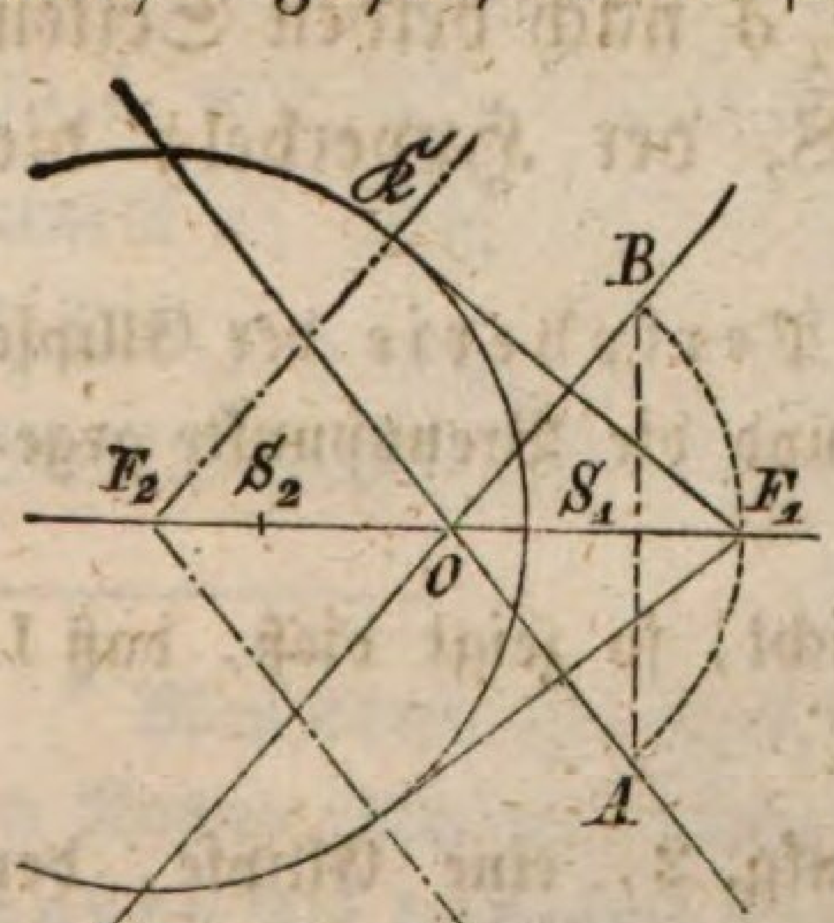
Schneiden die um L und F beschriebenen Kreise sich nicht, so zeigt dieß, daß L nicht außerhalb der Ellipse liegt.

** Mithin ist die Umhüllungscurve in Nr. 220, Aufg. 2, eine Ellipse, der gegebene Punkt einer ihrer Brennpunkte, der durch ihn gehende Kreisdurchmesser die große Axe.

(begrenzte) Linie $S_1 S_2$ heißt die reelle Axe, die in O auf ihre senkrechte (unbegrenzte) $T_1 T_2$ die imaginäre Axe. Nimmt man auf der Richtung der reellen Axe einen Punkt G und beschreibt mit den Halbmessern $G S_1$, $G S_2$ Kreise um die beiden Brennpunkte, so liegen die Schnittpunkte **P**, 𝔓 der Kreise auf der Hyperbel. Zwischen F_1 und F_2 kann G nicht fallen, weil sich sonst die Kreise nicht erreichen; über diese Punkte hinaus aber kann man G in jede noch so große Entfernung rücken; die Hyperbel kann also keine geschlossene Curve sein; vielmehr besteht sie aus zwei getrennten Aesten, deren jeder wieder zwei unendliche Zweige hat. Die beiden Axen scheiden die Hyperbel in vier congruente Quadranten (was gerade so bewiesen wird wie bei der Ellipse); O ist der Mittelpunkt der Hyperbel.

Der Erklärung zufolge wird die Hyperbel beschrieben vom Mittelpunkt eines beweglichen Kreises, welcher durch einen festen Punkt F_1 geht und einen festen, mit dem Halbmesser δ um F_2 beschriebenen Kreis von außen berührt (wobei der bewegliche Kreis entweder ebenfalls auf seiner äußern oder auch auf seiner innern Seite vom festen berührt werden kann). Ist K der Berührungspunkt für die um P beschriebene Lage des beweglichen Kreises, so führt eine ganz ähnliche Betrachtung wie die auf S. 184 für die Ellipse angestellte auf den Satz, daß die Tangente der Hyperbel in P die Linie $F_1 K$ senkrecht halbirt, also den Winkel $F_1 P F_2$ der nach P gehenden Brennstrahlen halbirt.

Rückt der Punkt P auf der Hyperbel in immer größerer Entfernung, so nähert sich das Verhältniß der zugehörigen Brennstrahlen mehr und mehr dem der Gleichheit, und der Schnittpunkt R der Tangente mit $F_1 F_2$ rückt demnach (da $F_1 R : R F_2 = F_1 P : P F_2$) immer näher an O; die Tangenten für die unendlich fernen Punkte der Hyperbel müssen also durch O gehen, wobei sie zu Asymptoten werden. Zugleich werden für



einen unendlich fernen Punkt der Hyperbel die beiden Brennstrahlen unter sich, also auch mit der Tangente (Asymptote) parallel. Endlich wird der bewegliche, um P beschriebene Kreis mit dem Fortrücken des Punkts P immer flacher und ist, wenn P in unendliche Entfernung fällt, als gerade Linie zu betrachten. Zieht man also aus F_1 an den festen Kreis die Tangente F_1 𝔎, so ist die durch den Berührungspunkt 𝔎 gehende F_2 𝔎 die

Richtung des nach einem unendlich fernen Hyperbelpunkt zielenden Brennstrahls und OB (|| F_2 𝔎) eine Asymptote. Auf eine zweite Asymptote OA führt in ähnlicher Weise die zweite Tangente aus F_1 an den festen Kreis. — Ist $S_1 B \perp OS_1$, so ist $OB = OF_1$ (denn die Dreiecke OS_1B und F_1 𝔎 F_2 sind ähnlich, $OS_1 = \frac{1}{2} F_2$ 𝔎, also $OB = \frac{1}{2} F_2 F_1$). Hiernach lassen sich die beiden Asymptoten unmittelbar construiren, wenn man durch den Scheitel S_1 senkrecht zur reellen Axe die Gerade AB legt, sie aus O mit OF_1 in A, B durchschneidet und OA, OB zieht.

Was bei der Ellipse über die Aufgabe: aus einem außerhalb gegebenen Punkte eine Tangente zu ziehen, gesagt ist, läßt sich unverändert auf die Hyperbel übertragen, wenn man statt der Fig. 88 die Fig. 89 vor Augen hat.

Die Normale im Punkte P der Hyperbel halbirt den Nebenwinkel der ihm entsprechenden Brennstrahlen. Die Normale der beiden Scheitel ist die reelle Axe.

Ganz ähnlich wie bei der Ellipse findet man, daß die Punkte, wo die Tangenten einer Hyperbel von den aus den Brennpunkten auf sie gefällten Lothen getroffen werden, auf einem über $S_1 S_2$ beschriebenen Kreise liegen;* ferner daß das geometrische Mittel aus den Abständen der Brennpunkte von einer beliebigen Tangente eine unveränderliche Größe ist und zwar gleich dem Abstande eines Brennpunkts von einer Asymptote, mithin auch gleich dem Stücke S_1 A. Geht nämlich die Tangente in eine Asymptote über, so werden die aus den Brennpunkten auf sie gefällten Lothe einander gleich und berühren den über $S_1 S_2$ beschriebenen Kreis, woraus zugleich eine neue Construction der Asymptoten folgt.

Der erste der eben angeführten Lehrsätze gewährt ein Mittel, an die Hyperbel eine Tangente parallel mit einer gegebenen Geraden zu ziehen. Diese Aufgabe hört auf, lösbar zu sein, wenn die aus einem Brennpunkt auf die gegebene Gerade gefällte Senkrechte den Kreis über $S_1 S_2$ nicht trifft, d. h. wenn die Projection der Strecke OF_1 auf die Gerade größer ist als der Halbmesser des Kreises. Denkt man sich die gegebene Gerade durch O gelegt, so wird dieses Zeichen der Unlösbarkeit auftreten, sobald die Gerade in den Winkel AOB fällt.

225. Durch die Lage des Punkts p ist in Fig. 87, 88 und 89 auch die Lage des Punkts P oder 𝔓 bestimmt und also auch der Abstand Pp eines solchen Punktes von der Axe. Dieser Abstand heiße die Ordinate des Punktes P. Die Lage des Punkts p selbst kann dadurch bestimmt werden, daß man seine Entfernung von einem bestimm-

* Also führt die Aufg. 3 in Nr. 220 auf eine Hyperbel.

ten Punkte der Axe angibt, und für diesen nimmt man am besten in Fig. 87 den Scheitel S, in Fig. 88 und 89 den Schnittpunkt O beider Axen. Die Entfernung Sp (Fig. 87) oder Op (Fig. 88, 89) heißt die Abscisse des Punkts P. In den letzteren Fällen müßte man noch angeben, auf welcher Seite von O man diese Entfernung abnimmt; doch folgt aus der Congruenz der rechts und links von $T_1 T_2$ liegenden Curvenhälften, daß gleichen Abscissen zu beiden Seiten gleiche Ordinaten zukommen. Jeder bestimmten Abscisse Sp oder Op entsprechen zwei gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Ordinaten Pp und 𝔓p. Ist nun der Werth einer Abscisse in Zahlen gegeben, so muß der Werth der zugehörigen Ordinate auch durch Rechnung gefunden werden können, oder es muß sich die zwischen der Abscisse und Ordinate jedes Curvenpunktes P stattfindende Beziehung durch eine Gleichung ausdrücken lassen. In einer solchen Gleichung wird immer die Abscisse durch x und die zugehörige Ordinate durch y bezeichnet.

Abscisse und Ordinate führen auch den gemeinschaftlichen Namen Coordinaten.

Fig. 87. **226.** Um diese Gleichung für die Parabel abzuleiten, bemerke man, daß FP = AP = Dp, oder, wenn man DF durch c bezeichnet und die eben erwähnte Bezeichnung der Abscisse und Ordinate einführt:

$$\sqrt{y^2 + (x - \frac{c}{2})^2} = x + \frac{c}{2}.$$

Die Entwickelung gibt

$$y^2 = 2cx. \qquad (A)$$

Die Sehne der Parabel, welche durch den Brennpunkt geht und auf der Axe senkrecht steht (oder die doppelte Ordinate eines Punkts, dessen Abscisse SF ist), heißt der Parameter der Parabel und hat die Länge 2c; denn für $x = \frac{c}{2}$ wird $y = c$.*

Die Gleichung $y = \sqrt{2cx}$ lehrt auch zu jeder Abscisse die Ordinate durch Construction finden, wenn die Länge 2c des Parameters gegeben ist.

---

* Die in Nr. 222 bewiesenen Sätze pN = DF und QS = Sp lassen sich jetzt so aussprechen: die Projection des Normalenstücks PN auf die Axe ist immer dem halben Parameter gleich; und die Projection des Tangentenstücks PQ auf die Axe ist gleich der doppelten Abscisse des Berührungspunkts.

227. In der Ellipse ist Fig. 88.

$$Pp^2 + F_1p^2 = F_1P^2$$

und

$$Pp^2 + F_2p^2 = F_2P^2$$

oder, wenn man $Pp = y$, $Op = x$, $OF_1 \; (= OF_2) = f$, $F_1P = r_1$, $F_2P = r_2$ setzt:

$$y^2 + (f - x)^2 = r_1^{\,2} \qquad (1)$$

$$y^2 + (f + x)^2 = r_2^{\,2}. \qquad (2)$$

Ferner ist, wenn man die halbe große Axe durch α bezeichnet:

$$r_1 + r_2 = 2\alpha. \qquad (3)$$

Durch Subtraction der Gleichung (1) von (2) und mit Berücksichtigung der Gl. (3) erhält man

$$4fx = r_2^{\,2} - r_1^{\,2} = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 2\alpha(r_2 - r_1)$$

$$r_2 - r_1 = \frac{2fx}{\alpha}$$

$$r_2 + r_1 = 2\alpha$$

also

$$r_2 = \frac{fx}{\alpha} + \alpha.$$

Nach Substitution dieses Werthes in (2) und gehöriger Reduction folgt

$$\frac{x^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - f^2) + y^2 = \alpha^2 - f^2.$$

Nun ist aber $OF_1^{\,2} = T_2F_1^{\,2} - T_2O^2$, d. i., wenn man die halbe kleine Axe durch β ausdrückt:

$$f^2 = \alpha^2 - \beta^2 \quad \text{oder} \quad \alpha^2 - f^2 = \beta^2$$

und dadurch geht die vorige Gleichung über in

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2)$$

oder

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1. \qquad (B)$$

Durch eine andere Umformung ergibt sich die Proportion

$$y : \sqrt{(\alpha + x)(\alpha - x)} = \beta : \alpha$$

oder auch

$$x : \sqrt{(\beta + y)(\beta - y)} = \alpha : \beta.$$

Der hierin liegende Lehrsatz läßt sich noch bequemer aussprechen, wenn man sich die Glieder der gleichgesetzten Verhältnisse verdoppelt denkt; er lautet dann: W i r d ü b e r d e r e i n e n E l l i p s e n a x e e i n K r e i s b e s c h r i e b e n u n d s e n k r e c h t z u i h r e i n e G e r a d e g e z o g e n, so

verhält sich das durch den Kreis ausgeschnittene Stück dieser Geraden zu dem durch die Ellipse ausgeschnittene Stück wie jene Axe zur andern Axe der Ellipse. — Man erhält eine halbe Ellipse, wenn man aus den Punkten eines Halbkreises Senkrechte auf den Durchmesser fällt und sie alle in einem und demselben Verhältniß verkürzt oder verlängert; der Kreisdurchmesser stellt im ersten Falle die große, im zweiten die kleine Axe der Ellipse dar. Sind beide Axen einer Ellipse gegeben, so kann man hiernach die Ellipse ohne Hülfe der Brennpunkte construiren, am besten durch das in Fig. 105 (Taf. VI) angedeutete Verfahren. (Man schneidet nämlich die beiden über den Axen beschriebenen Kreise durch eine vom Mittelpunkt ausgehende Gerade und legt durch die Schnittpunkte Senkrechte zu den betreffenden Axen; diese Senkrechten begegnen sich in einem Ellipsenpunkte.)

Drei durch diese Construction erhaltene Ellipsenpunkte können nicht in gerader Linie liegen, denn sonst müßten auch die entsprechenden Punkte auf einem der benützten Kreise in gerader Linie liegen. Eine Gerade kann also eine Ellipse in nicht mehr als zwei Punkten schneiden.

Die durch einen Brennpunkt gehende und zur großen Axe senkrechte Sehne der Ellipse heißt Parameter. Seine Länge beträgt $2\,\frac{\beta^2}{\alpha}$; denn für $x = f = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ findet man $y = \frac{\beta^2}{\alpha}$.

Fig. 89. **228.** Setzt man in der Hyperbel $PF_1 = r_1$, $PF_2 = r_2$, $Op = x$, $Pp = y$, $OF_1 (= OF_2) = f$, $OS_1 (= OS_2) = \alpha$, so ist (vermöge der rechtwinkeligen Dreiecke PpF_1 und PpF_2)

$$y^2 + (x - f)^2 = r_1^2 \qquad (1)$$

$$y^2 + (x + f)^2 = r_2^2. \qquad (2)$$

Ferner ist $$r_2 - r_1 = 2\alpha. \qquad (3)$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt (wie vorhin in Nr. 227)

$$4fx = 2\alpha\,(r_2 + r_1).$$

Man hat also $$r_2 + r_1 = \frac{2fx}{\alpha}$$

$$r_2 - r_1 = 2\alpha$$

$$r_2 = \frac{fx}{\alpha} + \alpha$$

und nach Substitution dieses Werthes in (2):

$$\frac{x^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - f^2) + y^2 = \alpha^2 - f^2.$$

Man sieht, daß bisher sowohl das Verfahren selbst als das Resultat desselben das nämliche ist, wie bei Herleitung der auf die Ellipse bezüglichen Gleichung (in Nr. 227), nur daß jetzt die Größe f nicht durch andere bereits gegebene Größen ausgedrückt werden kann. So wie aber dort durch die Substitution $f^2 = \alpha^2 - \beta^2$ die Gleichung sich bedeutend vereinfachte, so kann man auch hier auf eine einfachere Form kommen, wenn man f als die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks nimmt, dessen eine Kathete α ist, und den Werth der andern Kathete in die Rechnung einführt. (Diese Annahme ist erlaubt, da $f > \alpha$.) Bedeutet β den Werth dieser zweiten Kathete, so ist $f^2 = \alpha^2 + \beta^2$ und die letzte Gleichung verwandelt sich in

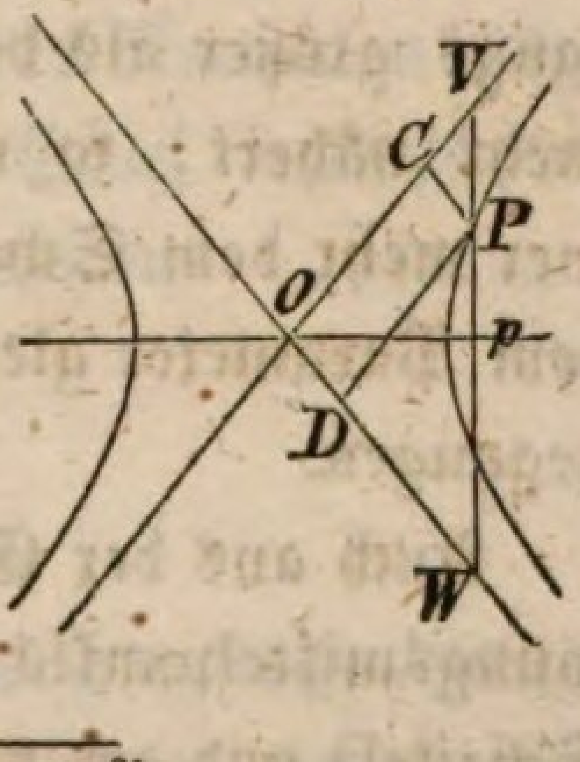
$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(x^2 - \alpha^2)$$

oder

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\alpha^2} = 1. \qquad \text{(C)}$$

Um β durch Construction zu finden, hätte man in S_1 eine Senkrechte $S_1 A$ auf $S_1 S_2$ zu errichten und sie mit OF_1 von O aus in A zu durchschneiden; dann ist $S_1 A = \beta$. Hieraus folgt aber, daß 2β das Stück der Scheiteltangente ist, welches zwischen die **Asymptoten** der Hyperbel fällt.

Die Sehne, welche durch einen Brennpunkt senkrecht zur reellen Axe der Hyperbel geht, heißt der **Parameter**. Aus der Gleichung der Hyperbel berechnet sich die Länge des Parameters $= 2\frac{\beta^2}{\alpha}$.



Schneidet eine zur reellen Axe Senkrechte die Hyperbel in P, die beiden Asymptoten in V und W, und bezeichnet man Vp (= Wp) durch Y, während Op = x und Pp = y ist, so hat man

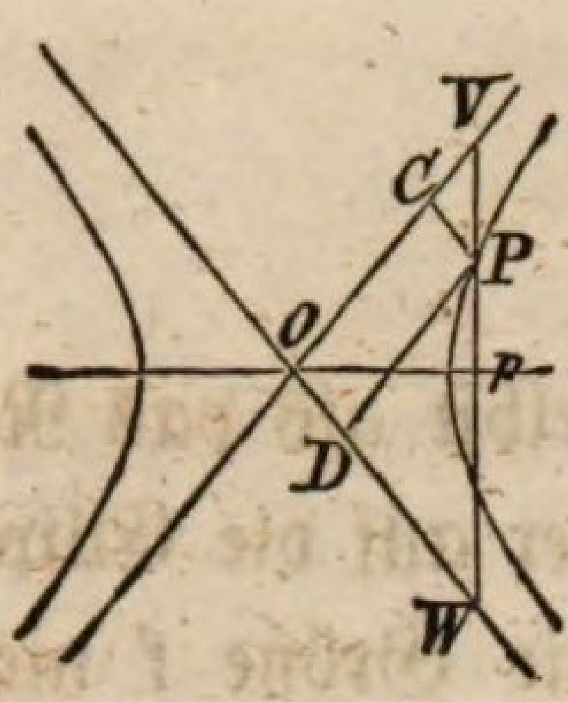
$$PV = Y - y, \quad PW = Y + y;$$

da aber $Y : \beta = x : \alpha$ oder $Y = \frac{\beta}{\alpha}x$,

so ist $PV = \frac{\beta}{\alpha}(x - \sqrt{x^2 - \alpha^2})$, $PW = \frac{\beta}{\alpha}(x + \sqrt{x^2 - \alpha^2})$,

also $PV \,.\, PW = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\alpha^2 = \beta^2$,

d. h. das Rechteck PV . PW ist eine **unveränderliche Größe**.



Zieht man durch P zu den Asymptoten die Parallelen PC, PD, so ist $PC : PV = PD : PW$ oder, wenn die Zahl m den Verhältnißexponenten bezeichnet,

$$PC = m . PV, \quad PD = m . PW, \quad PC . PD = m^2 \beta^2.$$

Die Zahl m bleibt aber dieselbe, wenn die Constructionen der Figur von einer andern Lage des Punkts P auf der Hyperbel ausgehen, da die Dreiecke PCV und PDW stets dem Dreieck VWO ähnlich bleiben; also ist das Produkt PC . PD für alle Hyperbelpunkte dasselbe; und da zwei Parallelogramme mit gleichem Winkel sich verhalten wie die Produkte der einschließenden Seiten, so bleibt auch die Größe des veränderlichen Parallelogramms OP ungeändert, woraus folgt, daß die in Nr. 201, Beisp. 3, näher betrachtete Curve eine Hyperbel ist.

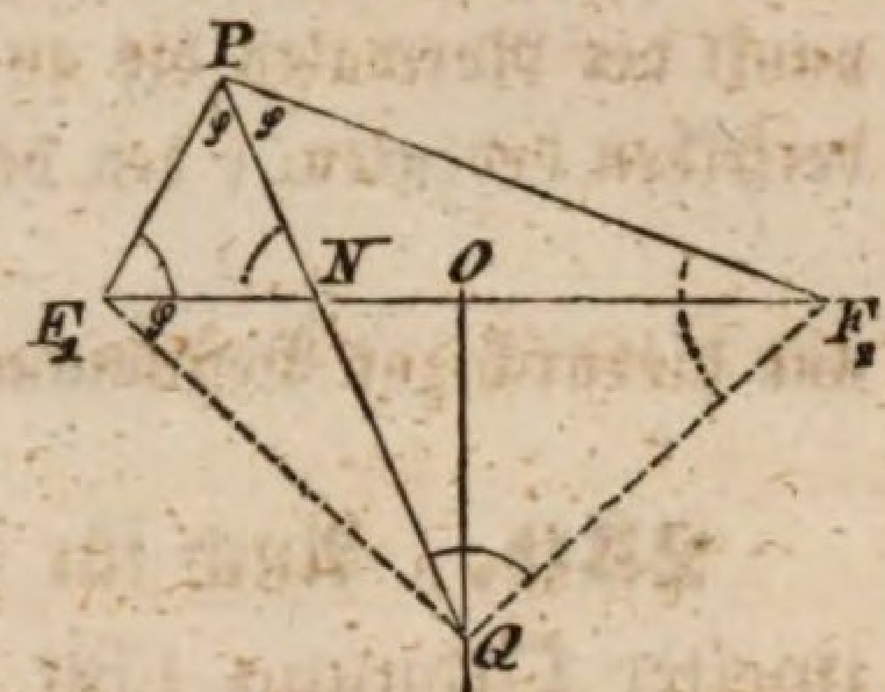
229. Da die Krümmungskreise für die Scheitel der Linien zweiter Ordnung, sowie für die Endpunkte der kleinen Axe einer Ellipse, in Berührung dritter Ordnung mit den Curven stehen (Nr. 203, †), so ist es für die Construction dieser Curven von besonderem Werthe, die Mittelpunkte jener Kreise zu kennen. Man findet, daß der Krümmungshalbmesser für die Scheitel der Parabel, Ellipse und Hyperbel immer dem halben Parameter der betreffenden Curve gleich, für die Endpunkte der kleinen Ellipsenaxe aber $= \frac{\alpha^2}{\beta}$ ist.

I. Für die Parabel führt die zu Ende der Nr. 226 angedeutete Construction auf den gewünschten Punkt. Dort nämlich hat man irgend einen durch den Scheitel gehenden Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Axe liegt, zu beschreiben, auf der Axe, vom diametralen Gegenpunkt des Scheitels aus, den Parameter einzutragen und durch dessen Endpunkt eine Senkrechte zur Axe zu ziehen, welche den Kreis in zwei Parabelpunkten schneidet. Der Kreis wird immer die Parabel im Scheitel berühren, in den ebengenannten Punkten sie schneiden; ist aber der Durchmesser kleiner als der Parameter, so gibt es keine Schnittpunkte mehr. Wenn nun der Durchmesser anfangs größer als der Parameter ist und sich durch Verminderung diesem mehr und mehr nähert, so werden die Schnittpunkte des Kreises und der Parabel sich immer mehr dem Scheitel nähern, und beide fallen in diesen, sobald der Durchmesser dem Parameter gleich geworden ist; der Kreis ist dann in den Osculationskreis übergegangen.

Auch aus der Eigenschaft $pN = DF = c$ (Fig. 87) läßt sich die Lage des Krümmungsmittelpunkts finden, wenn man ihn als Schnitt der Axe (der Normalen im Scheitel) und der unmittelbaren Nachbarnormalen betrachtet; denn rückt P (und also auch p) dem Scheitel unendlich nahe, so wird $SN = c$.

II. Für die Ellipse sind aus den schon bekannten Eigenschaften zunächst noch ein paar andere zu entwickeln. Sind F_1, F_2 die Brennpunkte, P ein Punkt der Ellipse, PQ die Normale für P, OQ die Richtung der kleinen Axe, so muß der um

das Dreieck F_1PF_2 beschriebene Kreis durch Q gehen, weil sowohl PQ als OQ nach dem Halbirungspunkt des Bogens F_1F_2 gerichtet ist; daher ist $\triangle PNF_1 \sim \triangle PF_2Q$, also, wenn man PQ durch q bezeichnet (und im Uebrigen die Bezeichnungen der Nr. 227 beibehält)



$$q : F_2Q = r_1 : F_1N = \alpha : f\,*$$

$$\frac{\alpha}{q} = \frac{f}{F_2Q} = \cos\varphi,$$

d. h. die Projection des vom Curvenpunkte bis an die kleine Axe reichenden Stücks der Normalen auf einen der betreffenden Brennstrahlen ist der großen Halbaxe gleich.

Ferner ist, wenn man PN = n setzt,

$$n : r_1 = r_2 : q \qquad \text{oder} \qquad nq = r_1 r_2.$$

Denkt man sich durch P die Tangente gezogen und auf sie die Senkrechten F_1M, F_2M_2 gefällt, so ist

$$F_1M = r_1 \cos\varphi, \qquad F_2M_2 = r_2 \cos\varphi,$$

also (Nr. 223) $\qquad \beta^2 = r_1 r_2 \cos^2\varphi = r_1 r_2 \cdot \frac{\alpha^2}{q^2} = n\frac{\alpha^2}{q}$

oder (wenn c den halben Parameter bedeutet)

$$\frac{n\alpha}{q} = \frac{\beta^2}{\alpha} = c; \qquad \frac{c}{n} = \frac{\alpha}{q} = \cos\varphi,$$

d. h. die Projection des vom Curvenpunkt bis an die große Axe reichenden Stücks der Normalen auf einen der betreffenden Brennstrahlen ist dem halben Parameter gleich.

Das Zusammenfassen beider Sätze (oder schon die auf den zweiten Satz führende Gleichung $\frac{c}{n} = \frac{\alpha}{q}$) lehrt, daß von den beiden Stücken, welche auf einer Normalen je vom Fußpunkt bis an die kleine und bis an die große Axe reichen, jenes zu diesem sich verhält wie die große Axe zum Parameter.

Liegt der Curvenpunkt, zu welchem die Normale gehört, einem Endpunkt der großen Axe unendlich nahe, so unterscheidet sich das erstere Stück um unendlich wenig von der großen Halbaxe, also weicht das zweite kaum von der Länge des halben Parameters ab und muß zuletzt (beim Zusammenfallen der Normalen mit der großen Axe) dieser Länge gleichgesetzt werden. Nähert sich aber der Fußpunkt der Normalen möglichst einem Endpunkt der kleinen Axe, so nähert sich das zweite Stück fortwährend dem Werthe β, das erstere also einem Werthe ϱ, welcher der Proportion

$$\varrho : \beta = \alpha : c \qquad \text{oder} \qquad \varrho : \beta = \alpha^2 : \beta^2$$

entspricht, woraus folgt $\qquad \varrho = \frac{\alpha^2}{\beta}.$

III. Für die Hyperbel läßt sich eine ganz ähnliche Betrachtung anstellen (unter leicht erkennbaren Modifikationen der Figur); man gelangt auch hier zu den beiden

---

* Ein Blick auf Fig. 88 nämlich lehrt, daß

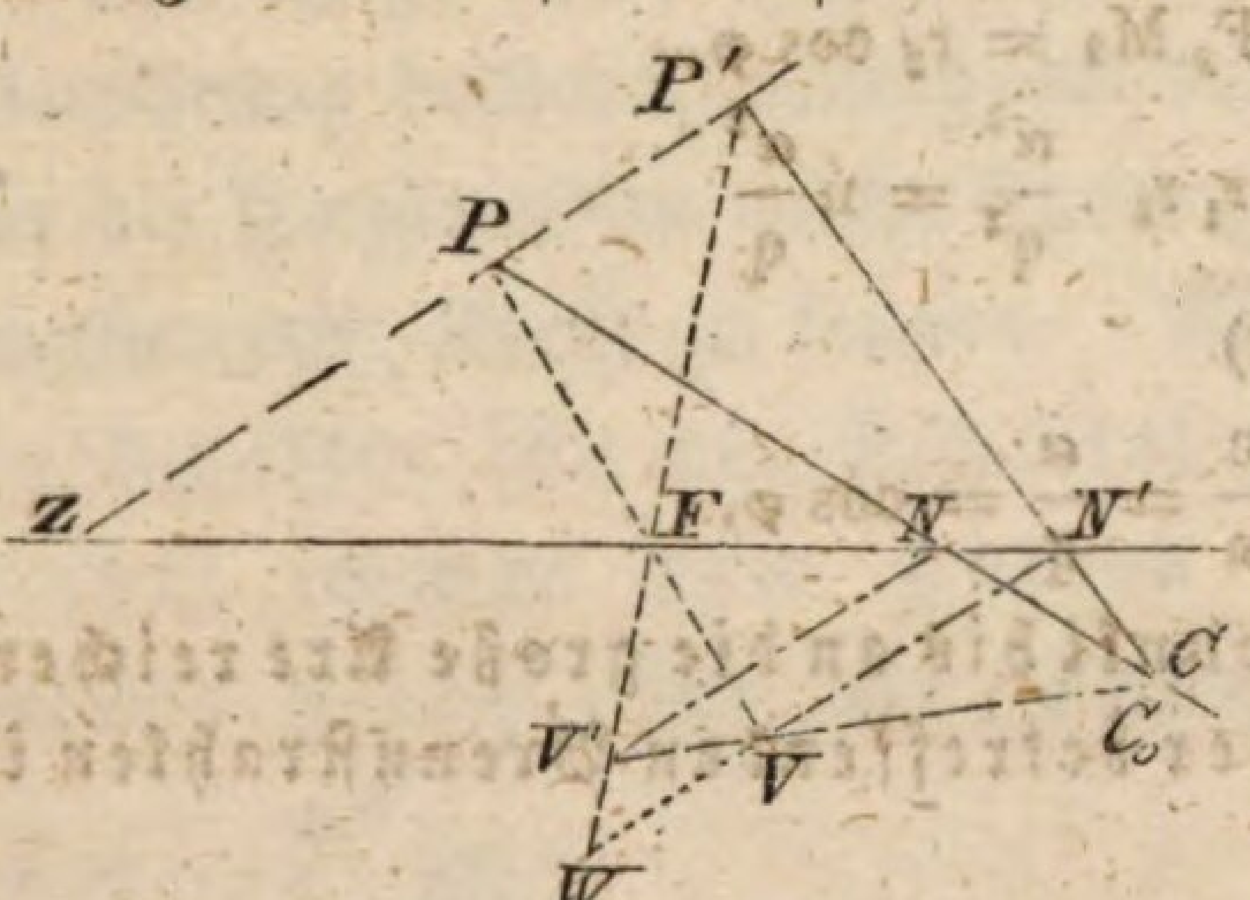
$$r_1 : F_1N = r_2 : F_2N = F_2K : F_2F_1 = \alpha : f.$$

in (II) ausgesprochenen Sätzen,* sowie zu der Folgerung, daß (wenn q, n die vom Fußpunkt der Normalen bis an die imaginäre Axe und die reelle Axe reichenden Stücke derselben bedeuten, c den halben Parameter)

$$q : n = \alpha : c,$$

und hiedurch zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunkts für die beiden Scheitel.

230. Auch für jeden andern Punkt auf der Peripherie einer Linie zweiter Ordnung läßt sich der Krümmungsmittelpunkt leicht bestimmen. Ist nämlich P ein Punkt der Curve, N der Punkt, wo die zugehörige Normale die durch den Brennpunkt gehende Axe trifft, so errichte man in N eine Senkrechte auf der Normale, im Schnittpunkt dieser Senkrechten und des nach P gehenden Brennstrahls auf letzterem wieder eine Senkrechte; dann schneidet diese die Normale im Krümmungsmittelpunkt für P.



Um dieß nachzuweisen, sei P der gegebene Punkt, P' ein zweiter Punkt der Peripherie, PN, P'N' die zugehörigen Normalen, F ein Brennpunkt, ZN' die durch ihn gehende Axe. Durch N und N' ziehe man die zu PP' Parallelen NV' und N'V, welche die (nicht entsprechenden) Brennstrahlen in V' und V schneiden; der Punkt, wo die Gerade V'V die Normale P'N' trifft, soll C_0 heißen, während die beiden Normalen sich in C schneiden.

Insofern die Geraden, welche das Dreieck P'N'Z bilden, von der PN in den drei Punkten P, N, C, die Seitenrichtungen des Dreiecks P'N'W durch die V'V in V', V, C_0 geschnitten werden, hat man**

$$P'P \,.\, ZN \,.\, N'C = P'C \,.\, N'N \,.\, ZP, \quad \text{und} \quad P'V' \,.\, WV \,.\, N'C_0 = P'C_0 \,.\, N'V \cdot WV',$$

$$\frac{P'C}{N'C} = \frac{P'P}{ZP} \cdot \frac{ZN}{N'N} \qquad\qquad \frac{P'C_0}{N'C_0} = \frac{P'V'}{WV'} \cdot \frac{WV}{N'V}$$

---

* Daß der zweite dieser Sätze auch für die Parabel besteht, ist leicht unmittelbar zu sehen.

** Der hier benützte Lehrsatz, der nicht immer in den Compendien der Elementargeometrie ausgesprochen ist, lautet: Werden die Seiten AB, BC, CA eines Dreiecks (zwischen den Ecken oder in Verlängerung) durch eine Gerade in den Punkten c, a, b geschnitten, so ist immer

$$Ac \,.\, Ba \,.\, Cb = Ca \,.\, Bc \,.\, Ab.$$

Zieht man nämlich (Fig. 146, Taf. XI) BQ || bc, so ist

$$Ac : Bc = Ab : Qb$$
$$Ba : Ca = Qb : Cb$$
$$\overline{}$$
$$Ac \,.\, Ba : Bc \,.\, Ca = Ab : Cb,$$

woraus der Satz folgt.

Wegen des Parallelismus der drei Linien $P'Z$, NV', $N'W$ ist aber

$$\frac{ZN}{N'N} = \frac{P'V'}{WV'};\quad \text{ferner ist}\quad \frac{P'P}{ZP} = \frac{WV}{N'V},\quad \text{also}\quad \frac{P'C}{N'C} = \frac{P'C_0}{N'C_0},$$

woraus folgt, daß der Punkt C_0 mit C zusammenfällt, d. h. daß die $V'V$ durch den Schnittpunkt beider Normalen geht.

Es ist auch

$$\begin{aligned} FV' : FN &= FP' : FZ \\ FN' : FV &= FZ : FP \\ \hline FV'.FN' : FV.FN &= FP' : FP \end{aligned}$$

oder

$$FV' : FV = \frac{FP'}{FN'} : \frac{FP}{FN}.$$

Nun ist für die Parabel jeder der beiden rechts stehenden Brüche $= 1$ (Nr. 222), für die Ellipse und Hyperbel $= \frac{a}{f}$ (vgl. Nr. 229), also jedenfalls $FV' = FV$.

Hält man den Punkt P fest, während P' sich ihm auf der Curve fortwährend nähert, so bleibt V' auf dem um F mit FV beschriebenen Kreise; zuletzt fällt P' in P, N' in N, V' in V, die $P'Z$ wird zur Tangente in P, die $V'VC$ zur Kreistangente in V, also ist, sobald C zum Krümmungsmittelpunkt für P wird, $NV' \perp PN$ und $V'C \perp PF$, was auf die oben angegebene Bestimmung des Krümmungsmittelpunkts führt.

Bedeutet jetzt V den Punkt, wo der Brennstrahl PF von der in N auf der Normale PN errichteten Senkrechten getroffen wird, C den Krümmungsmittelpunkt für P, so ist bei der Parabel $PV = 2.PF$; ferner ist, wenn die Directrix von der auf sie aus P gefällten Senkrechten in A, von der Normalen in M getroffen wird, das Dreieck APM dem Dreieck VPC ähnlich. Da aber $AP\ (= PF) = \frac{1}{2}\,PV$, so ist $PM = \frac{1}{2}\,PC$, d. h. das vom Parabelpunkt bis an die Directrix reichende Stück der Normalen ist die Hälfte des entsprechenden Krümmungshalbmessers.

Sowie man in der Ellipse und der Hyperbel die Wahl hat, welchen der nach P gehenden Brennstrahlen man der Construktion des Krümmungsmittelpunkts zu Grunde legen will, so kann in der Parabel der Brennstrahl PF durch die zur Axe parallele $P\mathfrak{B}$ ersetzt werden. Wird diese von der VN in $\mathfrak{B}$ getroffen, die Axe von der (auf ihr senkrechten) $\mathfrak{B}C$ in $\mathfrak{v}$, von der Tangente PQ in Q, von der Ordinate Pp in p, so ist

$$N\mathfrak{v} = P\mathfrak{B} - pN = QN - pN = Qp;$$

Qp aber ist im Scheitel S der Parabel halbirt (Nr. 222), also $N\mathfrak{v} = 2.Sp$; mithin kann man den Punkt $\mathfrak{v}$ unmittelbar bestimmen und mit seiner Hülfe (unabhängig vom Brennpunkt) den Krümmungsmittelpunkt der Parabel.

231. Eine Parabel ist völlig bestimmt, wenn man ihren Parameter kennt. Um daher eine Parabel zu zeichnen, welche einer gegebenen ähnlich ist (Nr. 197), dürfte man nur die Länge des Parameters beliebig ändern. Daraus folgt aber, daß alle möglichen Parabeln als unter sich ähnlich anzusehen sind.

Eine Ellipse ist bestimmt durch die Werthe ihrer Halbaren α und β. Daher sind zwei Ellipsen ähnlich, wenn das Verhältniß der Aren in beiden das nämliche ist.

Eine Hyperbel ist bestimmt durch ihre reelle Halbare α und durch das Stück S_1 A, welches in Nr. 228 durch β bezeichnet wurde. Demnach sind zwei Hyperbeln ähnlich, wenn in beiden die Größen α, β dasselbe Verhältniß zu einander haben. Durch das Verhältniß $\alpha : \beta$ ist aber der Winkel der Asymptoten gegeben, weßhalb man auch sagen kann, alle Hyperbeln seien ähnlich, welche man bei verschiedenen reellen Aren zwischen dieselben Asymptoten (und zwar in das nämliche Scheitelwinkelpaar) beschreiben kann.

232. Die Parabel, Ellipse und Hyperbel stehen unter sich in naher Verwandtschaft, und schon ihre Entstehung (Nr. 222—224) zeigt, daß man sie als drei besondere Fälle eines allgemeineren Falles betrachten kann. Versteht man nämlich unter der Entfernung eines Punkts von einem Kreise den auf der betreffenden Normalen des Kreises gemessenen Abstand, und erlaubt man sich, eine Gerade als Grenzfall (bei unendlichem Wachsen des Halbmessers) zu den Kreisen zu stellen, so ist jede der drei Curven der geometrische Ort eines Punkts, der von einem gegebenen Punkte und von einem gegebenen Kreise gleichweit absteht. Je nachdem der gegebene Punkt auf der concaven oder der converen Seite des Kreises liegt, entsteht eine Ellipse oder Hyperbel. Der Unterschied zwischen concaver und converer Seite verschwindet, wenn der Kreis in eine Gerade übergegangen ist, und insofern steht die Parabel als Uebergangsfall zwischen Ellipse und Hyperbel.

Da der gegebene Punkt den einen, der Mittelpunkt des Kreises den zweiten Brennpunkt vorstellt, so verschwindet bei der Parabel der zweite Brennpunkt im Unendlichen und der zweite Brennstrahl wird durch einen Durchmesser vertreten.

Die höhere Geometrie nennt „Linie n^{ter} Ordnung" eine Linie, welche von einer Geraden in nicht mehr als n Punkten geschnitten werden kann. Da, wie früher nachgewiesen, eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse höch-

stens zwei Punkte mit einer Geraden gemein hat, so rechtfertigt sich ihr gemeinsamer Name „Linien zweiter Ordnung". *

233. Die drei Curven heißen auch Kegelschnitte, weil sie erscheinen, wenn man die Fläche eines Kegels von kreisförmiger Basis nach beiden Seiten erweitert denkt (indem man jede auf der Kegelfläche liegende Gerade über die Basis hinab und über die Spitze hinaus ohne Ende verlängert) und dann durch Ebenen schneidet. Es entsteht eine Ellipse, oder eine Parabel, oder eine Hyperbel, je nachdem eine durch die Spitze gehende und zur schneidenden parallele Ebene mit dem Kegel keine, oder eine, oder zwei Gerade gemein hat.

Für einen geraden Kegel ist dieß leicht zu erweisen, wenn man an die aus der Stereometrie bekannten Sätze anknüpft, daß auf zwei von einem Punkt ausgehenden und eine Kugel berührenden Geraden die in den Berührungspunkten endenden Stücke gleichgroß sind, und daß man um jeden Punkt der Kegelaxe eine Kugel beschreiben kann, welche die Kegelfläche längs eines Kreises berührt, dessen Ebene senkrecht zur Axe ist.

Man denke sich zwei solche Kugeln so beschrieben, daß sie zugleich auch eine den Kegel schneidende Ebene E berühren (wodurch sie völlig bestimmt sind). Begegnet eine auf dem Kegelmantel gezogene Gerade (eine „Mantellinie") den Berührungskreisen in Q_1, Q_2, der durch die Ebene E erzeugten Schnittcurve in P, und sind F_1, F_2 die Berührungspunkte der E mit den Kugeln, so ist $PF_1 = PQ_1$, $PF_2 = PQ_2$, $F_1P \pm PF_2 = Q_1Q_2$, wobei von den Zeichen $\pm$ das obere oder das untere gilt, je nachdem die beiden Kugeln auf einerlei Seite der Kegelspitze oder auf entgegengesetzten Seiten liegen, d. h. je nachdem die Ebene E die Kegelfläche nur auf einer Seite der Spitze erreicht (ohne mit einer Mantellinie parallel zu sein) oder auf beiden Seiten. Da aber Q_1Q_2 für alle Lagen der Mantellinie einerlei Größe hat, so ist die Schnittcurve im erstern Fall eine Ellipse, im zweiten eine Hyperbel (mit den Brennpunkten F_1, F_2). **

Ist E einer Mantellinie M des Kegels parallel, so gibt es nur eine Kugel, welche die beiden angegebenen Bedingungen zugleich erfüllen kann. Die Ebene K ihres Berührungskreises schneidet die Ebene E in einer Geraden D. Eine durch die Kegelaxe senkrecht zur E gelegte Ebene geht zugleich durch M, projicirt diese auf die E und steht (Nr. 5, XII) senkrecht auf D; also ist auf D auch jede Gerade senkrecht, welche man

---

* In der höhern Geometrie wird bewiesen, daß es außer den drei genannten Curven keine Linien zweiter Ordnung mehr gibt (wozu allerdings bemerkt werden muß, daß die höhere Geometrie unter den Schnittpunkten einer Geraden und einer Curve auch sogenannte imaginäre Punkte mitzählt, welche durch gewisse Rechnungsergebnisse angezeigt sind, für die Anschauung aber nicht existiren).

** Auf dieselbe Art zeigt sich, daß der Schnitt eines geraden Cylinders durch eine Ebene (wenn er nicht aus zwei Geraden besteht) eine Ellipse ist.

in der Ebene E parallel mit M zieht. Trifft eine solche Gerade die D im Punkte A, die durch die E auf dem Kegel erzeugte Schnittcurve im Punkte P, und wird durch P eine Ebene L senkrecht zur Kegelaxe gelegt, so ist PA gleich dem zwischen die Ebenen K und L fallenden Stück von M, also auch = PQ = PF (wo Q, F die vorigen Bedeutungen haben.) Mithin ist der Kegelschnitt eine Parabel, welche F zum Brennpunkt, D zur Directrix hat.

Umgekehrt läßt sich aus obigen Betrachtungen beweisen, daß jede gegebene Parabel, Ellipse oder Hyperbel auf einen geraden Kegel verlegt oder als Schnitt eines solchen durch eine Ebene angesehen werden kann. *

Zusatz. Auch in den Fällen, wo der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist, haben die Linien D_1, D_2, nach denen die Ebene E von den Ebenen der Berührungskreise geschnitten wird, ihre bestimmte Bedeutung für die Schnittcurve und führen ebenfalls den Namen Directricen. Sie stehen senkrecht auf $F_1 F_2$. Je ein Brennpunkt und eine Directrix gehören zusammen, indem sie der nämlichen Kugel entsprechen. Denkt man sich eine durch die Kegelaxe senkrecht zur E gelegte Ebene als Grundebene und zeichnet in ihr die beiden Mantellinien des Kegels, die Spur der E, die Spuren für die Ebenen der Berührungskreise und für eine durch P senkrecht zur Axe gehende Ebene, endlich die Projection der durch P gezogenen Mantellinie, so gelangt man, von der Betrachtung dieser ebenen Figur ausgehend, zu dem Satze, daß die Entfernung eines Punkts der Ellipse oder Hyperbel von einer Directrix zu seiner Entfernung vom zugehörigen Brennpunkt ein unveränderliches Verhältniß hat. — Legt man (wenn S die Kegelspitze bedeutet) durch SP eine Ebene, welche den Kegel in einer zweiten Mantellinie, die Directrix D_1 im Punkte X_0 schneidet, und dreht diese Ebene um SP bis zum Zusammenfallen der zweiten Mantellinie mit SP, so werden die Linien, nach denen die bewegte Ebene die E und die Ebene des einen Berührungskreises schneidet, gleichzeitig zu Tangenten

---

* Dabei ist von der Figur auszugehen, welche entsteht, wenn man die räumliche Figur durch eine Ebene schneidet, welche durch die Kegelaxe senkrecht auf die Ebene E geführt ist (und immer die Brennpunkte, also auch die Scheitel des Kegelschnitts enthält). Es zeigt sich, daß durch eine gegebene Linie zweiter Ordnung stets unendlich viele gerade Kegel gelegt werden können. Zugleich findet man (unter Benützung früher bewiesener Eigenschaften dieser Linien) mit Leichtigkeit folgende Sätze:

Der geometrische Ort für die Spitze eines (veränderlichen) geraden Kegels, der durch eine gegebene $\left\{\begin{matrix}\text{Ellipse}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix}\right\}$ geht, ist eine $\left\{\begin{matrix}\text{Hyperbel}\\ \text{Ellipse}\end{matrix}\right\}$, deren Scheitel die Brennpunkte und deren Brennpunkte die Scheitel der gegebenen Curve sind, während ihre Ebene senkrecht auf der Ebene der gegebenen steht.

Der geometrische Ort für die Spitze eines geraden Kegels, der durch eine gegebene Parabel geht, ist eine ihr congruente Parabel, deren Scheitel im Brennpunkt und deren Brennpunkt im Scheitel der gegebenen liegt, während die Ebenen beider Parabeln senkrecht aufeinander stehen.

In allen drei Fällen ist die Axe des beweglichen Kegels stets Tangente an der Curve, welche den geometrischen Ort seiner Spitze darstellt.

in P und Q, welche sich in einem Punkte X der mit diesem Kreise zusammengehörigen Directrix schneiden. (Der Kegelschnitt kann dabei eine Ellipse oder Hyperbel oder auch eine Parabel sein.) Da nun $XQ = XF$, $PQ = PF$, $PQX = 90^0$, so ist auch $PFX = 90^0$; d. h. für jede der drei Linien zweiter Ordnung schneidet eine Tangente die Gerade, welche in einem Brennpunkte senkrecht auf dem nach dem Berührungspunkte laufenden Brennstrahl errichtet wird, auf der zu diesem Brennpunkte gehörigen Directrix.* Hiernach lassen sich die Directricen einer Ellipse oder Hyperbel leicht zeichnen. Auch ergibt sich jetzt der Werth für das oben angeführte „unveränderliche Verhältniß ꝛc“. Nimmt man nämlich die Tangente PT so, daß der Brennstrahl senkrecht zur Axe TFN steht, und fügt man noch die Normale PN hinzu, so findet man jenes Verhältniß $(= FT : FP = FP : FN) = \alpha : f$ (Nr. 229). Für die Ellipse ersieht man diesen Werth noch leichter, wenn man den Peripheriepunkt P auf die kleine Axe verlegt.

Projectionen ebener Curven.

234. Die Projection einer ebenen Curve wird in dem besondern Falle eine gerade Linie, wenn die Ebene der Curve senkrecht zur Grundebene steht; in allen andern Fällen muß die Projection wieder krummlinig sein. (Jener besondere Fall bleibt im Nächstfolgenden unberücksichtigt.)

Hat eine Curve einen nfachen Punkt, so ist die Projection derselben ein nfacher Punkt für die Projection der Curve; denn eine an der wahren Curve hinbewegte Gerade, welche stets senkrecht auf der Grundebene bleibt, fällt nmal in das Projectionsloth des nfachen Punktes, also geht der von ihrem Fußpunkte beschriebene Weg (d. i. die Projection der Curve) nmal durch die Projection jenes Punktes.

Die Projection der Tangente am Punkte A einer Curve berührt die Projection der Curve in der Projection a von A. Denn dreht sich um A eine Gerade G, welche die Curve noch in B schneidet, so lange, bis B in A fällt, so wird die Projection b von B sich der Projection a nähern und endlich in sie fallen; die Projection g der G wird also in dem Augenblicke Tangente an der Curvenprojection, in welchem G Tangente an der wahren Curve geworden ist.** Die projicirende Ebene der

---

* Fügt man an den Brennstrahl den zweiten, der in seiner Rückverlängerung liegt, so hat man den Satz: Die beiden Tangenten in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne schneiden sich auf der Directrix.

** Die Umkehrung des Satzes ist nur dann zulässig, wenn man beide Grundebenen zugleich vor Augen hat. Auf einer Grundebene können die Projectionen einer Geraden und einer Curve sich berühren, während die wahren Linien sich schneiden.

Tangente trennt den Raum in zwei Abtheilungen, und es ist klar, daß irgend ein Punkt der wahren Curve und die Projection dieses Punktes in eine und dieselbe Abtheilung fallen müssen. Daraus folgt unmittelbar, daß die Projection des Wendepunkts einer Curve ein Wendepunkt für die Projection der Curve sein muß. Ebenso ist die Projection eines Rückkehrpunktes wieder ein Rückkehrpunkt für die Projection der Curve, und zwar bildet die Projection eine Spitze oder einen Schnabel, je nachdem das eine oder das andere bei der wahren Curve der Fall ist. Die Projection einer Asymptote ist eine Asymptote der Curvenprojection; denn führt man ein Projectionsloth an dem unendlichen Zweige der wahren Curve fort, welcher sich immer näher an die Asymptote hinzieht, so wird dieses Loth immer näher an die projicirende Ebene der Asymptote rücken und folglich auch sein Fußpunkt immer näher an die Projection der Asymptote; zum wirklichen Zusammenfallen kann es aber nicht kommen, weil dieß ein Zusammenfallen eines Punktes der wahren Curve mit deren Asymptote voraussetzen würde.

Die obigen Sätze gelten sämmtlich auch umgekehrt. (Ist nämlich die Projection einer ebenen Curve eine Gerade, so steht die Ebene der Curve senkrecht auf der GE; hat die Projection einer ebenen Curve einen Wendepunkt, so ist dieser die Projection für einen Wendepunkt der wahren Curve; u. s. f.)

235. Sind die beiden Projectionen irgend einer (ebenen oder gewundenen) Curve so gestaltet, daß jede von einer auf dem Grundschnitte senkrechten Geraden mehrmals getroffen wird, so passen diese Projectionen für mehrere Curven zugleich, und um die Lage einer solchen Curve völlig zu bestimmen, müssen wenigstens für einen Punkt die zusammengehörigen Projectionen besonders bezeichnet sein. So ist es z. B. in Fig. 91, wenn sie ohne nähere Bezeichnung gegeben ist, ungewiß, welcher von den Punkten, in denen die auf dem Grundschnitt senkrechte um die V-Projection der Curve schneidet, als V-Projection zur H-Projection u gehört. Daraus aber, daß für einen benachbarten Curvenpunkt die Projectionen s_1 und s' durch den gleichen Buchstaben als zusammenhörig bezeichnet sind, folgt, daß zu u die näher am Grundschnitte gelegene V-Projection gehört; denn es ist überhaupt dadurch ausgesprochen, daß dem Bogen $v s_1 w$ nicht der Bogen $v' s'' w'$, sondern der Bogen $v' s' w'$ als V-Projection entspricht.

Der Fall, daß eine auf dem Grundschnitt senkrechte Gerade die eine Curvenprojection in mehreren Punkten, die andere aber nur in

einem Punkte schneidet, während beide Projektionen krummlinig sind, kann zwar für gewundene Curven vorkommen; niemals aber, wenn die wahre Curve eben ist; vielmehr werden die beiden Projectionen einer ebenen Curve immer in gleichviel Punkten geschnitten. Nur in dem einzigen Falle, wenn die eine Projection der ebenen Curve gerade ist, können zu einem Punkte in dieser Projection mehrere Punkte der andern Projection zugleich gehören, weil in jener Geraden die Projectionen mehrerer Curvenbögen zusammenfallen können. Eine zum Grundschnitt senkrechte Gerade, welche die eine Projection einer ebenen Curve berührt, muß auch die andere Projection berühren, oder, falls diese geradlinig ist, durch ihren Grenzpunkt gehen.

Kreisprojection.

236. Der Mittelpunkt eines Kreises liege in der Grundebene, so daß diese also die Kreisebene nach einem Durchmesser D schneidet. Fällt man nun aus verschiedenen Punkten des obern Halbkreises senkrechte Ordinaten auf den Durchmesser D und projicirt sie, so sind ihre Projectionen ebenfalls auf dem Durchmesser senkrecht, und bei der Umklappung der Kreisebene wird jede Ordinate in die Richtung ihrer Projection fallen. Eine solche Ordinate im Kreise stellt (vor der Umklappung) die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks vor, welches zur einen Kathete die Projection der Ordinate und zur andern die Grunddistanz des betreffenden Kreispunktes hat; alle diese Dreiecke aber, welche zu den verschiedenen Ordinaten gehören, sind unter sich ähnlich, weil sie alle die Grund-Neigung der Kreisebene enthalten, und also ist das Verhältniß der Ordinate zu ihrer Projection immer dasselbe. Demnach erhält man die Projection des Halbkreises, wenn man in seiner Umklappung die erwähnten Ordinaten sämmtlich in jenem Verhältnisse (welches durch die Grund-Neigung der Kreisebene gegeben ist) verkürzt, und hieraus ist zu ersehen, daß die Projection des Kreises eine Ellipse sein muß (Nr. 227).

Hat man einen Kreis zu projiciren, dessen Mittelpunkt nicht in der Grundebene liegt, und man führt parallel zu letzterer eine Ebene durch den Mittelpunkt, so hat der Kreis auf dieser Ebene und auf der eigentlichen Grundebene congruente Projectionen. Die Projection eines Kreises ist daher in allen Fällen, in denen sie nicht in eine Gerade übergeht, eine Ellipse; die große Axe ist die Projection des mit der Grund-

ebene parallelen Durchmessers (und also diesem an Länge gleich), die kleine die Projection des Durchmessers, der auf jenem (oder auf der Spur der Kreisebene) senkrecht steht.*

Umgekehrt kann jede gegebene Ellipse als Projection eines Kreises aufgefaßt werden, dessen Durchmesser der großen Axe gleich ist.

237. Die Projection des Kreismittelpunkts ist der Mittelpunkt der Ellipse; eine Sehne der Ellipse, welche durch den Mittelpunkt geht, heißt ein Durchmesser und ist die Projection eines Kreisdurchmessers.

Die Projectionen irgend zweier aufeinander senkrechten Kreisdurchmesser heißen conjugirte oder einander zugeordnete Durchmesser der Ellipse.** Von zwei zugeordneten Ellipsendurchmessern halbirt jeder alle Sehnen, die mit dem andern parallel sind, und geht durch die Berührungspunkte zweier mit dem andern parallelen Tangenten; denn dieser Satz gilt bekanntlich im Kreise für zwei aufeinander senkrechte Durchmesser, und muß (Nr. 25, 28, 234) auch noch gelten, wenn man auf die Projectionen übergeht. Ein Durchmesser der Ellipse heißt auch jeder Sehne zugeordnet, die er halbirt.

Legt man an eine Ellipse zwei Tangenten durch die Endpunkte einer beliebigen Sehne, so schneiden sich diese Tangenten auf der Verlängerung des Durchmessers, welcher die Sehne halbirt; denn dasselbe ist im Kreise der Fall.***

Zwei Sehnen, welche irgend einen Punkt der Ellipse mit den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers verbinden, sollen conjugirte

---

* Hier zeigt sich abermals, daß der Kreis als besonderer Fall unter die Ellipsen zu zählen ist, indem die Projection eines zur Grundebene parallel liegenden Kreises wieder ein Kreis wird.

** Demnach sind auch die beiden Axen zugeordnete Durchmesser.

*** Dieser Satz läßt sich auch aus dem vorangegangenen ableiten, und diese Ableitung zeigt, daß er für die Parabel und Hyperbel ebenfalls gilt. Da nämlich in jeder der drei Curven parallele Sehnen ihre Halbirungspunkte auf einem Durchmesser haben (Nr. 222; Nr. 201, Beisp. 3, Anm.), so schneiden sich die Geraden, welche die Endpunkte einer Sehne mit den entsprechenden Endpunkten einer Parallelsehne verbinden, auf dem zugeordneten Durchmesser; der Schnittpunkt bewegt sich stetig auf dem Durchmesser, wenn die zweite Sehne sich stetig der ersten nähert und nach dem Zusammenfallen mit ihr über sie hinausrückt; also muß der Schnittpunkt auch dann auf dem Durchmesser liegen, wenn im Augenblick des Zusammenfallens jene beiden Verbindungslinien zu Tangenten werden.

heißen. Zwei ihnen parallele Durchmesser der Ellipse sind immer conjugirte, denn der von jenen Sehnen gebildete Winkel ist die Projection eines Winkels im Halbkreis.

Ist von einer Ellipse blos die Peripherie gegeben, so findet man den Mittelpunkt, wenn man durch die Halbirungspunkte irgend zweier parallelen Sehnen eine Gerade legt und das in die Ellipse fallende Stück (welches ein Durchmesser sein muß) halbirt.

Um die Axen zu erhalten (d. h. zwei zugeordnete Durchmesser welche aufeinander senkrecht stehen), beschreibe man um den Mittelpunkt einen Kreis, welcher die Ellipse in vier Punkten schneidet, verbinde von diesen Schnittpunkten zwei aufeinanderfolgende P, P_0 (Fig. 88) und lege durch den Mittelpunkt O eine Parallele $S_1 S_2$ zu PP_0 und eine Senkrechte $T_1 T_2$ auf sie; diese beiden Linien sind die Axen; denn sie sind nicht nur auf einander senkrechte, sondern auch einander zugeordnete Durchmesser, indem $P P_0$ (als Sehne des um O beschriebenen Kreises) von $T_1 T_2$ halbirt wird.

Ist ein Durchmesser gegeben, so findet man eine der von ihm halbirten Sehnen als conjugirte einer mit ihm parallelen Sehne.

Zu einem gegebenen Durchmesser findet man den zugeordneten, wenn man mit jenem parallel eine Sehne zieht und entweder durch ihren Halbirungspunkt oder parallel mit der ihr conjugirten Sehne den neuen Durchmesser legt. Oder man kann, wenn die große Axe $S_1 S_2$ bekannt ist, auf folgende Weise verfahren. Ist op die Hälfte des gegebenen Durchmessers, so fälle man $pm \perp S_1 S_2$, beschreibe über $S_1 S_2$ einen Halbkreis, verbinde den Punkt P_1, wo dieser die verlängerte mp trifft, mit dem Mittelpunkte o, errichte $oQ_1 \perp oP_1$ und fälle $Q_1 n \perp S_1 S_2$; dann ist oq die Hälfte des zu op geordneten Durchmessers; denn betrachtet man den Halbkreis $S_1 P_1 Q_1 S_2$ als die Umklappung desjenigen Halbkreises $S_1 P Q S_2$, der sich als die Ellipsenhälfte $S_1 p q S_2$ projicirt, so ist po die Projection von Po und qo die Projection von Qo, oder es sind po und qo die Projectionen zweier aufeinander senkrechten Kreishalbmesser. Fig. 90.

Für die Tangentenaufgaben ergeben sich jetzt neue Lösungen. Soll an eine Ellipse eine Tangente parallel mit einer gegebenen Geraden gelegt werden, so ziehe man eine mit ihr parallele Sehne und den dieser Sehne zugeordneten Durchmesser; von dessen Endpunkten kann jeder als Berührungspunkt der verlangten Tangente genommen werden. Ist der Berührungspunkt einer Tangente gegeben, so kann man die Tangente selbst erhalten, wenn man nach dem Berührungspunkte einen Durchmesser zieht und entweder den zugeordneten oder eine vom ersten Durchmesser halbirte Sehne zeichnet; mit der Sehne oder mit dem zweiten Durchmesser ist die gesuchte Tangente parallel. Kennt man aber die Peripherie der Ellipse nicht, sondern nur den Berührungspunkt p und die große Axe $S_1 S_2$, so errichte man über $S_1 S_2$ einen Halbkreis, fälle $pm \perp S_1 S_2$, verlängere sie bis zum Durchschnitt P_1 mit dem Halbkreis, lege durch P_1 an letztern eine Tangente, welche die verlängerte $S_2 S_1$ in R trifft, und ziehe Rp; dann ist Rp die Tangente in p; denn läßt man die Ellipse als die Projection eines Kreises gelten, von welchem ein Durchmesser $S_1 S_2$ in der Grundebene liegt, so nimmt der in p projicirte Punkt P nach Umklappung der Kreisebene die Fig. 90.

Lage P_1 ein; R ist die Spur der durch P gezogenen Kreistangente, also Rp ihre Projection, d. i. eine Tangente der Ellipse, in welche sich der Kreis projicirt. *

Der Flächeninhalt einer Ellipse ergibt sich aus dem Flächeninhalte des Kreises, dessen Projection sie ist, und aus der Grundneigung der Kreisebene; denn der in Nr. 147 bewiesene Lehrsatz muß auch noch für den Grenzfall gelten, in welchem der Umfang eines Polygons durch fortwährende Vermehrung der Seitenzahl in eine krumme Linie übergegangen ist. Bedeutet α den Halbmesser des Kreises und φ die Grundneigung seiner Ebene, so ist der Inhalt der elliptischen Kreisprojection $= \alpha^2 \pi \cdot \cos \varphi$; zugleich ist α die große Halbaxe der Ellipse, und $\alpha \cos \varphi$ der Werth der kleinen Halbaxe β, so daß der obige Ausdruck für den Inhalt der Ellipse in $\alpha\beta\pi$ übergeht. Demnach ist die Fläche einer Ellipse der Fläche eines Kreises gleich, welcher das geometrische Mittel beider Halbaxen zum Halbmesser hat.

Da alle in einen Kreis einbeschriebenen Quadrate gleichgroß sind, so folgt aus Nr. 147 noch der Satz: Alle Parallelogramme, welche in eine Ellipse so einbeschrieben sind, daß sie je zwei conjugirte Durchmesser zu Diagonalen haben, sind von einerlei Flächeninhalt. — Ebenso sind alle Parallelogramme gleichgroß, deren Seiten eine Ellipse berühren und je mit zwei conjugirten Durchmessern derselben parallel liegen.

238. Bilden auf einer Grundebene die Projectionen zweier sich schneidenden Geraden gleiche Winkel mit der Spur ihrer Ebene, so haben die Geraden gleiche Grundneigung.

Eine Ellipse, deren große Axe als Spur für die Ebene des Kreises gilt, von welchem die Ellipse die Projection ist, werde von einer Geraden in den Punkten a_1, a_2 geschnitten, von einer zweiten Geraden, welche der ersten in c begegnet und gegen die große Axe denselben Winkel bildet wie jene, in b_1, b_2. Bedeuten $C, A_1, \ldots$ die in der Kreisebene liegenden Punkte welche sich nach $c, a_1 \ldots$ projiciren, ψ die gemeinschaftliche Horizontalneigung der CA_1 und der CB_1, so ist

---

* Diese Construction der Tangente hätte schon in Nr. 227 aus dem dort ausgesprochenen Lehrsatz erschlossen werden können, indem die Verbindungslinie zweier Ellipsenpunkte und die Verbindungslinie der ihnen entsprechenden Kreispunkte sich immer auf derjenigen Ellipsenaxe schneiden müssen, über welcher der Kreis beschrieben ist. Hieraus folgt zugleich, daß obiger Construction eine ganz analoge, welche den Kreis über der kleinen Axe benützt, zur Seite steht.

$$ca_1 = CA_1 \cos\psi, \qquad cb_1 = CB_1 \cos\psi,$$
$$ca_2 = CA_2 \cos\psi, \qquad cb_2 = CB_2 \cos\psi,$$

also (wegen $CA_1 \cdot CA_2 = CB_1 \cdot CB_2$):

$$ca_1 \cdot ca_2 = cb_1 \cdot cb_2,$$

d. h. durch die vier Ellipsenpunkte a_1, a_2, b_1, b_2 läßt sich ein Kreis legen.

Indirect kann der umgekehrte Satz bewiesen werden, daß, wenn eine Ellipse von einem Kreise in vier Punkten geschnitten wird, die Verbindungslinie zweier von diesen Punkten denselben Winkel mit der Axe macht wie die Verbindungslinie der beiden andern; hiernach lassen sich, wenn blos die Peripherie einer Ellipse vorliegt, die Axen finden, ohne daß man zuvor den Mittelpunkt (vgl. Nr. 237) zu bestimmen braucht.

Verrückt man die Gerade $b_1 b_2$ parallel, bis b_1 mit a_1 (also auch mit c) zusammenfällt, so wird die Richtung der dem Kreise $a_1 a_2 b_2$ und der Ellipse gemeinsamen Sehne $a_1 b_1$ durch Drehung zur gemeinsamen Tangente in a_1. Gehen also durch einen Ellipsenpunkt a_1 zwei Gerade, welche gegen eine Axe gleiche Winkel bilden und die Ellipse noch in a_2, b_2 schneiden, so berührt ein durch a_1, a_2, b_2 gelegter Kreis die Ellipse in a_1.

Dieser Berührungskreis geht in den Osculationskreis für a_1 über, wenn die beiden Geraden sich (während die Gleichheit ihrer Winkel gegen die Axe bleibt) um a_1 so lange drehen, bis die eine von ihnen zur Tangente der Ellipse wird. Hieraus ergibt sich eine neue Construction des Krümmungsmittelpunkts für a_1. Zieht man nämlich durch a_1 eine Tangente und eine Sehne der Ellipse unter gleichen Winkeln gegen eine Axe, so trifft das Mittenloth der Sehne die Normale des Punkts a_1 im gesuchten Punkt.

239. Da eine Ellipse durch ihre beiden Axen gegeben ist, so wird man, um einen Kreis zu projiciren, zunächst die beiden Axen der Projection suchen, und dann aus diesen die Ellipse selbst construiren.

Um nun mittels der Axen die Peripherie einer Ellipse zu zeichnen, kann nach Nr. 227 (Fig. 105) oder auch (nachdem man zuvor die Brennpunkte bestimmt hat) nach Nr. 223 verfahren werden. Auf noch eine andere Art der Construction leitet folgender Lehrsatz.

Durchschneidet man von irgend einem Punkte p der Peripherie aus die kleine Axe einer Ellipse (oder auch ihre Verlängerung) mit der hal- Fig. 90.

den großen Axe α in w, so ist das Stück pv, welches auf der Geraden pw vom Punkte p bis an die große Axe reicht, der halben kleinen Axe β gleich.

Zum Beweise dieses Satzes beschreibe man über der großen Axe $S_1 S_2$ einen Halbkreis, fälle pm $\perp S_1 S_2$, verlängere sie, bis sie den Halbkreis in P_1 trifft, und ziehe $P_1 o$. Nun ist $P_1 o$ $(= o S_1) = pw$, $P_1 p \parallel ow$; daher auch $pw \parallel P_1 o$ und

$$pv : P_1 o = pm : P_1 m = \beta : \alpha;$$

aber $P_1 o = \alpha$, also $pv = \beta$.

In der Figur ist nur die eine Lage des Punkts w aufgenommen; die andere (auf der verlängerten $o T_1$) führt zu einer zweiten Lage des Punkts v, welche mit der ersten und mit p ein gleichschenkeliges Dreieck (dessen Spitze p) bestimmt, so daß der Satz auch für die zweite Lage richtig ist.

Trägt man demnach auf eine gerade Linie (etwa auf den geradlinigen Rand eines Papierstreifens) drei Punkte p, v, w so auf, daß pw der großen und pv der kleinen Halbaxe gleich ist, und führt diese Linie so, daß w immer auf der kleinen und v immer auf der großen Axe bleibt, so ist jede Lage des Punktes p ein Punkt der Ellipse. Dabei kann vw entweder $= \alpha - \beta$ oder $= \alpha + \beta$ sein.

240. Aufg. In einer gegebenen Ebene PQP′ liegt ein Kreis vom Halbmesser ϱ so, daß die H-Projection seines Mittelpunkts in o fällt. Man soll die Projectionen des Kreises zeichnen.

Fig. 91. **Aufl.** Man ziehe $s_1 o s_2 \parallel PQ$, mache $os_1 = os_2 = \varrho$, suche die H-Neigung α der Ebene PQP′ (Nr. 78), zeichne $\triangle$ xyz so, daß W. xyz $= \alpha$, W. xzy $= 90^0$, xy $= \varrho$, fälle $t_1 o t_2 \perp QP$, mache $ot_1 = ot_2 = yz$. Dann sind $s_1 s_2$, $t_1 t_2$ die Axen für die H-Projection des Kreises.

Auf ähnliche Weise findet man, nachdem die V-Projection o′ des Mittelpunkts bestimmt wurde, die Axen für die V-Projection des Kreises.

Fig. 91. **241. Aufg.** In der HE sind die beiden Axen $s_1 s_2$, $t_1 t_2$ für die Projection eines Kreises gezeichnet; außerdem ist die V-Projection o′ des Mittelpunkts gegeben. Man soll die beiden Projectionen des Kreises zeichnen.

Aufl. Ist $s_1 s_2$ die große Axe, so liegen die V-Projectionen s′, s″ der zugehörigen Kreispunkte auf einer zum Grundschnitt Parallelen, welche durch o′ geht. Die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen andere Kathete ot_1, dessen Hypotenuse os_1 ist, gibt an, um wie viel die V-Projection des Kreispunktes T_1 über oder unter s′s″ liegt. Man sieht, daß im Raume zwei Kreise den gegebenen Bedingungen genügen,

wenn nicht angegeben ist, welcher der Kreispunkte T_1, T_2 der höherliegende ist. Zur Umgehung der Zweideutigkeit sei noch festgesetzt, daß T_1 höher liege. Ist t′ und sein diametraler Gegenpunkt t″ bestimmt, so stellen s′s″, t′t″ conjugirte Durchmesser für die V-Projection des Kreises vor.

Die H-Projection läßt sich unmittelbar aus den Axen construiren. Ist a_1 ein genau bestimmter Punkt derselben, so findet man die V-Projection a′ des zugehörigen Kreispunktes, wenn man $a_1 b \parallel s_2 s_1$, $bb' \perp GS$, $b'a' \parallel GS$, $a_1 a' \perp GS$ zeichnet. Aehnlich ergeben sich beliebig viele andere Punkte der gesuchten V-Projection.

Für die Zeichnung der V-Projection ist es vortheilhaft, in s′, s″, t′, t″ die Tangenten (parallel mit t′ t″ und mit s′ s″) zu ziehen.

242. Aufg. Für die H-Projection eines Kreises sind die Hälften oa, ob zweier zugeordneten Durchmesser gezeichnet, und außerdem noch die H-Distanz des Mittelpunkts gegeben; man soll die Spuren der Kreisebene finden.

Aufl. Zieht man ab, so ist △ aob die Projection eines Dreiecks AOB, in welchem W. O = 90°, W. A = W. B = 45° ist, und man hat nun die Aufgabe der Nr. 145 zu lösen.

243. Uebungsaufgabe. Drei Punkte sind durch ihre Projectionen gegeben; man zeichne die Projectionen des durch sie gehenden Kreises.

Projectionen der übrigen Linien zweiter Ordnung.

244. In einem Kreise, dessen Projection eine gegebene Ellipse ist, ziehe man zwei aufeinander senkrechte Durchmesser so, daß keiner derselben der Grundebene parallel ist. Durch einen beliebigen Punkt P des Kreises seien Parallelen zu diesen Durchmessern gezogen, welche auf ihnen vom Mittelpunkt aus die Stücke X, Y abschneiden. Der Halbmesser des Kreises heiße R. Dann ist

$$X^2 + Y^2 = R^2 \qquad \text{oder} \qquad \frac{X^2}{R^2} + \frac{Y^2}{R^2} = 1. \qquad (1)$$

Sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Projectionen der Stücke X, Y, und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ die Projectionen der Hälften jener Durchmesser, so hat man (Nr. 28)

$$\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{a}} = \frac{X}{R}, \qquad \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{b}} = \frac{Y}{R},$$

mithin auch $$\frac{\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{\mathfrak{y}^2}{\mathfrak{b}^2}=1. \qquad (2)$$

Dieß ist die auf conjugirte Durchmesser bezogene Gleichung der Ellipse, indem jetzt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Coordinaten des Ellipsenpunkts p vorstellen, nur daß beide hier nicht mehr mit den Axen (wie in Nr. 227) parallel sind, sondern mit conjugirten Durchmessern, also einen schiefen Winkel bilden. Umgekehrt schließt man: Ist eine Curve so beschaffen, daß für jeden ihrer Punkte die mit zwei gegebenen Geraden parallelen Coordinaten der Gleichung (2) genügen, in welcher $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gegebene Längen bedeuten, so ist die Curve eine Ellipse, jene Geraden sind die Richtungen conjugirter Durchmesser und 2 $\mathfrak{a}$, 2 $\mathfrak{b}$ die Größen derselben.

Da hiernach eine Ellipse durch zwei nach Lage und Größe gegebene conjugirte Durchmesser bestimmt ist, so sind zwei Ellipsen ähnlich, wenn ein Paar conjugirter Durchmesser in der einen mit einem solchen Paare in der andern nach Winkel und Längenverhältniß übereinstimmt.

Setzt man jetzt an die Stelle des obenerwähnten Kreises im Raum eine Ellipse mit den Axen 2 A, 2 B, so hat man für einen beliebigen Punkt P der Peripherie statt der Gleichung (1) die Gleichung

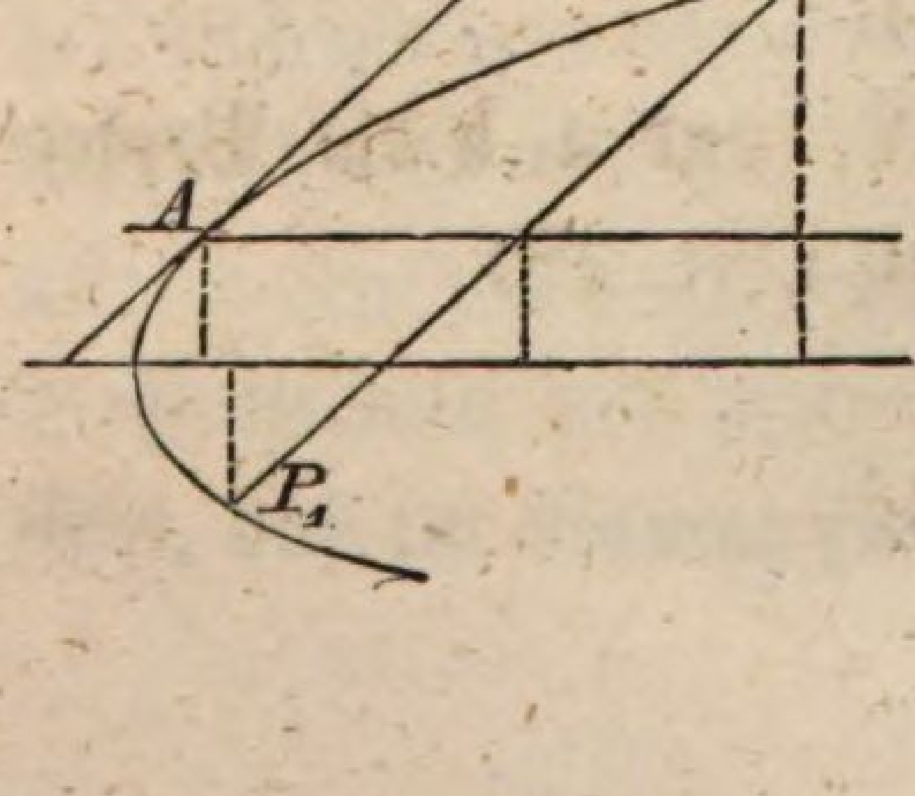
$$\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=1,$$

und wenn x, y, a, b die Projectionen von X, Y, A, B sind, so findet man durch dieselben Schlüsse wie oben, daß in der HE zwischen den auf die Richtungen von a und b bezogenen Coordinaten des Punkts p die Gleichung gilt

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Die Projection einer Ellipse ist also wieder eine Ellipse.

Jede in der Grundebene gegebene Ellipse läßt sich als die Projection einer andern auffassen, deren Axen zwei bestimmte conjugirte Durchmesser der ersten zu Projectionen haben. Die eine Axe kann man (der Richtung nach) in ihrer projicirenden Ebene willkürlich annehmen, die andere nach Nr. 87 hinzufügen.



245. Will man in einer Parabel die Ordinaten parallel mit einer andern Tangente als der des Scheitels nehmen, die Abscissen aber auf der durch den Berührungspunkt A dieser Tangente gehenden Durchmesser, so läßt sich aus der ursprünglichen Gleichung (Nr. 226)

die Gleichung zwischen den neuen Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ eines beliebigen Peripheriepunkts P ableiten. Sind

x, y die ursprünglichen Coordinaten des Punkts P,
x_1, y_1 " " " " " P_1,
a, b " " " " " A,

und bezeichnet q das von A bis an die Axe reichende Stück der Tangente, so hat man (wegen $y^2 = 2cx$ und $b^2 = 2ca$):

$$x : a = y^2 : b^2 = (\mathfrak{y} + q)^2 : q^2$$
$$x_1 : a = y_1^2 : b^2 = (\mathfrak{y} - q)^2 : q^2,$$

also
$$\frac{x + x_1}{a} = \frac{(\mathfrak{y} + q)^2 + (\mathfrak{y} - q)^2}{q^2} = \frac{2(\mathfrak{y}^2 + q^2)}{q^2}$$

oder (da $\frac{x + x_1}{2} = a + \mathfrak{x}$):

$$\frac{a + \mathfrak{x}}{a} = \frac{\mathfrak{y}^2 + q^2}{q^2}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\mathfrak{x}}{a} = \frac{\mathfrak{y}^2}{q^2},$$

oder, wenn der unveränderliche Werth $\frac{q^2}{a} = 2c$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{y}^2 = 2c\mathfrak{x}. \qquad (\mathfrak{A})$$

Ist eine Parabel im Raume gegeben und auf die Grundebene projicirt (wobei die Projectionen der im Raum zur Axe senkrechten Sehnen unter sich und mit der Projection der Scheiteltangente parallel bleiben), und bezeichnet man mit X, Y die im ursprünglichen Sinne genommenen Coordinaten eines Punkts P der Parabel, mit X_0, Y_0 die eines zweiten Parabelpunkts, mit x, y, x_0, y_0 die entsprechenden Projectionen der Coordinatenlinien, so ist

$$Y : y = Y_0 : y_0, \qquad X : x = X_0 : x_0.$$

Da aber
$$Y^2 : Y_0^2 = X : X_0,$$
so ist auch
$$y^2 : y_0^2 = x : x_0,$$

d. h. $\frac{y^2}{x}$ ist ein unveränderlicher Werth, und wenn man ihn durch 2k bezeichnet, zeigt die zwischen den schiefwinkeligen Coordinaten x, y des Projectionspunktes p bestehende Gleichung

$$y^2 = 2kx,$$

verglichen mit der Gleichung ($\mathfrak{A}$), daß die Projection der Parabel wieder eine Parabel ist.

Der Werth k ist bestimmt, sobald man die Werthe für die schiefwinkeligen Coordinaten eines Parabelpunkts und den Winkel derselben kennt. Sowie eine Parabel

gegeben ist durch die Lage des Scheitels, der Axe und eines Peripheriepunkts, so ist sie auch gegeben durch die Lagen eines Durchmessers, der ihm zugeordneten Tangente und eines Peripheriepunkts.

Da jeder in der Grundebene gezeichnete Winkel als Projection eines **rechten** Winkels angesehen werden kann (Nr. 87, †), so läßt sich jede gegebene Parabel als Projection einer andern betrachten, deren Axe einen bestimmten Durchmesser der ersten als Projection gibt. — Hieraus (und aus dem zweiten Satze der Note auf S. 188) folgt, daß **der auf der Parabel liegende Punkt eines Durchmessers gleichweit absteht von den Punkten, in denen der Durchmesser eine von ihm halbirte Sehne und die durch einen Endpunkt dieser Sehne gelegte Tangente trifft.**

246. Aus der in Fig. 80 ausgeführten und in Nr. 201 (Anm. zu Beisp. 3) erläuterten Construction der Hyperbel folgt unmittelbar, daß **die Projection einer Hyperbel wieder eine Hyperbel ist**, sowie umgekehrt, daß der projicirende Cylinder, welcher durch eine in der HE gegebenen Hyperbel geführt werden kann, von jeder nicht vertikalen Ebene nach einer Hyperbel geschnitten wird.

Hieraus erschließt man, daß die auf conjugirte Durchmesser bezogene Gleichung einer Hyperbel die Form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hat, indem man die Hyperbel als Projection einer andern ansieht, deren Axen die conjugirten Durchmesser der ersten zu Projectionen haben (was immer möglich ist). Die Größe $2b$ ist das Stück, welches auf der dem reellen Durchmesser zugeordneten Tangente durch die Asymptoten ausgeschnitten wird.

Eine Hyperbel ist bestimmt durch den Winkel zweier conjugirten Durchmesser und die ihnen entsprechenden Werthe a, b.

247. Die Bemerkung zu Anfang der vorigen Nr., sowie die Schlüsse durch welche man in Nr. 244 und Nr. 245 zu der Gleichung für die Projection einer im Raume gegebenen Ellipse und Parabel gelangte, behalten offenbar ihre Geltung, wenn man statt orthogonaler Projectionen **schiefe Parallelprojectionen** (Nr. 2) im Auge hat. (Denn die Sätze in Nr. 25 und Nr. 28 sind, wie leicht zu sehen, auch für solche Projectionen wahr.)

Folglich ist überhaupt jede Parallelprojection einer Linie zweiter Ordnung wieder eine Curve gleicher Art.

In der schiefen Parallelprojection des **Kreises** ergeben sich conjugirte Durchmesser aus rechtwinkelig verbundenen Kreisdurchmessern. Will man eine in der Grundebene gegebene Ellipse als schiefe Parallelprojection eines Kreises nehmen,

dessen Durchmesser mit einem bestimmten Ellipsendurchmesser $A_1 A_2$ zusammenfällt, so läßt sich immer der conjugirte Durchmesser $b_1 b_2$ der Ellipse als die Projection eines zweiten, zum ersten senkrechten Kreisdurchmessers ansehen. Das Verhältniß einer auf $A_1 A_2$ senkrechten Kreisordinate zu ihrer Projection ist unveränderlich. Denkt man sich den Kreis umgeklappt, so kommt man auf folgendes Verfahren zur Construction einer Ellipse aus conjugirten Durchmessern. Nachdem über $A_1 A_2$ ein Halbkreis beschrieben und der Halbmesser $O B_0 \perp A_1 A_2$ gezeichnet ist, nimmt man auf $A_1 A_2$ den Punkt m beliebig, zieht (bis an den Halbkreis) $mC_0 \perp A_1 A_2$, $mc \parallel Ob_1$, $C_0 c \parallel B_0 b_1$; dann ist c ein Punkt der Ellipse. (Diese Construktion folgt auch schon aus der Gleichung [2] der Nr. 244, wenn man sie, nach dem Vorgang in Nr. 227, in die Form einer Proportion bringt.)

248. Uebungsaufgaben.

1) In einer mit der HE zusammenfallenden Ebene ist eine Curve gegeben. Man verlangt die Projectionen derselben, nachdem die Ebene um eine in der HE gezogene Gerade so weit gedreht worden ist, daß sie eine gegebene H-Neigung hat.

2) Die Ebene einer Curve ist (durch ihre Spuren) gegeben und die eine Projection der Curve. Man soll die andere Projection und die wahre Curve zeichnen.

3) Gegeben die H-Projection einer ebenen Curve und drei Punkte ihrer V-Projection; zu suchen die vollständige V-Projection (ohne daß auf die vorige Aufgabe zurückgegangen wird).

4) Zu untersuchen, ob eine durch ihre Projectionen gegebene Curve eben oder gewunden sei.

5) Für eine Parabel kennt man die Projectionen der Axe, des Scheitels und eines Peripheriepunktes; man soll für jede Projection der Curve eine genügende Anzahl Punkte sammt ihren Tangenten bestimmen, ohne zuvor die wahre Parabel in Umklappung zu construiren.

B. Ueber gewundene Curven und ihre Projectionen.

249. Denkt man sich eine gewundene Curve in geradlinige und einander gleiche Elemente zerlegt und läßt die in einerlei Sinn verlängerten Elemente als Tangenten gelten, so paßt das, was unter ähnlicher Voraussetzung in Nr. 202 über Krümmung und Contingenzwinkel in Bezug auf ebene Curven gesagt ist, auch für gewundene Curven. Die Osculationsebene für einen Punkt A einer gewundenen Curve ist dann durch die beiden in A zusammenstoßenden Elemente $A_0 A$, AA' bestimmt. Das eine (AA') dieser Elemente bestimmt mit einem anstoßenden dritten

Element A′A″ eine nächstbenachbarte Osculationsebene (für A′), welche mit der vorigen einen unendlich kleinen Winkel bildet. Man sagt, die Curve habe sich beim Uebergang von A zu A′ um diesen Winkel gewunden, und nennt ihn Windungs- oder Torsionswinkel.* Zwischen den Torsionen einer Curve an verschiedenen Stellen können ähnliche Verschiedenheiten und Verhältnisse stattfinden wie zwischen den Krümmungen.

Die Betrachtungen, welche in Nr. 203 auf den Krümmungskreis für den Punkt A einer Curve MN geführt haben, gelten auch noch für eine gewundene Curve, nur daß jetzt die Ebene XAY (in welcher immer die Linien DC und EC zu denken sind) eine veränderliche ist und die Mittelpunkte aller die Curven in A berührenden Kreise in der Normal-Ebene des Punktes A liegen. Die Grenzlage xAy jener Ebene XAY ist die Osculationsebene für A. Der Krümmungsmittelpunkt liegt also in der Hauptnormalen (Nr. 194). — Denkt man die gewundene Curve MN auf die Osculationsebene des Punktes A projicirt, so gehören die beiden in A zusammenhängenden Elemente der Curve zugleich ihrer Projection an. Daraus folgt, daß diese Projection (auch wenn sie eine centrale oder eine schiefe Parallel-Projection sein sollte) und die wahre Curve im Punkte A einerlei Krümmung haben, und daß sich also die Aufgabe: „den Krümmungshalbmesser für einen Punkt einer gewundenen Curve zu finden," zurückführen läßt auf die Aufgabe: den „Krümmungshalbmesser für einen Punkt einer ebenen Curve zu finden."

Der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt A einer gewundenen Curve kann nicht als Schnitt der beiden zu A und den nächstbenachbarten Punkt A′ gehörigen Hauptnormalen betrachtet werden, denn diese Normalen (welche aus den strengen Tangenten in A und A′ herzuleiten und nicht mit den Grenzlagen von DC und EC zu verwechseln sind) schneiden sich überhaupt nicht; die erste liegt in einer Ebene mit den zwei Elementen A_0A und AA′, die zweite in der Ebene der Elemente AA′ und A′A″; würden sich also beide Normalen in einem Punkte O begegnen, so wären die Ebenen A_0AA' und AA′A″ identisch mit der Ebene AOA′ und es gäbe von A nach A′ keine Torsion. Der Torsionswinkel ist aber für eine gewundene Curve eben so wesentlich, wie der Contingenzwinkel für eine Curve überhaupt.

† Liegen alle Punkte einer gewundenen Curve gleichweit von einem gewissen Punkte entfernt (also auf der Oberfläche einer Kugel), so heißt die Curve sphärisch.

---

* Man hatte früher die Windung als „zweite Krümmung" bezeichnet; daher der ältere Name „doppeltgekrümmte Curven".

So wird z. B. eine sphärische Epicycloide durch einen auf der Fläche eines geraden Kegels angenommenen Punkt beschrieben, wenn dieser Kegel sich auf einem andern geraden Kegel wälzt, mit welchem er die Spitze gemein hat.

250. Die Projection einer Tangente an einer gewundenen Curve ist (wenn nicht ein Punkt) wieder Tangente an der Projection der Curve, was gerade so zu beweisen ist, wie es in Nr. 234 für ebene Curven geschah.

Die Projection einer gewundenen Curve kann niemals eine gerade Linie werden; denn dieß würde voraussetzen, daß sämmtliche Punkte der Curve in der durch diese Gerade gehenden projicirenden Ebene lägen. Wohl aber können die Projectionen mehrerer Bögen oder Zweige der Curve ineinanderfallen.* In solchen Fällen wird ein mehrfacher Punkt der gewundenen Curve sich in der Projection nicht bemerkbar machen, während in allen andern Fällen die Projection eines nfachen Punktes wieder ein nfacher Punkt für die Curvenprojection ist. Umgekehrt aber darf man aus einem mehrfachen Punkte der Projection nicht auf einen mehrfachen Punkt der wahren Curve schließen (so wenig wie aus dem Schneiden zweier geradlinigen Projectionen auf ein Schneiden der Geraden im Raume), wenn man nicht noch eine zweite Projection der Curve vergleichen kann; nur dann wird sich die wahre Curve wirklich durchschneiden, wenn jede ihrer beiden Projectionen sich durchschneidet und die Verbindungslinie der Schnittpunkte auf dem Grundschnitt senkrecht steht (oder auch wenn die eine Projection sich durchschneidet und von der andern Projection jeder Punkt doppelt gilt).

Schneidet eine gewundene Curve sich selbst, so hat sie im Doppelpunkt nicht blos zwei verschiedene Tangenten, sondern auch zwei verschiedene Osculationsebenen (je eine für jeden der sich kreuzenden Bögen).

Wenn für irgend einen Punkt einer gewundenen Curve die Osculationsebene senkrecht auf der Grundebene steht, so kann die Projection dieses Punktes einen Wendepunkt oder auch einen Rückkehrpunkt der Curvenprojection geben. Denn die Projectionen der beiden in der Osculationsebene liegenden Curvenelemente fallen hier in die Spur dieser Ebene; also erscheint entweder die eine Projection als Verlänge-

---

* Denkt man sich z. B. eine Ebene, in welcher eine Ellipse gezeichnet ist, um einen geraden Cylinder geschlagen, dessen Basis in der Grundebene liegt, so projicirt sich die gewundene Curve, in welche sich die Ellipse umgeändert hat, als ein Bogen der Basis; jeder Punkt dieses Bogens, mit Ausnahme der beiden Endpunkte, stellt aber die gemeinschaftliche Projection zweier Curvenpunkte vor.

rung der andern, oder beide decken sich. Wenn daher eine Projection einer gewundenen Curve einen solchen besondern Punkt hat, so berechtigt dieß noch nicht zu der Annahme, daß auch die wahre Curve einen besondern Punkt habe.

Allerdings aber kann es auch auf einer gewundenen Curve einen Rückkehrpunkt geben (indem zwei Bögen in einem Punkte, über welchen sie nicht hinausgehen, sich berühren) oder einen Wendepunkt. Der Punkt W einer gewundenen Curve ist ein Wendepunkt, wenn die durch ihn gelegte Normalebene von den Normalebenen zweier rechts und links von W und ihm sehr nahe genommenen Curvenpunkte V_1, V_2 nach zwei Geraden geschnitten wird, welche einer durch W gehenden und sie schneidenden Geraden in zwei auf entgegengesetzten Seiten von W liegenden (und sehr entfernten) Punkten begegnen; bei fortgesetzter Annäherung der Punkte V_1, V_2 an W entfernen sich die Schnitte der Normal-Ebenen nach entgegengesetzten Richtungen von W immer mehr und verschwinden im Unendlichen. Die Tangente im Wendepunkte, sowie jede durch sie gehende Ebene, steht mit der Curve in Berührung zweiter Ordnung. Eine Projection des Wendepunkts ist Wendepunkt für die Projection der Curve. Zeigen die beiden Projectionen einer Curve Wendepunkte, welche in einer zum Grundschnitt Senkrechten liegen, so ist damit ein Wendepunkt der wahren Curve angezeigt.

Ist eine gewundene Curve so gestaltet, daß sie eine Symmetral-Ebene zuläßt,* so heißt ein in diese Ebene fallender Curvenpunkt (falls er kein Doppelpunkt ist) ein Scheitel. Die Symmetralebene ist Osculationsebene oder Normalebene, je nachdem der Scheitel ein Rückkehrpunkt ist oder nicht. Bestimmt man im letztern Falle die Osculationsebene des Scheitels, so ergibt sich, daß sie mit der Curve in Berührung dritter Ordnung steht; und wenn eine Grundebene senkrecht zu dieser Osculations-Ebene angenommen wird, steht die Spur der Osculationsebene in Berührung dritter Ordnung mit der Projection der Curve.

251. Die H-Projection und die V-Projection einer in sich zurückkehrenden gewundenen Curve liegen zwischen zwei zum Grundschnitt senkrechten Geraden und werden von diesen berührt, wenn nicht auf einer Grundebene die Projectionen mehrer Curvenbögen sich decken. Zwischen diesen beiden Geraden kann es noch andere zum Grundschnitt senkrechte geben, welche entweder beide Projectionen berühren oder eine berühren

---

* Vgl. die Note zu Nr. 105.

und die andere schneiden; im letzteren Falle haben dann immer einzelne Bogenstücke der geschnittenen Projection mehrfältige Geltung.

Erstreckt sich die gewundene Curve in's Unendliche, so kann in besondern Fällen jenes Paar absolut begrenzender Geraden ebenfalls vorhanden sein (wie z. B. in Fig. 92); im Allgemeinen gibt es entweder keine oder nur eine.

Ob eine Curve (gewunden oder eben) Spuren habe, und wohin diese fallen, läßt sich leicht bestimmen, wenn die beiden Projectionen der Curve entweder vollständig gezeichnet vorliegen oder aus der Kenntniß ihres Bildungsgesetzes vervollständigt werden können.

252. Aufg. Die Osculationsebene für den Punkt A einer gewundenen Curve zu bestimmen, deren Projectionen gegeben sind.

Aufl. Man zeichne die Projectionen der Tangente für A (Nr. 250) und suche in einer der Grundebenen ihre Spur T, sowie die Spur S einer Geraden, welche A mit einem zweiten Punkt B der Curve verbindet. Denkt man sich B auf der Curve durch A hindurch fortschreitend, so daß sich die Berührungsebene BAT um AT dreht und einmal zur Osculationsebene wird, so beschreibt S in der Grundebene eine durch T gehende Curve C, für welche die bewegliche Spur TS der Berührungs-Ebene Tangente wird, sobald B in A fällt. Wählt man also zu beiden Seiten von A mehrere Lagen des Punkts B, so führen die entsprechenden Lagen der S auf die Curve C; eine Tangente durch T an C ist die Spur der Osculationsebene; die Ebene selbst ist durch diese Spur und den Punkt A bestimmt. *

Schraubenlinien.

253. Als Beispiel für das Projiciren gewundener Curven mag eine Linie dienen, deren Entstehungsgesetz sehr einfach ist, und welche auch später öfter wieder zur Sprache kommen wird.

Man denke sich die projicirende Ebene einer gegen die Grundebene geneigten Geraden S zu einem projicirenden Cylinder gebogen, so daß die geradlinige Projection G der S zu irgend einer gesetzmäßigen ebenen Curve wird; dann verwandelt sich die Gerade S in eine gewundene

---

* Eine andere Auflösung wird bei späterer Gelegenheit folgen.

Curve, welche jene aus G entstandene Curve zur Projection hat und eine Schraubenlinie im weitern Sinne heißt. Eine Schraubenlinie im engern Sinne ist diejenige, welche entsteht, wenn die Gerade G zu einem Kreise, also die Ebene selbst zur Mantelfläche eines gewöhnlichen geraden Cylinders gekrümmt oder um einen solchen Cylinder gewickelt wird. Von dieser soll, ihrer besondern Wichtigkeit wegen, hier vorzugsweise die Rede sein, und der Name Schraubenlinie ist, wenn er ohne weitern Beisatz steht, künftig immer im engern Sinne zu nehmen. Der Kreis G (ihre Projection) heißt der Grundkreis, und jener gerade (projicirende) Cylinder der Schraubencylinder.

Man kann vor dem Biegen der Ebene eine Anzahl projicirender Linien in ihr durch verschiedene Punkte der Geraden S ziehen. Diese Linien bleiben auf der G fortwährend senkrecht, wenn letztere sich auch in einen Kreis verwandelt, und sie geben also projicirende Linien für die Punkte der Schraubenlinie ab, welche aus der S entsteht. Windet man die um den Schraubencylinder gebogene Ebene von diesem zum Theil wieder ab und hält das abgelöste Stück gespannt, so wird das freigewordene Ende der S die Verlängerung des letzten Elements der Schraubenlinie vorstellen, also eine Tangente derselben. Da nun die Gerade S in der Ebene mit den projicirenden Linien ihrer sämmtlichen Punkte immer denselben Winkel bildet, so ist auch der Winkel immer der nämliche, welchen irgend eine Tangente der Schraubenlinie S mit dem Projectionslothe ihres Berührungspunktes einschließt, d. h. die Schraubenlinie schneidet alle auf dem Cylinder möglichen Geraden unter einem und demselben Winkel.

Irgend eine auf der Cylinderfläche gezogene Gerade (Mantellinie) wird von der Schraubenlinie unendlich oft geschnitten. Das Stück der letztern, welches zwischen zwei aufeinanderfolgenden solchen Schnittpunkten enthalten ist, heißt ein Umgang oder Schraubengang, und das Stück der Mantellinie zwischen den genannten Punkten die Höhe des Schraubengangs oder kurz die Ganghöhe. Diese hat überall dieselbe Größe, wo sie auch abgenommen werden mag, und ebenso haben alle Umgänge einerlei Länge. Denn betrachtet man denjenigen Umgang, der seinen Anfangspunkt im Grundkreise G hat, und breitet das Stück der Cylinderfläche, welches durch diesen Grundkreis, den Umgang und die Ganghöhe begrenzt ist, in eine Ebene aus, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck, welches als eine Kathete die Ganghöhe, als andere

Kathete die rectificirte Kreisperipherie, und dieser gegenüber den Winkel zwischen der Schraubenlinie und der Mantellinie des Cylinders hat. Die Größe dieses Winkels ist überall dieselbe, und eben so ist der Grundkreis immer derselbe, durch welchen Punkt der Schraubenlinie man ihn auch gezogen denken mag; daher ist jenes rechtwinkelige Dreieck ebenfalls immer dasselbe, oder seine Hypotenuse (der rectificirte Umgang) und die als Kathete erscheinende Ganghöhe sind von constanter Größe.

Bezeichnet r den Halbmesser des Grundkreises, h die Ganghöhe, φ den Winkel zwischen der Schraubenlinie und der Mantellinie des Cylinders, so läßt sich mittels des ebenerwähnten Dreiecks aus je zweien dieser Größen r, h, φ die dritte finden, und die Schraubenlinie selbst ist durch zwei solche Größen völlig bestimmt.

In der Ebene wachsen die von einzelnen Punkten der S auf die G gefällten Lothe proportional mit den Stücken, welche sie auf G (vom Schnittpunkte der G und S an gerechnet) abschneiden. Da diese Stücke ihre Länge durch die Biegung der G nicht ändern, so hat auch (wenn man die Ebene des Grundkreises G als HE nimmt) die H-Distanz eines Punkts der Schraubenlinie ein constantes Verhältniß zu dem Bogen des Grundkreises, welcher zwischen der Projection des Punktes und der H-Spur der Schraubenlinie enthalten ist (wobei zu beachten, daß dieser Bogen $> 360^0$ wird, wenn die H-Distanz die Ganghöhe übersteigt); es verhält sich nämlich immer die H-Distanz zum Bogen wie die Ganghöhe zur Peripherie des Grundkreises. Hierin liegt ein Mittel, die V-Projection der Schraubenlinie zu zeichnen. *

Ist der Halbmesser r des Grundkreises und die Ganghöhe h gegeben, so beschreibe man in der HE den Grundkreis und theile ihn in n gleiche Theile, wobei man denjenigen Punkt, welcher die H-Spur der Schraubenlinie abgeben soll, zum Ausgangspunkt der Theilung nimmt. In eben so viele gleiche Theile zerlege man die Ganghöhe h. Wird nun A Fig. 92.
als H-Spur der Schraubenlinie gewählt, so ist die H-Distanz dieses

* Zugleich sieht man, daß man die Schraubenlinie ohne Hülfe des Cylinders entstehen lassen kann. Denkt man sich nämlich eine begrenzte Gerade senkrecht auf einer unbegrenzten Geraden, und verleiht jener eine doppelte Bewegung, vermöge welcher sie sich um ihren Fußpunkt, wie der Radius eines Kreises um seinen Mittelpunkt, dreht, während zugleich dieser Fußpunkt selbst auf der unbegrenzten Geraden proportional mit jener Drehung fortrückt, so beschreibt der freie Endpunkt der bewegten Geraden eine Schraubenlinie. Die feste Gerade ist die Axe derselben.

Punktes = 0; die H-Distanz des Punktes B, der sich in den nächsten Theilpunkt b projicirt, ist $\frac{1}{n}$h; die H-Distanz des nächsten Punktes C ist $\frac{2}{n}$ h, u. s. f. Dieß wird hinreichen zum Verständniß der in Fig. 92 ausgeführten Construction, wobei a′z′ = h.

Ist einmal der erste Umgang projicirt, so kann man die Projectionen der nächsten Umgänge dadurch erhalten, daß man auf der Projection jeder Mantellinie von der Projection des entsprechenden Punktes aus die Ganghöhe aufträgt. So findet man z. B. den Punkt c″, wenn man c′c″ = a′z′ macht.

Denkt man sich die Theilung der Ganghöhe auf der Cylinderaxe ausgeführt, so kann man in der Figur die zum Grundschnitt Parallelen, welche von den Punkten a′, b′, c′, ... bis an die Gerade o′o″ reichen, als V-Projectionen von Linien ansehen, welche die Punkte A, B, C, ... der Schraubenlinie mit den entsprechenden Theilpunkten der Axe verbinden. Diese Linien sind parallel den Kreisradien OA, Ob, Oc, ... (als ihren H-Projectionen) und stellen Lagen der in vorstehender Note erwähnten beweglichen Geraden vor.

254. Aufg. An die in Fig. 92 dargestellte Schraubenlinie eine Tangente zu ziehen, wenn der Berührungspunkt gegeben ist.

Fig. 92. **Aufl.** Ist (c, c′) der Berührungspunkt, so denke man sich das krummflächige Dreieck CcA in eine Ebene ausgebreitet, indem man seine Fläche vom Cylinder bis zur Mantellinie Cc ablöst und anspannt. Die so erhaltene Ebene muß den Cylinder nach der Linie Cc berühren; die Gerade cA_1, in welche der Bogen cA übergeht, ist eine Tangente des Grundkreises im Punkte c; die Hypotenuse CA_1 des ebenen Dreiecks CcA_1 (d. i. der rectificirte Bogen CA der Schraubenlinie) stellt die Tangente der Schraubenlinie im Punkte C vor und A_1 die H-Spur dieser Tangente. Daraus ergibt sich zur Construction der Tangentenprojectionen folgende Regel. Man zieht durch die H-Projection c des Berührungspunkts eine Tangente cA_1 an den Grundkreis, so ist diese die H-Projection für die Tangente der Schraubenlinie; macht cA_1 = arc. cA (Nr. 209), A_1 $a^1 \perp$ GS, so ist a^1c′ die V-Projection.

Zusätze. — 1. Sowie CA_1 die Länge des Schraubenbogens CA vorstellt, so zeigt überhaupt jede Tangente der Schraubenlinie, von der HE bis zum Berührungspunkte gerechnet, die rectificirte Länge des zwischen denselben Grenzen enthaltenen Stückes der Schraubenlinie.

2. Der Winkel CA_1c ist das Complement des constanten Winkels A_1Cc, also ebenfalls constant; d. h. alle Tangenten der Schraubenlinie haben einerlei H-Neigung.

3. Um die H-Spur der Tangente im Punkte D zu finden, hätte man den Bogen dA vom Grundkreise abwickeln und als Tangente des Punktes d anspannen müssen; für die Tangente in E den Bogen eA, u. s. f. Daraus folgt, daß die H-Spuren sämmtlicher Tangenten der Schraubenlinie in einer Evolvente des Grundkreises liegen.

4. Die Tangenten für alle jene Punkte der Schraubenlinie, welche auf einerlei Mantellinie des Cylinders liegen, sind parallel; denn sie schneiden diese Mantellinie unter gleichen Winkeln und liegen zugleich in einerlei Ebene, weil sie eine gemeinschaftliche H-Projection haben. Daher sind auch ihre V-Projectionen parallel.

Hat man demnach die Tangente für einen Punkt zu finden, dessen H-Distanz $> h$ ist, so kann man das Rectificiren eines die Peripherie überschreitenden Kreisbogens umgehen, indem man die Tangente für einen niedriger liegenden Punkt derselben Mantellinie sucht und mit dieser Tangente eine Parallele durch den gegebenen Punkt zieht. Auf diesem Wege ist in Fig. 92 die V-Projection $a^{II}c''$ der Tangente im Punkte (c, c'') gefunden. Oder man kann sich auch die HE um die Ganghöhe emporgerückt denken, so daß $a^{II}z'$ den Grundschnitt vertritt, und in diesem Falle braucht man die Linie $a^{I}c'$ gar nicht zu ziehen.

255. Aufg. Eine Schraubenlinie zu projiciren, wenn die Axe ihres Cylinders* in schiefer Lage gegen die Grundebenen gegeben ist.

Zur Bestimmung der Schraubenlinie selbst soll die Ganghöhe h und der Radius r des Cylinderkreises gegeben sein; die H-Spur der Schraubenlinie sei in der Spur der Ebene E angenommen, welche durch die Spur der Axe senkrecht zu dieser gelegt ist.

Aufl. I. Durch die H-Spur O der Schraubenaxe ziehe man die H-Spur P_oP_m der Ebene E (Nr. 27), mache $OP_o = OP_m = r$ (wobei P_o als Spur der Schraubenlinie gilt), beschreibe über P_oP_m einen Halbkreis und theile ihn von P_o aus in m gleiche Theile (so daß $P_o\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \ldots.$). Der Halbkreis ist die Umklappung der halben Cylinderbasis; aus den umgeklappten Theilpunkten erhält man unmittelbar die H-Projectionen $l_1, l_2, \ldots$ der durch die wirklichen Theilpunkte $P_1, P_2 \ldots.$ gelegten Mantellinien des Cylinders (und zwar auch für die zweite Hälfte der Basis, da je zwei Mantellinien eine gemeinsame H-Projection haben). Die H-Neigung der Schraubenaxe (als

---

* Diese Axe mag künftig der Kürze wegen die Schraubenaxe heißen.

Complement für die H-Neigung der E) führt auf die kleine Halbaxe der Ellipse, welche sich als H-Projection der Cylinderbasis ergibt, und man findet nun leicht die H-Projectionen $p_1, p_2, \ldots$ der in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ umgeklappten Punkte $P_1, P_2, \ldots$, sowie (Nr. 241) die V-Projectionen $p'_1, p'_2, \ldots$ dieser Punkte. — Auf der Schraubenaxe denke man sich (oberhalb der HE) einen Punkt Q so, daß $OQ = h$, bestimme die H-Projection q dieses Punktes (Nr. 70, 2) und theile den Abstand Oq in 2m gleiche Theile. Eine durch den ersten Theilpunkt (von O aus gezählt) gelegte Parallele mit Op_1 schneidet die l_1 in einem Punkte, welcher der H-Projection der Schraubenlinie angehört; einen andern solchen Punkt findet man als Schnitt der l_2 und einer durch den zweiten Theilpunkt der Oq gehenden Parallelen zu Op_2, u. s. f. (Denkt man sich die ganze Ellipse $P_0\, p_1\, p_2 \ldots P_m\, p_{m+1} \ldots P_0$ gezeichnet, so geht durch den [m + 1]ten Theilpunkt der Oq eine Parallele mit Op_{m+1}, welche die l_{m+1} zu schneiden hat; da aber Op_{m+1} die Verlängerung von $p_1\, O$ ist und die l_{m+1} mit der l_{m-1} zusammenfällt, so reicht man mit den Punkten der zuerst bestimmten Ellipsenhälfte völlig aus.) — Punkte für die Vertical-Projection der Schraubenlinie erhält man, nachdem aus $p'_1, p'_2, \ldots$ die V-Projectionen $l'_1, l'_2, \ldots$ der entsprechenden Mantellinien bestimmt worden sind, entweder einfach nach Nr. 44, oder auch unabhängig von den H-Projectionen (ähnlich wie vorhin).

Man sieht, daß die Lösung auf der Schlußbemerkung zu Nr. 253 ruht.

Aufl. II. Durch Veränderung des Grundsystems kann man die Lösung auf den besondern Fall der Fig. 92 zurückführen.

Ist die gegebene Axe parallel zur VE, so legt man durch ihre H-Spur O eine neue HE senkrecht zur V-Projection der Axe, führt in der alten VE die Construction der Nr. 253 aus, bestimmt dann in der alten HE die Projectionen für die Theilpunkte der Cylinderbasis (Nr. 125) sowie die Projectionen der betreffenden Mantellinien, und verfährt schließlich nach Nr. 44.

Ist aber die Axe mit keiner der Grundebenen parallel, so hätte man zuerst eine VE parallel zur h-projicirenden Ebene der Axe anzunehmen, die vorigen Constructionen auszuführen und zuletzt eine Projections-Uebertragung aus der Hülfs-VE in die ursprüngliche VE vorzunehmen.

256. Die Schraubenlinie ist eine Curve von constanter Krümmung, d. h. der Krümmungshalbmesser (vgl. Nr. 249) ist für jeden

ihrer Punkte derselbe. Um dieß zu beweisen, substituire man für den Kreis, welcher dem Cylinder zur Basis dient, ein reguläres Polygon P, so daß statt des Cylinders ein regelmäßiges Prisma erscheint und statt der Schraubenlinie eine gebrochene Linie S, deren sämmtliche Bruchstücke gleichgroß sind. Je zwei aufeinanderfolgende Bruchstücke der S bestimmen mit der Prismenkante, auf welcher sie zusammenstoßen, ein Dreikant, und alle diese Dreikante müssen unter sich congruent sein; denn in jedem derselben ist eine Seite $= \varphi$ (s. Nr. 253), die zweite $= 180^\circ - \varphi$, und der Winkel zwischen diesen beiden Seiten ist einer von den gleichen Winkeln des Polygons P. Es folgt hieraus, daß in jedem solchen Dreikante auch die dritte Seite immer von derselben Größe ist, nämlich die Neigung zwischen zwei Bruchstücken der S. Das Supplement dieser Neigung wird nun der Contingenzwinkel der Schraubenlinie, sobald man im Polygon P die Seitenzahl unendlich groß annimmt; und da demnach in der Schraubenlinie sich der Contingenzwinkel von Punkt zu Punkt nicht ändert, so kann sich auch die Krümmung nicht ändern.

Hierauf beruht die merkwürdige Eigenschaft der Schraubenlinie, daß sie sich in sich selbst verschieben läßt; eine Eigenschaft, welche sie nur noch mit dem Kreise und der Geraden theilt.

† Betrachtet man in Fig. 92 statt des Kreises das einbeschriebene Polygon Abc.... (indem man an die Stelle der Bögen Ab, bc,... ihre Sehnen setzt), statt des Cylinders und der Schraubenlinie das entsprechende Prisma und die gebrochene Linie S, so bestimmen drei aufeinanderfolgende Punkte der S, z. B. E, F, G, ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Höhenlinie parallel zur HE liegen muß, da sowohl für die Spitze F als für den Halbirungspunkt der Basis EG die H-Distanz gleich dem arithmetischen Mittel aus den Distanzen der Punkte E und G ist. Die H-Projection der Höhenlinie ist das Mittenloth der Sehne eg, geht also verlängert durch O, woraus folgt, daß die Verlängerung der Höhenlinie selbst die Axe des regulären Prismas schneidet. Der hiemit gefundene Satz kann so ausgesprochen werden: Eine aus F auf die Axe gefällte Senkrechte N liegt mit FE und FG in einer Ebene. Diese Ebene aber wird zur Osculationsebene in F, wenn man (durch fortgesetzte Verkleinerung der gleichen Kreissehnen fe und fg) auf die wirkliche Schraubenlinie übergeht; und da die (strenge) Tangente in F einen rechten Winkel mit N bildet (Nr. 87, Zus. 2), so ist N die Hauptnormale für F. Somit läßt sich für jeden Punkt einer Schraubenlinie die Haupt-

normale direct bestimmen; aus ihr (und der Tangente) folgt dann die Lage der Osculationsebene.

Da für den Punkt D die Hauptnormale auf der VE senkrecht steht, so ist auch die Osculationsebene für D senkrecht auf der VE; deshalb erscheint d′ als ein Wendepunkt für die V-Projection der Schraubenlinie.

Würde man die Tangente in D construiren und senkrecht zu dieser eine neue HE annehmen, so hätte die neue H-Projection der Schraubenlinie in der Projection von D einen Rückkehrpunkt.

†† Die Osculationsebene im Punkte D schneidet den Schraubencylinder nach einer Curve U, welche (als schiefe Parallelprojection des Grundkreises) eine Ellipse sein muß (Nr. 247); die Axen derselben liegen in den Ebenen AOG und DOk; die große Axe projicirt sich auf der VE in wahrer Länge 2α (= der Strecke, welche die V-Projection der zu D gehörigen Schraubentangente zwischen a′z′ und g′g″ zeigt), die kleine Axe ist dem Durchmesser 2r des Grundkreises gleich und hat zur V-Projection den Punkt d′. Die Ellipse U ist aber zugleich schiefe Parallelprojection der Schraubenlinie; folglich findet man (Nr. 249) den Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie, wenn man den Werth $\frac{\alpha^2}{r}$ construirt (Nr. 229). Die Lage des Krümmungsmittelpunkts für jeden Punkt der Schraubenlinie läßt sich dann leicht angeben.

257. Aufg. Die Schnittpunkte einer gegebenen Curve A mit einer gegebenen Ebene E zu finden.

Aufl. Man lasse die gegebene H-Projection der Curve A zugleich als H-Projection einer andern Curve B gelten, welche in der gegebenen Ebene liegt, und suche die V-Projection der B (Nr. 248, 2). Die Punkte, in denen die V-Projectionen der A und B sich schneiden, sind die V-Projectionen der gesuchten Punkte; die zugehörigen H-Projectionen ergeben sich mittels Senkrechter zum Grundschnitt.

Zweites Kapitel.

Erzeugung und graphische Darstellung krummer Flächen.

258. Was in Nr. 190 für krumme Linien gesagt wurde, wiederholt sich in ähnlicher Weise auch bei krummen Flächen. Soll nämlich eine krumme Fläche einer mathematischen Untersuchung unterworfen werden können, so muß ihr ein bestimmtes Entstehungsgesetz zu Grunde liegen, in Folge dessen ihre Gestalt selbst Gesetzmäßigkeit und Stetigkeit zeigt. Man kann sich jede solche krumme Fläche durch Bewegung einer Linie oder einer andern Fläche erzeugt denken, und sie ist als gegeben zu betrachten, wenn man die erzeugende Linie oder Fläche kennt und das Gesetz, nach welchem diese ihre Lage (und vielleicht auch ihre Dimensionen) ändert; dieses Gesetz selbst kann in vielen Fällen durch Hülfe einer gegebenen Linie oder Fläche ausgesprochen werden müssen.

So entsteht z. B. eine Cylinderfläche im allgemeinsten Sinne des Worts, wenn eine unbegrenzte Gerade sich parallel mit einer bestimmten Richtung stetig fortbewegt, ohne in einer Ebene zu bleiben. Um aber der Parallelbewegung selbst einen bestimmten Gang vorzuschreiben, kann man festsetzen, daß die bewegliche Gerade eine gegebene Curve beständig schneidet. — Bewegt sich eine unbegrenzte Gerade um einen festen Punkt in ihr, so beschreibt sie entweder eine Ebene oder eine Kegelfläche im weitesten Sinn. Ein Gesetz für die Bewegung ist ausgesprochen, wenn die Gerade im ersten Falle eine feste Gerade, im zweiten eine gegebene krumme Linie schneiden muß.

259. Eine Gerade berührt eine krumme Fläche, wenn sie eine auf der Fläche gezogene Curve berührt.

Ist eine Fläche von solcher Natur, daß sich auf ihr eine gerade Linie ziehen läßt, so muß diese Gerade unter die Tangenten der Fläche gezählt werden; denn es ist klar, daß auf der Fläche beliebig viele Curven gezeichnet werden können, welche jene Gerade berühren.

Die Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt A einer Fläche eine

Tangente an sie zu legen, ist eine unbestimmte, da durch jenen Punkt unendlich viele Curven auf der Fläche gezogen werden können.

Ist aber U irgend eine solche Curve (welche man sich, der Allgemeinheit wegen, gewunden denken mag), AT ihre Tangente, und wird durch AT beliebig eine Ebene gelegt, welche die Fläche nach einer Curve V schneidet, so ist AT zugleich Tangente für V; denn das Element, welches die Curve U mit der AT gemein hat, muß, als auf der Fläche liegend, auch der Curve V angehören. Es folgt hieraus, daß man alle möglichen Geraden, welche die Fläche in A berühren, als Tangenten ebener Curven erhalten kann.

Um von einem Punkte P außerhalb einer krummen Fläche eine Tangente an sie zu legen, denke man sich die Fläche durch eine Ebene geschnitten, welche durch P geht, und an die Schnittcurve eine Tangente aus P gezogen. Da man jene Schnittebene auf unendlich verschiedene Arten durch P legen kann, so erhält man unendlich viele Tangenten, welche zusammen eine Kegelfläche bilden, während ihre Berührungspunkte auf der krummen Fläche eine stetige Curve bestimmen. Man sagt, ein solcher Kegel sei der Fläche von P aus umschrieben.

Soll eine Tangente einer krummen Fläche parallel mit einer gegebenen Geraden G sein, so kann sie wieder unendlich viele Lagen haben; denn man kann die Fläche durch unendlich viele Ebenen schneiden, welche alle durch G gehen (oder auch parallel mit G sind), und die mit G parallele Tangente jeder Schnittcurve gibt eine Lage ab. Alle diese Lagen der Flächentangente bestimmen eine Cylinderfläche und ihre Berührungspunkte eine stetige Curve. Der Cylinder ist der Fläche parallel mit G umschrieben.

Ebenso hat man es mit einer unbestimmten Aufgabe zu thun, wenn man an eine krumme Fläche eine Tangente parallel mit einer gegebenen Ebene E legen soll. Denn alle möglichen Tangenten einer Curve, nach welcher die krumme Fläche von einer mit E parallelen Ebene geschnitten wird, genügen der Aufgabe, und eine solche Parallelebene kann selbst wieder unendlich viele Lagen haben.

260. Der geometrische Ort einer Geraden, welche eine krumme Fläche in einem gegebenen Punkte A berührt, ist im Allgemeinen eine Ebene. Denn würden die sämmtlichen durch A gehenden Tangenten nicht in einer Ebene liegen, so müßten sie eine Kegelfläche bilden, welche A zur Spitze hätte; jede Kegelfläche aber muß von einer durch ihre Spitze gelegten Ebene nach mehreren Geraden

geschnitten werden können;* daher müßte eine Curve C, nach welcher eine durch A gehende Ebene die gegebene krumme Fläche schneidet, im Punkte A mehrere Tangenten zulassen, was im Allgemeinen nicht der Fall ist und nur dann möglich wäre, wenn der Punkt A einen mehrfachen Punkt der Curve C abgäbe. Man sieht hieraus, daß für jeden gewöhnlichen Punkt einer krummen Fläche die durch ihn gehenden Tangenten eine Ebene bestimmen, und diese nennt man Berührungsebene. Allerdings aber kann statt der Berührungsebene ein Berührungskegel auftreten, wenn der Berührungspunkt ein besonderer Punkt der Fläche ist, nämlich ein solcher, welcher für jede durch ihn gehende und auf der krummen Fläche liegende ebene Curve einen mehrfachen Punkt vorstellt. In einem solchen Falle bildet die Fläche in dem erwähnten Punkte eine trichterförmige Einsenkung.** Eine ähnliche Einsenkung kann auch in der Art stattfinden, daß der tiefste Punkt derselben ein Rückkehrpunkt aller der ebenen Curven ist, welche man durch ihn auf der krummen Fläche ziehen kann,*** und unter diesen Umständen gibt es ausnahmsweise für den genannten Punkt nur eine einzige Tangente der krummen Fläche.

Schneidet eine krumme Fläche sich selbst nach irgend einer Curve, so wird es für jeden Punkt dieser Curve mehrere Berührungsebenen der Fläche geben, indem jedem Flächenmantel seine besondere Berührungsebene zukommt.

† Der obigen Erklärung von einer Berührungsebene entspricht als Umkehrung der Lehrsatz: Wird eine krumme Fläche F von einer Ebene E im Punkte A berührt, und irgend eine andere durch A gelegte Ebene schneidet die F in der Curve f, die E in der Geraden e, so ist e eine Tangente der f und A ihr Berührungspunkt.

261. Eine Normale einer krummen Fläche ist eine Gerade, welche auf einer Berührungsebene im Berührungspunkte senkrecht steht.

---

* Irgend zwei auf einer Kegelfläche gezogene Gerade kann man immer als solche Schnitte betrachten; die durch sie bestimmte Ebene kann aber für gewisse Formen der Kegelfläche zugleich auch noch andere Gerade mit dem Kegel gemein haben.

** Ein Beispiel liefert die Fläche, welche durch Drehung eines Kreises um eine Sehne entsteht.

*** Man denke sich z. B. eine mit einem Rückkehrpunkte versehene Curve um die Tangente dieses Rückkehrpunktes gedreht.

Zwei krumme Flächen berühren sich, wenn sie einen gemeinschaftlichen Punkt und für diesen die Berührungsebene oder die Normale gemein haben.

Die Berührungsebene aber ist gemeinsam, sobald beide Flächen in dem gemeinschaftlichen Punkt zwei Tangenten gemein haben.

262. So wenig man eine Ebene durch Projection ihrer sämmtlichen Punkte darstellen konnte, so wenig ist dieß bei einer krummen Fläche möglich. Doch muß die Art der graphischen Darstellung einer Fläche immer die Mittel gewähren, zu der einen Projection irgend eines Flächenpunktes die entsprechende zweite Projection zu finden, oder mit andern Worten: man muß im Stande sein, jeden einzelnen Punkt der Fläche in Projection zu legen, also auch jede Linie, die auf der Fläche gezogen werden kann.

Da bei einer krummen Fläche in Beziehung auf das Sichtbarsein einzelner Theile derselbe Fall eintritt wie bei einem Polyeder, so hält man sich auch hier an die für die Darstellung eines Körpers gegebene Regel; man zeichnet nämlich solche Linien, welche auf der vom Auge abgekehrten Seite der krummen Fläche gezogen sind, punktirt (vgl. Nr. 149).

Im Folgenden sollen die wichtigsten Gattungen krummer Flächen aufgeführt werden. Doch darf man diese Aufzählung nicht etwa für eine durchgreifende Classification der krummen Flächen halten; denn sehr häufig kann eine und dieselbe Fläche unter mehrere dieser Gattungen zugleich eingereiht werden.

Cylinderflächen.

263. Eine Cylinderfläche ist (Nr. 258) der geometrische Ort einer Geraden, welche eine gegebene Curve schneidet und dabei eine gegebene Richtung hat. Dabei ist vorausgesetzt, daß, falls die Curve eben ist, ihre Ebene jener gegebenen Richtung nicht parallel sei, indem sonst statt der Cylinderfläche eine Ebene erzeugt werden würde. Die Curve heißt die Leitlinie oder Leitende, die bewegliche Gerade die Erzeugende, jede einzelne Lage derselben eine Mantellinie.

Eine Cylinderfläche ist gegeben, wenn man die Projectionen der Leitenden und einer Geraden kennt, mit welcher die Erzeugende parallel bleibt. Diese Gerade soll Richtlinie heißen.

Zieht man auf einer Cylinderfläche eine beliebige krumme Linie, welche alle Mantellinien schneidet, so kann diese als eine neue Leitende

an die Stelle der ursprünglichen Leitenden gesetzt werden; also gibt es unendlich viele Curven, welche als Leitende für eine und dieselbe Cylinderfläche auftreten können.

Eine Cylinderfläche ist die Grenze für eine prismatisch gebrochene Fläche, deren einzelne Seiten fortwährend an Zahl zu- und an Breite abnehmen.

Sowie die parallelen Schnitte einer prismatischen Fläche, so sind auch die parallelen Schnitte einer Cylinderfläche unter sich congruent.

264. **Aufg.** Für eine Cylinderfläche ist die Leitende (vw, v'w') und die Richtlinie (mn, m'n')* gegeben. Man soll eine beliebige Mantellinie projiciren. Fig. 93.

Aufl. Irgend eine mit mn Parallele abc, welche die H-Projection der Leitenden schneidet, kann als H-Projection einer Mantellinie gelten. Die Punkte b, c sind die H-Projectionen der Punkte B, C, in denen die Leitende von der durch abc gehenden projicirenden Ebene geschnitten wird; die zugehörigen V-Projectionen b', c' findet man durch Senkrechte zum Grundschnitt, und die mit m'n' parallel durch b' und c' gelegten Geraden sind die V-Projectionen zweier Mantellinien, denen die gemeinschaftliche H-Projection ac entspricht.

Zieht man zuerst (parallel mit m'n') beliebig die V-Projection a'b' einer Mantellinie, so ergeben sich für diese ebenfalls zwei H-Projectionen; denn zu dem in b' projicirten Punkte der Leitenden gehört als H-Projection sowohl der Punkt b_0 als der Punkt b.

Wenn (bei anderer als der in Fig. 93 angenommenen Gestalt der Leitenden) die Projection einer Mantellinie die gleichnamige Projection der Leitenden in n Punkten schneidet, so kann die zweite Projection dieser Mantellinie n verschiedene Lagen haben, d. h. eine mit der Erzeugenden parallele projicirende Ebene schneidet die Cylinderfläche nach n Mantellinien.

Zusatz. Wenn die H-Projectionen zweier Mantellinien die H-Projection der Leitenden berühren, ohne diese Projection in einem andern Punkte zu schneiden, so geben sie die Grenzen ab, innerhalb welcher die H-Projectionen aller übrigen Mantellinien liegen müssen, und bilden den horizontalen Umriß der Cylinderfläche. In Fig. 93 sind es die Linien rs, tu. Deßgleichen wäre der verticale Umriß der Fläche das mit m'n' parallele Tangentenpaar an der V-Projection der Leitenden, wenn diese Projection eine krumme Linie wäre; da sie aber in Fig. 93 eine begrenzte Gerade ist, so gehen die Linien v'y', w'x' des verticalen Umrisses durch ihre Endpunkte (und ähnlich würde sich's ver-

halten, wenn die Projection der vollständigen Leitenden ein begrenzter Bogen mit doppelter Geltung wäre).

Ist die Projection der Leitenden eine geschlossene Curve mit Wendepunkten, so kann es neben den erwähnten Tangenten (den absoluten Umrißlinien) noch andere Tangenten geben, welche die Curve zugleich schneiden. Auch diese können, in relativem Sinn, als Umrißlinien betrachtet werden, insofern eine Umrißlinie überhaupt eine Grenze vorstellt, mit deren Erreichung die Projection der stetig fortschreitenden Erzeugenden die Richtung ihrer Parallelverschiebung umkehrt.

Hat die Projection der Leitenden einen Rückkehrpunkt, so geht durch ihn in der Regel eine Umrißlinie, welche nicht Tangente ist.

Man sieht, daß, wenn die Leitende eine nichtgeschlossene Curve ist, im Allgemeinen ein absoluter Umriß entweder gar nicht oder nur einseitig existirt.

Die Punkte r, t, in denen in Fig. 93 der horizontale Umriß die H-Projection der Leitenden berührt, scheiden in Beziehung auf die HE den sichtbaren Theil der Leitenden vom unsichtbaren, und zwar ist hier der Theil rvt der unsichtbare, weil (wie die Lage von v′w′ zeigt) der Punkt V tiefer liegt als der Punkt W. Demnach sind die H-Projectionen aller jener Mantellinien, welche das Stück RVT der Leitenden schneiden, punktirt zu zeichnen. In Beziehung auf die VE ist das Stück WTV der Leitenden sichtbar, das Stück WRV unsichtbar. Die V-Projection einer Mantellinie wird daher punktirt gezeichnet, wenn der Schnitt ihrer H-Projection und der H-Projection der Leitenden auf den Bogen wrv fällt.

Fig. 93. **265. Aufg.** Eine Cylinderfläche ist durch die Leitende (vw, v′w′) und die Richtlinie (mn, m′n′) gegeben. Man soll die zweite Projection eines Punktes A der Fläche finden, dessen eine Projection bekannt ist.

Aufl. Man zeichne die Projectionen der durch A gehenden Mantellinie (Nr. 264) und bestimme die verlangte zweite Projection nach Nr. 44.

Ist z. B. die H-Projection a gegeben, so zieht man zuerst abc || mn, sucht die zugehörigen V-Projectionen a′b′, a″c′, und gelangt so zu den Punkten a′ und a″, in deren jeden sich der Punkt A auf der VE projiciren kann.

Ist die V-Projection a′ gegeben, so findet man mittels der Linie a′b′ die Linien ab, $a_0 b_0$ und mit deren Hülfe die Punkte a, a_0.

Trifft die durch a (oder a′) gelegte Projection der Mantellinie die gleichnamige Projection der Leitenden in n Punkten, so läßt die Aufgabe n Lösungen zu.

266. Aufg. Die Spuren einer Cylinderfläche zu zeichnen, wenn die Leitende und die Richtlinie gegeben sind.

Aufl. Man projicire eine hinreichende Anzahl Mantellinien Fig. 93. (Nr. 264), bestimme für jede einzelne beide Spuren (Nr. 34) und lege immer durch die gleichnamigen Spuren eine stetige Curve.

Zusatz. Die Spur einer Cylinderfläche ist eine Parallel-Projection der Leitenden.

Die orthogonal-projicirende Ebene einer Mantellinie, deren Projection dem Umriß angehört, enthält zugleich die Tangente der Leitenden für den Punkt, in welchem diese von der Mantellinie geschnitten wird; und da die Mantellinie selbst zu den Tangenten der Cylinderfläche zählt (Nr. 259), so ist jene projicirende Ebene eine Berührungsebne des Cylinders. Ihre Spuren sind (als Parallel-Projectionen der Tangente der Leitenden, und weil die Beweisführung der Nr. 234 über das Projiciren einer Tangente auch für schiefe Lage der Richtungslinie paßt) Tangenten an den gleichnamigen Cylinderspuren, was bei der Zeichnung der letzteren zu benützen ist.

Ueberhaupt bestimmt immer eine Tangente der Leitenden nnd die durch ihren Berührungspunkt gehende Mantellinie eine Berührungsebene des Cylinders, und die Spur der Ebene ist Tangente der gleichnamigen Cylinderspur.

267. Ist die Leitende einer Cylinderfläche eine Ellipse (den Kreis mit eingeschlossen), Parabel oder Hyperbel, so ist auch (Nr. 266, Zus.; Nr. 247) jede ihrer Spuren, überhaupt jeder ebene Schnitt der Fläche, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, den Fall ausgenommen, wo die Richtlinie parallel zur schneidenden Ebene liegt.

Jede Cylinderfläche, deren Leitende eine Ellipse ist, kann nach Kreisen geschnitten werden. Denkt man sich nämlich die Fläche zunächst senkrecht zu den Mantellinien geschnitten, die Axen der Schnittellipse E bestimmt und durch diese Axen Ebenen parallel zu den Mantellinien gelegt, so ist jede solche Ebene eine Symmetral-Ebene für die Fläche und für jede Curve, welche als Schnitt der Fläche mit einer zur Symmetral-Ebene senkrechten Ebene entsteht. Legt man also eine schneidende Ebene F z. B. durch die große Axe der Ellipse E, so fällt in die durch die kleine Axe gehende Symmetral-Ebene eine Axe des neuen Schnitts, dessen zweite Axe mit der großen Axe der E zusammenfällt. Man kann nun immer zwei Lagen der F finden, bei denen die beiden Axen des neuen Schnitts einander gleich werden, d. h. dieser Schnitt selbst ein Kreis wird. (Sollte E selbst ein Kreis sein, so fallen in seiner Ebene die beiden erwähnten Lagen der F zusammen.)

Abgeleitete Gestalten auf Cylinderflächen und auf parallelprojicirenden Flächen überhaupt.

268. Zwei räumliche Gebilde, welche auf einer gegebenen Grundebene und bei gegebener Richtung der Projectionsstrahlen eine gemein-

schaftliche Projection haben, stehen, insofern sie auf der nämlichen projicirenden Fläche enthalten sind, in gegenseitiger Beziehung, doch nicht in so bestimmter Abhängigkeit, daß das eine Gebilde aus dem andern gefunden werden könnte. Eine solche Abhängigkeit aber läßt sich z. B. dadurch herstellen, daß man festsetzt, für zwei auf demselben Projectionsstrahl liegende Punkte sollen die in der Richtung dieses Strahls gemessenen Abstände von der Grundebene (die „Grunddistanzen" in einem erweiterten Sinne) ein bestimmtes, für alle solche Punktpaare gleichbleibendes Verhältniß haben, während zugleich je zwei zusammengehörige Punkte entweder immer auf einerlei Seite der Grundebene oder immer auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen. Jedem gegebenen Raumgebilde entspricht dann ein zweites, welches das aus dem ersten abgeleitete (oder kürzer dessen Ableitung) heißen mag. Ein gegebenes Gebilde kann auf unendlich viele abgeleitete führen, je nach der Wahl der Grundebene, der Richtungslinie und jenes constanten Verhältnisses.

Ist 𝔊 eine Ableitung des Gebildes G, so erhält man auch G als Ableitung von 𝔊, wenn man Grundebene und Richtungslinie beibehält, das Ableitungsverhältniß aber umkehrt.

Kommen im Raume mehrere Gebilde nebeneinander zur Betrachtung, so wird für ihre Ableitungen in der Regel dieselbe Grundebene, dieselbe Richtungslinie und dasselbe Verhältniß benützt.

Man hat nun unmittelbar folgende Sätze (deren Beweise sich von selbst ergeben).

1) Die Ableitung einer Geraden ist eine Gerade, welche mit der ersten die Spur gemein hat.

2) Die Ableitung einer Ebene ist eine Ebene, welche durch die Spur der ersten geht.

3) Die Ableitungen zweier Geraden werden sich schneiden, oder parallel sein, oder nicht in einer Ebene liegen, je nachdem das eine oder das andere bei den ursprünglichen Geraden stattfindet.

4) Die Ableitungen zweier Ebenen sind parallel oder nicht, je nachdem die ursprünglichen Ebenen parallel sind oder sich schneiden.

5) Das Verhältniß zweier Strecken, welche auf einer Geraden oder auch auf parallelen Geraden genommen sind, findet sich zwischen den abgeleiteten Strecken unverändert wieder. (Hat also eine Figur einen Mittelpunkt, so ist die Ableitung desselben ein Mittelpunkt für die Ableitung der Figur.)

6) Liegen im Raume zwei ähnliche Figuren so, daß ihre entsprechenden Linien parallel sind, so sind auch die Ableitungen der Figuren unter sich ähnlich.

7) Die Ableitung einer Curventangente berührt die Ableitung der Curve in der Ableitung des ursprünglichen Berührungspunkts.

8) Wird eine krumme Fläche von einer Ebene berührt, so berührt die abgeleitete Ebene die abgeleitete Fläche in der Ableitung des Berührungspunkts.

† Bezeichnet m den Werth des Ableitungsverhältnisses, so nämlich, daß (wenn p die gemeinsame Projection des Punktes P und seiner Ableitung $\mathfrak{P}$ bedeutet) $\mathfrak{P}p = m . Pp$ ist, so kann man durch ein Vorzeichen der Zahl m noch ausdrücken, ob die Punkte P und $\mathfrak{P}$ auf einerlei Seite der Grundebene liegen oder nicht, indem man im letztern Falle die Zahl als negative schreibt.

Ist $m = -1$ und die Richtungslinie senkrecht auf der Grundebene, so liegt jedes Gebilde mit seiner Ableitung symmetrisch gegen die Grundebene. Ist $m = -1$ bei schiefer Richtungslinie, so kann man (unter Erweiterung des Begriffs der Symmetrie) sagen, die beiden Gebilde liegen gegen die Grundebene „symmetrisch nach der Richtungslinie." *

Läßt man die Zahl $\pm m$ immer kleiner werden, so nähern sich die Punkte des abgeleiteten Gebildes von der einen oder andern Seite her immer mehr der Grundebene und würden für $m = o$ in die Grundebene fallen. Man könnte also die Projection eines Gebildes selbst unter die Ableitungen des Gebildes (als Grenzfall) einreihen.

Kegelflächen.

269. Eine Kegelfläche ist (Nr. 258) der geometrische Ort einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Curve schneidet (die, wenn sie eben ist, in ihrer Ebene nicht zugleich den gegebenen Punkt enthalten darf). Der feste Punkt heißt der Mittelpunkt oder die Spitze der Kegelfläche, die gegebene Curve die Leitende, die veränderliche Gerade die Erzeugende und jede ihrer einzelnen Lagen eine Mantellinie.

Jede vollständige Kegelfläche besteht aus zwei Mänteln, welche in der Spitze zusammenhängen.

Eine Kegelfläche ist die Grenze für eine pyramidal gebrochene Fläche, deren Seiten bei wachsender Anzahl immer kleinere Kantenwinkel erhalten. Da nun parallele Schnitte einer pyramidalgebrochenen Fläche ähnliche Polygone sind, so müssen auch die Curven, welche durch pa-

---

* Solche schiefe Symmetrie ist schon bei früheren Betrachtungen ebener Gestalten vorgekommen. Wird z. B. eine Ellipse durch einen beliebigen Durchmesser in zwei Hälften geschieden, so liegen beide Hälften gegen diesen Durchmesser symmetrisch nach der Richtung des conjugirten Durchmessers.

rallele Schnitte einer Kegelfläche zum Vorschein kommen, ähnliche Curven sein (vgl. Nr. 197).

Die beiden Mäntel einer vollständigen Kegelfläche sind im Allgemeinen nicht congruent; sie verhalten sich wie die Oberflächen eines Vielkants und seines Scheitelkants (Nr. 105).

Eine Kegelfläche ist gegeben durch die Projectionen ihrer Leitenden und ihrer Spitze.

Für eine und dieselbe Kegelfläche gibt es unendlich viele Leitende, indem jede Linie, welche alle Mantellinien schneidet, für eine Leitende genommen werden kann.

270. Aufg. Eine beliebige Mantellinie einer Kegelfläche zu projiciren, wenn deren Spitze (m, m′) und Leitende (vw, v′w′) gegeben sind.

Fig. 94. **Aufl.** Man lege durch m eine beliebige Gerade, welche die vw in b, c schneidet, bestimme die zu b, c gehörigen V-Projectionen b′, c′ und ziehe m′b′, m′c′, so sind (mb, m′b′), (mc, m′c′) zwei Mantellinien.

Würde die vw (bei anderer Gestalt) von der mbc nicht in zwei, sondern in n Punkten geschnitten, so würde die durch mcb geführte projicirende Ebene mit der Kegelfläche n Mantellinien gemein haben.

Zusatz. Auch hier bilden die äußersten Lagen der projicirten Erzeugenden die Umrisse der Fläche. Diese äußersten Lagen (im absoluten oder relativen Sinne) sind nämlich solche Gerade, welche von der Projection der Spitze ausgehen und die gleichnamige Projection der Leitenden berühren oder — wenn die vollständige Projection der Leitenden in Grenzpunkte ausläuft — durch ihre Grenzpunkte gehen.

Was zu Ende der Nr. 264 für die Cylinderfläche in Betreff des Sichtbarseins einzelner Theile gesagt ist, gilt auch hier. Doch ist hiezu noch zu bemerken, daß jede Mantellinie, welche unterhalb der Spitze M unsichtbar war, oberhalb derselben sichtbar wird, und umgekehrt. Nur die absoluten Umrisse sind ihrer ganzen Länge nach voll auszuziehen.

271. Aufg. Zu der einen Projection (a oder a′) eines auf einer gegebenen Kegelfläche liegenden Punktes die zweite Projection zu finden.

Fig. 94. **Aufl.** ganz ähnlich wie in Nr. 265.

272. Aufg. Die Spuren einer gegebenen Kegelfläche zu zeichnen.

Aufl. wie in Nr. 266. Fig. 94.

Zusatz I. Die Spur einer Kegelfläche ist die Centralprojection der Leitenden auf die Grundebene, wenn die Spitze M als Projectionscentrum gilt.

Legt man an die Leitende durch einen beliebigen Punkt P derselben eine Tangente, und durch diese und M eine Ebene, so ist die Spur dieser Ebene die Centralprojection der Tangente und muß die Kegelspur (die Centralprojection der Leitenden) in der Spur der Mantellinie MP (nämlich in der Centralprojection von P) berühren. Dieser Satz wird ganz ähnlich bewiesen, wie er in Nr. 234 für Orthogonal-Projectionen bewiesen wurde.

Zusatz II. Die Spur einer Kegelfläche kann eine nichtgeschlossene Curve sein, wenngleich die Leitende eine geschlossene Curve ist. Legt man nämlich durch die Spitze M der Kegelfläche eine Ebene E parallel zur Grundebene, und es fällt ein Punkt U der Leitenden in diese Ebene, so ist die durch ihn gehende Mantellinie MU der Grundebene parallel und hat keine wirkliche Spur; indem aber die Spur einer Mantellinie, welche in der Nähe der MU liegt, in sehr große Entfernung von m fällt, und zwar in immer größere, je näher die Mantellinie an MU kommt, so sagt man, die Spur der MU liege in unendlicher Entfernung. Die bewegliche Erzeugende des Kegels kann sich der MU von zwei entgegengesetzten Seiten nähern; daher wird die Spur der Kegelfläche zwei in's Unendliche fortlaufende Zweige haben.

Schneidet jene durch M gehende und zur Grundebene parallele Ebene E die Leitende in zwei Punkten U_1, U_2, so fallen die Spuren der beiden Mantellinien MU_1, MU_2 (d. i. die Centralprojectionen von U_1 und U_2) in unendliche Entfernung von m; dem Bogen der Leitenden, welcher oberhalb der Ebene E liegt, entspricht als Centralprojection ein Curvenast mit zwei unendlichen Zweigen; dem Bogen unterhalb E ein zweiter Curvenast, der ebenfalls zwei unendliche Zweige hat. Die Centralprojectionen der beiden Tangenten, welche an die Leitende durch die Punkte U_1 und U_2 gelegt sind, berühren (nach Zus. I) die Spur der Kegelfläche, aber erst in unendlichen Entfernungen (nämlich in den unendlich fernen Centralprojectionen von U_1 und U_2), d. h. sie sind

Asymptoten (vgl. Nr. 201) der beiden Aeste, aus denen die Kegelspur besteht.

Auf ähnliche Weise überzeugt man sich, daß allgemein, wenn die geschlossene Leitende von der Ebene E in n Punkten geschnitten wird, die Spur der Kegelfläche n unendliche Aeste und n Asymptoten hat. Ist n = 1 (d. h. geht man auf den zuerst betrachteten Fall zurück), und der in die Ebene E fallende Punkt U der (geschlossenen) Leitenden ist kein besonderer Punkt (Nr. 206, 207) der letztern, so wird die durch U gehende Tangente ganz in die Ebene E fallen und also keine Centralprojection haben; in diesem Falle gibt es demnach für die unendlichen Zweige der Kegelspur keine Asymptote.

Wie sich's verhält, wenn U ein Doppelpunkt oder ein Rückkehrpunkt ist, kann leicht erkannt werden.

Zusatz III. Die Spur einer Kegelfläche kann eine geschlossene Curve sein, wenngleich die Leitende nicht geschlossen ist. Um dieß einzusehen, stelle man sich einen Fall vor, wo die Kegelfläche eine ebene geschlossene Leitende und eine nichtgeschlossene Spur hat, vertausche dann das Grundsystem mit einem andern, dessen eine Grundebene durch die Leitende geht, und betrachte die Curve, welche vorhin als Spur erschien, als neue Leitende; dadurch ist offenbar die erste Leitende zur Spur geworden, und man hat eine Kegelfläche mit nichtgeschlossener Leitenden aber geschlossener Spur vor sich.

Hieraus ist zu ersehen, daß eine Kegelfläche auch in solchen Fällen in sich selbst zurückkehren kann, wo die Leitende eine nichtgeschlossene Curve ist.

Kegel zweiter Ordnung.

273. Eine Kegelfläche heißt „von der zweiten Ordnung", wenn sie zur Leitenden eine Linie zweiter Ordnung hat.

Die Ebene einer solchen Leitenden L gelte als Grundebene; S sei die Spitze des Kegels, 𝔖 die Spitze eines geraden Kegels, welcher ebenfalls die L zur Leitenden hat (vgl. S. 198). Betrachtet man die Gerade S𝔖 als Richtungslinie für Parallelprojectionen und 𝔖 als die Ableitung (Nr. 268) von S, so ist der Kegel 𝔖L die Ableitung des Kegels SL (indem aus jeder Mantellinie des letztern sich diejenige Mantellinie des erstern ableitet, welche mit jener durch denselben Punkt der L geht). Denjenigen Punkten, in denen eine beliebig gegebene Ebene E die Mantellinien der Kegelfläche SL schneidet, entsprechen auf

der Kegelfläche $\mathfrak{S}L$ abgeleitete Punkte welche in einer Ebene $\mathfrak{E}$ liegen (Nr. 268, 2). Der gerade Kegel aber wird von der Ebene $\mathfrak{E}$ nach einer Linie zweiter Ordnung geschnitten (S. 197); also muß auch der Schnitt der Ebene E und der Kegelfläche SL eine Linie zweiter Ordnung sein (Nr. 247).

Um sich zu überzeugen, daß jede der drei Linien zweiter Ordnung als ein ebener Schnitt des Kegels S auftreten kann, darf man nur umgekehrt diesen als Ableitung des Kegels $\mathfrak{S}$ ansehen; denn am geraden Kegel ist diese Möglichkeit jedenfalls vorhanden, und die entsprechenden Schnitte beider Kegel sind stets von gleicher Art. (Mithin kann jede Kegelfläche zweiter Ordnung mit Hülfe einer elliptischen Leitenden erzeugt werden.)

Mit Obigem ist zugleich nachgewiesen, daß jede Centralprojection einer Linie zweiter Ordnung wieder eine solche Linie ist (wenn auch nicht nothwendig von der gleichen Art).

274. Jede durch die Spitze (den Mittelpunkt) einer Kegelfläche gelegte Ebene, welche mit der Fläche entweder keinen weitern Punkt oder zwei Mantellinien gemein hat, heißt eine Diametral-Ebene; jede durch die Spitze gelegte Gerade, welche nicht auf die Kegelfläche selbst fällt, ein Durchmesser.

Wird die Grundebene parallel zu einer willkürlich gewählten Diametralebene H_1 angenommen, so ist die Spur der Kegelfläche eine Ellipse oder Hyperbel, hat also jedenfalls einen Mittelpunkt O. Der durch diesen Mittelpunkt gehende Durchmesser D_1 enthält zugleich die Mittelpunkte aller andern mit H_1 parallelen Schnitte der Kegelfläche, wie man sogleich sieht, wenn man um ihn eine Ebene sich drehen läßt und die in dieser Ebene entstehenden Schnittfiguren betrachtet; die nämliche Betrachtung zeigt aber auch noch, daß alle mit D_1 parallelen Sehnen der Kegelfläche von der H_1 halbirt werden. Die Diametralebene H_1 und der Durchmesser D_1 heißen einander zugeordnet (conjugirt). — Wäre zuerst der Durchmesser D_1 willkürlich gewählt, durch die Halbirungspunkte zweier ihm parallelen Sehnen des Kegels eine Diametralebene H_1 gelegt und parallel zu dieser wieder eine Grundebene angenommen worden, so müßte — wie sich leicht indirect aus dem Vorigen beweisen läßt — die Spur der D_1 in den Mittelpunkt der Kegelspur treffen.

Wählt man zwei neue Diametralebenen H_2, H_3 so, daß sie durch D_1

gehen und ihre Spuren conjugirte Durchmesser der Kegelspur sind, wobei die H_1 von der H_2 nach einem Durchmesser D_3 der Kegelfläche, von der H_3 nach einem Kegeldurchmesser D_2 geschnitten wird, so sieht man augenblicklich, daß alle mit D_2 parallelen Sehnen der Kegelfläche durch die H_2 halbirt werden, alle mit D_3 parallelen Sehnen durch die H_3. Daraus folgt aber nunmehr, daß D_2 die Mittelpunkte der mit H_2 parallelen Kegelschnitte, D_3 die Mittelpunkte der mit H_3 parallelen Schnitte enthalten muß.

Man kann also unendlich viele Gruppen von je drei Diametralebenen solcher Beschaffenheit bilden, daß immer die eine dem Durchmesser conjugirt ist, nach welchem sich die beiden andern schneiden.

Von den drei Durchmessern D_1, D_2, D_3 fällt immer einer in's Innere der Kegelfläche, aber auch **nur** einer. Von den drei Ebenen H_1, H_2, H_3 schneiden immer zwei den Kegel nach Mantellinien, die dritte hat blos die Spitze mit ihm gemein.

275. Innerhalb einer Kegelfläche zweiter Ordnung gibt es immer einen Durchmesser von solcher Stellung, daß er den Winkel jedes Paares von Mantellinien, mit denen er in einerlei Ebene liegt, halbirt.

Dieß läßt sich auf folgende Art erweisen. Man wähle die Grundebene so, daß die Spur der gegebenen Kegelfläche eine Ellipse wird, lege durch zwei beliebige Punkte P, Q der Ellipse Tangenten an diese und durch je eine Tangente und die Kegelspitze S eine Ebene; beide Ebenen schneiden sich nach einer (außerhalb des Kegels fallenden) Geraden D. Wird die Ebene DP um D bis in die Lage DQ gedreht, so schneidet jede Zwischenlage den Kegel nach zwei Mantellinien; in der Ebene dieser Mantellinien und **innerhalb** der Kegelfläche sei ein Kegeldurchmesser so gezogen, daß er den Winkel der Mantellinien halbirt. Der geometrische Ort dieser Halbirungslinie ist eine Fläche F, welche die Mantellinien SP, SQ verbindet und die gegebene Kegelfläche in zwei Abtheilungen scheidet. Sind nun P′, Q′ zwei andere Punkte der Ellipse, welche auf **verschiedenen** Seiten der Fläche F liegen, und wird in Beziehung auf diese Punkte das ganze Verfahren wiederholt, so entsteht (während der Drehung einer Ebene um die der D entsprechende Gerade D′) eine zweite Fläche F′, welche die F nothwendig nach einem Kegeldurchmesser A schneiden muß; von diesem weiß man also vorläufig, daß er in **zwei** Diametralebenen AD und AD′ die Winkel der Mantellinien halbirt. Senkrecht zu A werde eine neue Grundebene angenommen. In dieser halbirt die Spur O der A die beiden Sehnen der Kegelspur, welche in den Ebenen AD und AD′ liegen; folglich ist O der **Mittelpunkt** der neuen Kegelspur E * (und diese ist wieder eine Ellipse; denn da A innerhalb der Kegelfläche liegt,

* Vermöge der Eigenschaften conjugirter Durchmesser können sich zwei Sehnen eines Kegelschnitts niemals gegenseitig halbiren, wenn nicht jede ein Durchmesser ist.

muß auch O auf der concaven Seite der Kegelspur liegen). Hieraus aber folgt sogleich, daß A in jeder durch ihn gelegten Ebene den Winkel der betreffenden Mantellinien halbirt. — Es kann innerhalb der Kegelfläche nur einen Durchmesser von dieser Eigenschaft geben; denn die Annahme eines zweiten (𝔄) würde auf den Widerspruch führen, daß in der Ebene A𝔄 zwei verschiedene Halbirungslinien eines und desselben Winkels möglich wären. (Mithin schneiden sich die obenerwähnten Flächen F, F′ immer in der nämlichen Geraden, wie auch die Punkte P, Q, P′, Q′ gewählt sein mochten.)

Dieser Durchmesser A heißt Axe der Kegelfläche. Eine zu ihm senkrechte Diametralebene ist ihm zugeordnet. Legt man durch die Axen einer Ellipse E, deren Ebene senkrecht zur Kegelaxe ist, zwei andere Diametralebenen, so hat man eine Gruppe von drei gegenseitig aufeinander senkrechten Diametralebenen; jede derselben ist eine Symmetralebene für die Kegelfläche; die erstgenannte wird von den beiden andern nach Durchmessern (senkrecht unter sich und auf A) geschnitten, welche äußere Axen der Kegelfläche heißen. (Wo der Name Axe ohne Beisatz gebraucht wird, ist immer die innere gemeint.) — Der größte und der kleinste Winkel zweier mit der Axe in einerlei Ebene liegenden Mantellinien fallen in Symmetralebenen; diese Winkel bilden die Hauptschnitte der Fläche.

† Aus dem Vorigen ergibt sich, daß, wenn man in einer Grundebene als Leitende eine Ellipse annimmt und deren Mittelpunkt als Orthogonalprojection der Spitze betrachtet, durch Aenderungen an den Ellipsenaxen α, β und an der Grunddistanz γ der Spitze alle Kegelflächen zweiter Ordnung erhalten werden können, welche überhaupt möglich sind. Durch paralleles Verschieben der Grundebene ändern sich die Verhältnisse $\alpha:\beta:\gamma$ nicht; daher ist durch zwei solche Verhältnisse eine Kegelfläche bestimmt. (Für $\alpha=\beta$ geht jene Ellipse in einen Kreis über; durch die Kegelaxe gehen dann unendlich viele Symmetralebenen, von denen je zwei rechtwinkelig verbundene mit der durch die Spitze gelegten Symmetralebene zusammengenommen werden können.)

Auch sieht man jetzt, daß die beiden Mäntel einer Kegelfläche zweiter Ordnung congruent sind (vgl. Nr. 269.)

276. Die Leitende einer Kegelfläche sei ein Kreis, dessen Ebene auf der Linie zwischen seinem Mittelpunkt und der Kegelspitze S nicht senkrecht steht. Eine durch diese Linie senkrecht zur Kreisebene geführte Ebene ist eine Symmetralebene für die Kegelfläche; sie schneide die

Peripherie des Kreises in den Punkten P, P′; dann ist die Halbirungslinie des Winkels PSP′ die Axe der Kegelfläche. Die durch die Axe gelegte zweite Symmetralebene treffe den Kreis in Q, Q′ (so daß QSQ′, PSP′ die beiden Hauptschnitte sind). Dreht man jetzt den Kegel um die Axe, bis die Mantellinien eines Hauptschnitts ihre Lagen gegenseitig vertauscht haben, so vollzieht sich zugleich ein Austausch zwischen den Mantellinien des andern Hauptschnitts, sowie zwischen den Punkten Q, Q′; die neue Lage des Kegels selbst fällt mit der alten völlig zusammen, der Kreis auf ihm hat aber eine Lage angenommen, welche mit der ursprünglichen die Punkte Q, Q′ gemein hat, während den ursprünglichen Punkten P und P′ zwei neue Lagen 𝔓 (auf SP′) und 𝔓′ (auf SP) entsprechen. Folglich wird jeder schiefe Kreiskegel nicht blos von den mit seiner Basis parallelen Ebenen nach Kreisen geschnitten, sondern noch *von einem zweiten System unter sich paralleler Ebenen.* Ein beliebiger Kreis aus dem ersten System und ein beliebiger Kreis des zweiten Systems liegen immer *auf einer Kugelfläche*,* deren Mittelpunkt der Ebene PSP′ angehört. (Beim geraden Kreiskegel fallen beide Systeme zusammen.)

Schneiden zwei Kreise auf der Kegelfläche sich in Q_0, so ist die durch die Tangenten in Q_0 bestimmte Ebene eine Berührungsebene (Nr. 260) sowohl für den Kegel als für die durch die Kreise gelegte Kugel; und da die Mantellinie SQ_0 zu den Tangenten des Kegels in Q_0 zählt (Nr. 259), so ist sie auch eine Tangente der Kugel. In Anwendung auf die Punkte Q, Q′ lehrt dieß, daß der Hauptschnitt PSP′, auf dessen Ebene sämmtliche Kreisschnitte senkrecht sind, der *kleinere* von beiden ist; denn die Kugel PP′𝔓𝔓′ wird von SP und SP′ geschnitten, während sie von SQ und SQ′ berührt wird.

Bezeichnet man jetzt an einer *beliebigen* Kegelfläche zweiter Ordnung den größern Hauptschnitt wieder mit QSQ′, den kleinern mit PS𝔓, und wird in der Ebene des erstern ein Kreis so beschrieben, daß er die Mantellinien SQ, SQ′ in Q, Q′ berührt, so kann man durch Drehung

---

* Durch zwei in verschiedenen Ebenen liegende Kreise geht stets eine Kugelfläche, wenn sie eine Sehne oder Tangente gemein haben; außerdem nur dann, wenn ihre Ebenen sich ganz außerhalb beider Kreise schneiden (oder auch parallel sind), während zugleich die durch den einen Mittelpunkt senkrecht zu beiden Kreisebenen geführte Ebene auch durch den zweiten Mittelpunkt geht und die Peripherien so schneidet, daß sich durch die vier Schnittpunkte ein Kreis legen läßt.

dieses Kreises um die Kegelaxe eine Kugelfläche erzeugen, welche von SP in P und 𝔓', von S𝔓 in 𝔓 und P' geschnitten wird. Zwei Ebenen, durch PP' und 𝔓𝔓' senkrecht zu PSP' gelegt, schneiden die Kugel nach Kreisen, welche (wie ihre Durchmesser PP', 𝔓𝔓') symmetrisch zu einander gegen die Ebene QSQ' liegen und in dieser Ebene eine gemeinschaftliche Sehne 𝔔𝔔' haben. Ein Kegel, der den Kreis über PP' zur Leitenden und S zur Spitze hat, theilt mit der gegebenen Kegelfläche den Hauptschnitt PSP' und die Ebene des zweiten Hauptschnitts; auch muß er (nach dem Vorigen) durch den Kreis über 𝔓𝔓' gehen, und die ihm zugehörigen Mantellinien S𝔔, S𝔔' berühren die Kugel. Da aber an die Kugel innerhalb der Ebene 𝔔S𝔔' von S aus keine andern Tangenten an die Kugel gezogen werden können als die schon vorhandenen SQ, SQ', so haben die beiden Kegel auch den zweiten Hauptschnitt gemein, sind mithin völlig identisch. F o l g l i c h i s t j e d e K e g e l f l ä c h e z w e i t e r O r d n u n g e i n K r e i s k e g e l (im Allgemeinen ein s c h i e f e r). *

† Sehr leicht ist zu erweisen, d a ß d u r c h z w e i K r e i s e e i n e r K u g e l i m m e r z w e i K e g e l f l ä c h e n z w e i t e r O r d n u n g g e h e n, wenn die Cylinderfläche von kreisförmiger Leitenden als Grenzfall mit eingerechnet wird und als Kegel mit unendlich ferner Spitze gilt. (Berühren sich die Kreise, so wird die Eine der beiden Kegelflächen durch die zwei Ebenen der Kreise vertreten.)

277. Der Hauptsatz der vorigen Nummer lautet in anderer Form: J e d e g e g e b e n e L i n i e z w e i t e r O r d n u n g l ä ß t s i c h a l s C e n t r a l p r o j e c t i o n e i n e s K r e i s e s a n s e h e n, w o b e i d a s P r o j e c t i o n s c e n t r u m g a n z b e l i e b i g i m R a u m e a n g e n o m m e n w e r d e n k a n n. Wie aus Eigenschaften des Kreises durch paralleles Projiciren Eigenschaften der Ellipse gewonnen werden, so durch centrales Projiciren Eigenschaften der Kegelschnitte überhaupt, wenn man die Sätze kennt, welche bei der letztern Art des Projicirens den in Nr. 25 und Nr. 28 enthaltenen Sätzen entsprechen.

Für Centralprojectionen gelten jene frühern Sätze unverändert nur dann, wenn die zu projicirenden Geraden p a r a l l e l z u r G r u n d e b e n e liegen. Im Allgemeinen treten an ihre Stelle folgende Sätze von weiterer Bedeutung.

1) D i e C e n t r a l p r o j e c t i o n e n b e l i e b i g v i e l e r P a r a l l e l e n s c h n e i d e n

* Die letzte Betrachtung zeigt zugleich den Weg, auf welchem man die Kreisschnitte der Kegelfläche findet, sobald einmal die Hauptschnitte bekannt sind.

sich in einem Punkt; denn die projicirenden Ebenen der parallelen Geraden schneiden sich sämmtlich nach der Linie, welche durch das Projectionscentrum parallel zu den Geraden geht. Diese Linie heißt der Fluchtstrahl der Geraden und ihre Spur (in welcher die Projectionen der Geraden sich begegnen) der Fluchtpunkt. *

Liegen drei oder mehrere Gerade, ohne parallel zu sein, in einer Ebene oder parallel mit einer Ebene, und tritt zu jeder Geraden eine Gruppe ihr paralleler Linien, so liegen die Fluchtpunkte für sämmtliche Gruppen auf einer Geraden; denn die Fluchtstrahlen liegen in einer Ebene. Kürzer ausgedrückt lautet dieser neue Satz:

2) Alle in einer Ebene gedachten unendlich fernen Punkte projiciren sich in eine Gerade.

3) Liegen auf einer Geraden (in beliebiger Aufeinanderfolge) vier Punkte A, B, P, Q, so bleibt der Werth

$$\frac{AP}{BP} : \frac{AQ}{BQ} \quad \text{oder} \quad \frac{AP \cdot BQ}{BP \cdot AQ}$$

ungeändert, wenn man an die Stelle der Punkte ihre Centralprojectionen setzt. **

Zur Vereinfachung des Beweises kann man (da durch paralleles Verschieben der Grundebene die Verhältnisse zwischen den Strecken, welche durch die Projectionen der Punkte A, P, B, Q begrenzt sind, sich nicht ändern) die ursprüngliche Grundebene mit einer andern vertauschen, welche parallel zu ihr durch A geht. Projiciren sich auf

---

* Um verwandte Sätze unter einen gemeinschaftlichen Ausdruck bringen zu können, bezeichnet man parallele Gerade als solche, welche sich in einem unendlich fernen Punkte schneiden. Demnach ist in obigem Satze auch der besondere Fall inbegriffen, wo die Projectionen parallel werden, indem der Fluchtpunkt in unendlicher Entfernung gedacht werden kann. Ist aber ein Fluchtpunkt wirklich vorhanden, so gilt er als die Projection des unendlich fernen Punkts in welchem die im Raume gegebenen Geraden sich schneiden.

** Die Centralprojection irgend einer Strecke PQ ist nicht immer die zwischen den Projectionen p, q der Endpunkte P, Q enthaltene Strecke im eigentlichen Sinn. Wenn eine durch das Projectionscentrum parallel zur Grundebene geführte Ebene die Strecke PQ in einem Punkte U schneidet, so projicirt sich U in unendliche Entfernung; die Projection der begrenzten Strecke PQ ist die durch p und q gehende unendliche Gerade, aus welcher nur die eigentliche Strecke pq ausgespart ist; diese Strecke pq dagegen ist die Projection der unendlichen Geraden PQ, mit Ausnahme der eigentlichen Strecke PQ. (Man erkennt dieß, indem man eine Gerade um das Projectionscentrum sich so drehen läßt, daß sie nach und nach Projectionsstrahl für alle Punkte der durch P und Q bestimmten Geraden wird.)

Es gilt aber der obige Satz (und sein Beweis) auch in solchen Fällen, wo einer unendlichen Strecke eine unendliche Projection zukommt; denn der Satz spricht nicht von den Projectionen der Strecken selbst, sondern nur von den Projectionen der Punkte, und bei den Maßvergleichungen können immer nur die kürzesten Wege zwischen den Punkten gemeint sein. (Dieß sei zugleich für künftige Sätze bemerkt, bei denen sich's um die Projection von Strecken handelt.)

dieser neuen Grundebene die Punkte B, P, Q aus dem Centrum S nach b, p, q, so hat man (insofern die Seiten des Dreiecks ABb einmal von SP, das anderemal von SQ geschnitten werden):

$$BP.Ap.bS = bp.AP.BS$$
$$BQ.Aq.bS = bq.AQ.BS \qquad (\text{Nr. } 230, {**})$$

also
$$\frac{BP.Ap}{BQ.Aq} = \frac{bp.AP}{bq.AQ}$$

oder
$$\frac{Ap}{bp} : \frac{Aq}{bq} = \frac{AP}{BP} : \frac{AQ}{BQ}.$$

† Ist $AP:BP = AQ:BQ$, d. h. liegen die Punkte P, Q harmonisch mit den Punkten A, B, so gilt das Nämliche von den Projectionen der Punkte. Je weiter dabei die Projection q von A und b entfernt liegt, um so näher kommt das Verhältniß $Aq:bq$ (und also auch das ihm gleiche Verhältniß $Ap:bp$) dem Werthe 1; projicirt sich also der Punkt Q in unendliche Entfernung, so fällt die Projection von P in die Mitte zwischen den Projectionen von A und B. Umgekehrt gilt (wie sich auch direkt leicht beweisen läßt) der Satz: Projicirt man central die Endpunkte einer Strecke, ihren Mittelpunkt und den unendlich fernen Punkt ihrer Richtung, so liegen die Projectionen der beiden ersten Punkte harmonisch mit denen der beiden andern.*

Die Eigenschaften des Kreises, welche man durch Centralprojection auf die übrigen Kegelschnittslinien übertragen will, können häufig selbst wieder aus noch einfacheren Eigenschaften des Kreises auf demselben Wege hergeleitet werden. Dabei hat man sich zu überzeugen, daß, wenn ein Kreis als Centralprojection eines zweiten gilt, jeder beliebige Punkt innerhalb des ersten Kreises als Projection für den Mittelpunkt des zweiten erscheinen kann.

Ist nämlich a ein innerhalb eines Kreises K willkürlich gewählter Punkt, QaQ′ die durch a halbirte Sehne, 𝔎 ein (in anderer Ebene) über QQ′ beschriebener Kreis, so geht durch die Kreise K, 𝔎, da sie auf einer Kugel liegen, ein Kegel (Nr. 276, †); auf der Geraden, welche seine Spitze mit a verbindet, liegt der Mittelpunkt jedes mit 𝔎 parallelen Kegelkreises 𝔎′; gilt also K als Projection des Kreises 𝔎′, so ist a die Projection seines Mittelpunkts.

---

* Die Strahlen, welche aus einem beliebigen Punkte nach vier harmonisch liegenden Punkten gehen (oder nach drei durch gleiche Abstände getrennten Punkten einer Geraden und dem unendlich fernen Punkt dieser Geraden), heißen selbst harmonisch liegend; nach Obigem werden sie von jeder in ihrer Ebene gezogenen Geraden nach harmonischen Punkten geschnitten. (So liegen z. B. irgend zwei conjugirte Durchmesser einer Hyperbel harmonisch gegen die Asymptoten; denn der eine Durchmesser halbirt das zwischen die Asymptoten fallende Stück einer ihm Parallelen.

278. Einige Beispiele mögen die Verallgemeinerung von Kreiseigenschaften zeigen.

1) Dreht sich in der Ebene eines Kegelschnitts eine Gerade um einen willkürlich angenommenen Punkt P, und wird auf jeder Lage der Geraden der Punkt bestimmt, welcher mit P harmonisch gegen die Schnittpunkte der Geraden und des Kegelschnitts liegt, so ist der geometrische Ort dieses Punkts eine Gerade; sie heißt die Polare des Punkts P, und P ihr Pol. — Liegt P innerhalb des Kegelschnitts, so fällt die Polare ganz außerhalb desselben; liegt P außerhalb der Curve, so wird diese von der Polare geschnitten und die Schnittpunkte sind die Berührungspunkte der von P ausgehenden Tangenten.

Diese Sätze müssen für alle Kegelschnitte gelten, sobald sie für den Kreis erwiesen sind; für diesen folgen sie aber unmittelbar aus Nr. 277, wenn man einen Kreis K als Projection eines andern Kreises K′, einen innerhalb K beliebig genommenen Punkt als Projection des Mittelpunkts von K′, einen außerhalb K liegenden Punkt als Projection eines in der Ebene K′ unendlich fern gedachten Punkts ansieht. Aus Betrachtungen am Kreise K′ fließen dann sogleich noch folgende Sätze.

2) Werden durch zwei Punkte eines Kegelschnitts, welche mit einem als Pol angenommenen Punkte in gerader Linie liegen, Tangenten an die Curve gezogen, so schneiden sich diese auf der Polare von P.

3) Zieht man durch den Pol P beliebig zwei Gerade, und zwischen den Punkten, wo sie dem Kegelschnitt begegnen, die vier noch übrigen Verbindungslinien, so schneiden sich diese paarweise auf der Polare von P.

Nach dem letzten Satze kann man mittels des Lineals allein nicht nur zu einem als Pol gegebenen Punkte die Polare leicht construiren, sondern auch, wenn der Punkt außerhalb der Curve liegt, die Berührungspunkte der von ihm ausgehenden Tangenten bestimmen.

Dem Satze 2 zufolge wird die Polare eines auf dem Kegelschnitt liegenden Pols durch die Tangente im Pol vertreten.

In jedem der Sätze 2 und 3 liegt mittelbar der Satz:

4) Ist in Beziehung auf einen Kegelschnitt die Gerade L die Polare des Punkts P, so geht die Polare jedes auf L ge-

nommenen Punkts durch P und der Pol für jede durch P gehende Gerade liegt auf L. (Sind also drei als Pole genommene Punkte in gerader Linie, so schneiden sich ihre Polaren in einem Punkt; und umgekehrt.)

Liegen zwei Gerade gegen einen Kegelschnitt so, daß jede durch den Pol der andern geht, so heißen sie conjugirte Linien. Projiciren sich die beiden Pole in unendliche Entfernung, so wird das Linienpaar zu einem Paare conjugirter Durchmesser; sonach erscheinen die Sätze über conjugirte Durchmesser als besondere Fälle der Polaritätssätze.

Anmerk. Als ein „Kegelschnitt" (erzeugt mittels einer durch die Kegelspitze gelegten Ebene) könnte auch ein Paar sich schneidender Geraden bezeichnet werden, selbst ein Paar paralleler Geraden (sofern die Kegelspitze in unendlicher Entfernung gedacht wird); in gewissen Fällen findet auch wirklich für eine Linie zweiter Ordnung eine Stellvertretung durch ein Paar Gerader statt. Man überzeugt sich leicht, daß die Sätze 1—4 noch gelten, wenn der Name Kegelschnitt in diesem ungewöhnlichen Sinne genommen wird (wobei die Tangenten mit dem Kegelschnitt selbst zusammenfallen).

279. Unter „Sechseck" sei im Folgenden jede geradlinige Figur verstanden, welche entsteht, wenn man sechs Punkte einer Ebene in einer beliebig bestimmten Ordnung verbindet (so daß die Verbindungslinien sich auch kreuzen können). Je die erste und vierte, die zweite und fünfte, die dritte und sechste Seite sollen „Gegenseiten" heißen; in ähnlichem Sinne ist der Ausdruck „Gegenecken" zu verstehen.

Man denke sich ein Sechseck, in welchem je zwei Gegenseiten parallel sind (im Uebrigen von beliebiger Gestaltung). Aus den nämlichen sechs Eckpunkten werde ein neues Sechseck dadurch gebildet, daß man in der Reihenfolge der Ecken zwei benachbarte miteinander vertauscht, indem man statt des ursprünglichen Sechsecks ABCDEF z. B. das Sechseck ACBDEF betrachtet. Schneiden sich an diesem neuen Sechseck die Gegenseiten AC, DE in P, die Gegenseiten BD, FA in Q, so ist PQ parallel dem Gegenseitenpaare BC, EF, welches das neue Sechseck mit dem alten gemein hat. Denn es ist (wenn O den Schnitt von AC und BD bezeichnet):

$$OA : OB = OP : OD, \quad \text{weil } AB \parallel ED;$$
$$OQ : OA = OD : OC, \quad \text{weil } FA \parallel CD;$$
$$\text{also} \quad OQ : OB = OP : OC.$$

In einer centralen Projection der ganzen Figur schneiden sich die Gegenseiten des ursprünglichen Sechsecks auf einer Geraden (Nr. 277, 2), die Gegenseiten des zweiten Sechsecks auf einer andern Geraden (Nr. 277, 1). Da man die Figur aber auch so projiciren kann, daß die Projection von PQ in unendliche Entfernung fällt (also die Gegenseiten des zweiten Sechsecks paarweise parallel werden), so müssen auch die Gegenseiten eines Sechsecks sich auf einer Geraden schneiden, welches sich ergibt, wenn man in der Eckenfolge ACBDEF irgend einen neuen Tausch zwischen Nachbarpunkten

vornimmt. Durch successives Vertauschen benachbarter Ecken kann man zu jeder beliebigen Reihenfolge der sechs Punkte A, B...F gelangen; folglich gilt der Satz: Ist ein Sechseck so gestaltet, daß die Schnittpunkte der drei Paar Gegenseiten auf einer Geraden liegen, so findet sich dieselbe Eigenschaft an jedem andern Sechseck zwischen den nämlichen Eckpunkten.

Beschreibt man in einen Kreis K ein Sechseck S so, daß die erste Seite der vierten, die zweite der fünften parallel ist, so muß auch, wie leicht zu zeigen*, die sechste der dritten parallel werden. Schneiden sich also zwei Paar Gegenseiten eines in einen Kreis K′ beschriebenen Sechsecks S′ außerhalb des Kreises, so muß die Verbindungslinie G beider Schnittpunkte auch den Schnittpunkt des dritten Gegenseitenpaares enthalten; denn man kann jede der Figuren KS und K′S′ als Projection der andern erhalten (indem man den Mittelpunkt von K in den Pol der G sich projicirt denkt). Hieraus und aus dem Voranstehenden folgt:

1) Wird in einen Kegelschnitt ein beliebiges Sechseck beschrieben, so liegen die drei Schnittpunkte je zweier Gegenseiten in gerader Linie.

Da hiernach, wenn fünf Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, beliebig viele andere Punkte desselben gefunden werden können (und zwar durch's Lineal allein), so ist durch fünf Punkte eine Linie zweiter Ordnung bestimmt.

Der obige Satz gilt noch, wenn man eine Seite des Sechsecks verschwindend klein werden läßt und ihre Richtung durch die Tangente ersetzt. Man kann also für einen gegebenen Punkt eines Kegelschnitts die Tangente construiren, wenn außer ihm nur noch vier Punkte der Peripherie bekannt sind.

Beschreibt man um eine Linie zweiter Ordnung irgend ein Sechseck und verbindet der Reihe nach die Berührungspunkte aufeinanderfolgender Seiten, so daß daneben ein einbeschriebenes Sechseck entsteht, so ist der Schnittpunkt zweier Gegenseiten des letztern der Pol für die Gerade zwischen zwei Gegenecken des umbeschriebenen Sechsecks. Aus Nr. 278, 4 (und dem vorigen Satze) folgt:

2) Die drei Verbindungslinien zwischen Gegenecken eines um einen Kegelschnitt beschriebenen Sechsecks schneiden sich in einem Punkt.

Aus fünf Tangenten eines Kegelschnitts lassen sich hiernach beliebig viele andere Tangenten desselben finden. — Läßt man zwei aufeinanderfolgende Seiten des um-

---

* Zwischen zwei parallelen Sehnen eines Kreises liegen gleiche Bögen.

schriebenen Sechsecks in eine Gerade fallen, so vertritt der Berührungspunkt dieser Geraden den sechsten Eckpunkt des auf ein Fünfeck reducirten Polygons; der obige Satz lehrt dann für jede der fünf Tangenten den Berührungspunkt finden. — Durch fünf Tangenten ist ein Kegelschnitt bestimmt. *

Anmerk. Der Satz 1 gilt auch, wenn der Kegelschnitt durch zwei Gerade vertreten wird. (Denn sind in einem Sechseck, dessen Ecken auf zwei Geraden liegen, zwei Paar Gegenseiten parallel, so ist auch das dritte Paar parallel.)

Der Satz 2 gilt noch, wenn die Linie zweiter Ordnung durch eine doppelt gedachte Gerade vertreten wird, welche zwischen Grenzpunkten liegt (wie eine Ellipse, in welcher die eine Axe bis zu Null abgenommen hat) oder von diesen Grenzpunkten aus nach entgegengesetzten Seiten in's Unendliche läuft (wie eine Hyperbel, an welcher bei unveränderter reeller Axe der Asymptotenwinkel bis auf Null herabkommt), und wenn man anstatt der Tangenten Linien nimmt, welche jene Gerade in den Grenzpunkten streifen. Der Satz lautet jetzt: Schneiden sich je drei Seiten eines Sechsecks in einem Punkte, so gehen die drei Verbindungslinien von Gegenecken durch einen Punkt. Die Richtigkeit dieses Satzes ist bereits bei früherer Gelegenheit (Nr. 230) an einem Sechseck VPP′V′NN′ bewiesen worden, in welchem drei Seiten durch einen Punkt F, drei andere nach einem unendlich fernen Punkte laufen. **

280. Jeder der Sätze in Nr. 278 und Nr. 279 zeigt zugleich eine Eigenschaft der Kegelfläche zweiter Ordnung an; um die betreffende Eigenschaft auszusprechen, hat man nur statt Kegelschnitt Kegelfläche zu setzen, statt einer Tangente eine Berührungsebene, statt einer andern Geraden eine Diametralebene, statt eines Punktes einen Durchmesser der Kegelfläche (oder, wenn der Punkt auf dem Kegelschnitt liegt, eine Mantellinie).

So entspricht z. B. dem ersten Satze der Nr. 278 der folgende. Dreht sich um einen beliebigen Durchmesser einer Kegelfläche zweiter Ordnung eine Ebene, und wird in jeder Lage dieser Ebene die Gerade bestimmt, welche mit dem Durchmesser harmonisch liegt gegen die in die Ebene fallenden Mantellinien des Kegels, so ist der geometrische Ort der Geraden eine Ebene, und zwar die dem Durchmesser zugeordnete Diametralebene. Oder vermöge des ersten Satzes in Nr. 279 gilt: Je zwei Gegenseiten eines

---

* Durch weitere Reductionen kann man als Ersatz für das einbeschriebene Sechseck die Seiten eines Vierecks und die Tangenten in zweien seiner Ecken, oder die Seiten eines Dreiecks und die Tangenten in seinen drei Ecken erhalten, — als Ersatz für das umbeschriebene Sechseck die Ecken eines Vierecks und die Berührungspunkte zweier Seiten desselben, oder die Ecken eines Dreiecks und die Berührungspunkte seiner drei Seiten. Jedem solchen Falle entspricht ein Satz.

** Der hier citirte Beweis ist unabhängig von den besondern Bedeutungen, welche in der Figur auf S. 194 die das Sechseck bestimmenden Punkte haben.

in eine Kegelfläche zweiter Ordnung beschriebenen Sechskants schneiden sich auf einer Diametralebene.

281. Drei Gerade, welche sich in den Punkten A, B, C begegnen, sollen so liegen, daß sie zugleich einen gegebenen Kegelschnitt schneiden. Wird der Kegelschnitt von der AB in C', C'', von der BC in A', A'', von der CA in B', B'' getroffen, so ist immer

$$\frac{AB'\cdot AB''}{AC'\cdot AC''}\cdot\frac{BC'\cdot BC''}{BA'\cdot BA''}\cdot\frac{CA'\cdot CA''}{CB'\cdot CB''}=1.$$

Beweis. Zieht man die Geraden A'B'', B'C'', C'A'', welche beziehungsweise die AB, BC, CA in den Punkten C_0, A_0, B_0 schneiden, so hat man, insofern das Dreieck ABC von jeder der drei erstgenannten Geraden durchkreuzt erscheint (Nr. 230, **):

$$AB''\cdot CA'\cdot BC_0 = AC_0\cdot BA'\cdot CB''$$
$$BC''\cdot AB'\cdot CA_0 = BA_0\cdot CB'\cdot AC''$$
$$CA''\cdot BC'\cdot AB_0 = CB_0\cdot AC'\cdot BA''$$

woraus folgt

$$\frac{AB'\cdot AB''}{AC'\cdot AC''}\cdot\frac{BC'\cdot BC''}{BA'\cdot BA''}\cdot\frac{CA'\cdot CA''}{CB'\cdot CB''}=\frac{AC_0\cdot BA_0\cdot CB_0}{AB_0\cdot CA_0\cdot BC_0}.$$

Da aber die Strecken A'B'', B'C'', C'A'' Seiten eines in den Kegelschnitt beschriebenen Sechsecks sind, denen die auf AB, BC, CA liegenden Strecken C'C'', A'A'', B'B'' als Gegenseiten entsprechen, so fallen die drei Punkte C_0, A_0, B_0 in eine Gerade (Nr. 279, 1), und insofern man das Dreieck ABC auch von dieser Geraden geschnitten sieht, ist die rechte Seite obiger Gleichung = 1.

Der Satz kann auch, unter Benützung eines an sich bemerkenswerthen Hülfssatzes, unmittelbar aus einer der bekanntesten Eigenschaften des Kreises hergeleitet werden. Dieser Hülfssatz lautet: Sind C', A', B' drei beliebige Punkte auf den Seitenlinien AB, BC, CA eines Dreiecks, so ändert sich das Verhältniß AB'. CA'. BC' : AC'. BA'. CB' nicht, wenn man die Figur beliebig (central oder parallel) projicirt und die sechs Buchstaben A, A'.... auf die Projectionen der ursprünglichen Punkte bezieht. Er bedarf für den besondern Fall, wo C', A', B' in gerader Linie liegen, keines Beweises; trifft aber die A'B' die AB nicht in C', sondern in 𝔊', so findet sich der Werth

$$\frac{A\mathfrak{G}'}{B\mathfrak{G}'}:\frac{AC'}{BC'}\quad\text{oder}\quad\frac{BC'.A\mathfrak{G}'}{AC'.B\mathfrak{G}'}$$

in allen Projectionen der Figur unverändert wieder (Nr. 277, 3), und wenn man diesen unveränderlichen Werth durch k_1 bezeichnet, ergibt sich aus den beiden Relationen

$$\frac{AB'.CA'.B\mathfrak{C}'}{A\mathfrak{C}'.BA'.CB'}=1 \quad \text{und} \quad \frac{BC'.A\mathfrak{C}'}{AC'.B\mathfrak{C}'}=k_1$$

die neue, zugleich für jede Projection der Figur giltige Relation

$$\frac{AB'.CA'.BC'}{AC'.BA'.CB'}=k_1.$$

Ebenso hat man, wenn auf AB, BC, CA drei andere Punkte C'', B'', A'' beliebig angenommen werden,

$$\frac{AB''.CA''.BC''}{AC''.BA''.CB''}=k_2,$$

und hieraus

$$\frac{AB'.AB''}{AC'.AC''}\cdot\frac{BC'.BC''}{BA'.BA''}\cdot\frac{CA'.CA''}{CB'.CB''}=k_1k_2=K.$$

Wählt man aber die drei Punktpaare C', C'', A', A'', B' B'' auf den Dreiecksseiten nicht ganz willkürlich, sondern läßt sie dadurch entstehen, daß man diese Seiten durch einen Kreis schneidet, so ist jeder der drei Brüche, welche in der letzten Gleichung als Hauptfactoren erscheinen, = 1, folglich auch K = 1, und dieser Werth des Produkts bleibt, wenn man, nachdem die ganze Figur beliebig projicirt ist, die neun Buchstaben A, A', ... auf die Projectionen der ursprünglichen Punkte bezieht. *

† Aendert von den drei beliebigen Geraden AB, BC, CA, welche einen gegebenen Kegelschnitt schneiden, die eine, BC, ihre Lage durch Drehung um B so, daß der Winkel ACB immer abnimmt und die Entfernungen AC, BC fortwährend wachsen, so kann man die Werthe der Verhältnisse CA' : CB' und CA'' : CB'' dem Werthe 1 so nahe bringen als man nur will. Demnach ist man berechtigt, für jedes dieser Verhältnisse den Werth 1 einzusetzen, wenn C in unendlicher Entfernung verschwunden, d. h. B'B'' || A'A'' geworden ist. Für diesen besondern Fall gilt also die Gleichung

$$\frac{AB'\cdot AB''}{AC'\cdot AC''}=\frac{BA'\cdot BA''}{BC'\cdot BC''}.$$

Wird nun mit C'C'' eine beliebige Parallele gezogen, welche den Kegelschnitt in $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}''$, die B'B'' in $\mathfrak{A}$, die A'A'' in $\mathfrak{B}$ trifft, so findet man (der letzten Gleichung zufolge) auch

$$\frac{AB'\cdot AB''}{AC'\cdot AC''}=\frac{\mathfrak{B}A'\cdot\mathfrak{B}A''}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}'\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}''}$$

und hierin liegt der Satz: Schneiden irgend zwei Sehnen C'C'', B'B'' eines Kegelschnitts sich (verlängert oder nicht) in A, so bleibt

---

* Daß auch dann K = 1 wird, wenn die Punkte C', C'', A', A'', B', B'' die Schnitte der AB, BC, CA durch zwei Gerade bedeuten, folgt unmittelbar aus dem Satze in Nr. 230, **.

der Werth $\frac{AB' \cdot AB''}{AC' \cdot AC''}$

ungeändert, wenn man beide parallel verschiebt.

Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so kann man die Punkte C'' und 𝔈'' in sehr große Entfernung fallen machen, wenn man die Geraden C'C'' und 𝔈'𝔈'' nahezu parallel zur Axe nimmt. Nach Umformung der letzten Gleichung in

$$\frac{AB' \cdot AB''}{AC'} = \frac{\mathfrak{B}A' \cdot \mathfrak{B}A''}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}'} \cdot \frac{AC''}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}''}$$

und unter Berücksichtigung, daß der Verhältnißwerth AC'' : 𝔅𝔈'' immer näher an 1 kommt, je größer AC'' und 𝔅𝔈'' werden, findet man: So lange AC' ein Durchmesser der Parabel und die Parabelsehne B'B'' sich parallel bleibt, behält der Ausdruck $\frac{AB' \cdot AB''}{AC'}$ unveränderten Werth.

Die obigen Resultate enthalten als besondere Fälle die auf conjugirte Durchmesser bezogenen Gleichungen der Kegelschnitte (Nr. 244—246) in sich.

Zusatz. Bilden die in A zusammentreffenden Sehnen B'B'', C'C'' eines Kegelschnitts gleiche Winkel mit einer Axe desselben (ohne parallel zu sein), so kann durch die vier Punkte B', B'', C', C'' ein Kreis gelegt werden. Denn zieht man durch einen Punkt 𝔅 der Axe die Sehnen A'A'', 𝔈'𝔈'' parallel zu den vorigen, so sind die Stücke 𝔅A', 𝔅A'' den Stücken 𝔅𝔈', 𝔅𝔈'' gleich, also

$$\frac{\mathfrak{B}A' \cdot \mathfrak{B}A''}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}' \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{C}''} = 1, \quad \text{mithin auch} \quad \frac{AB' \cdot AB''}{AC' \cdot AC''} = 1,$$

oder

$$AB' \cdot AB'' = AC' \cdot AC''.$$

Hieraus folgt, daß die in Nr. 238 für die Ellipse angegebene Construction des Krümmungsmittelpunkts auch für die übrigen Kegelschnitte gilt.

Drehungsflächen.

282. Denkt man eine gerade oder krumme Linie L mit einer Geraden A auf irgend eine Weise in unveränderliche Verbindung gesetzt und nur die Gerade A festgehalten, so ist das ganze System noch einer Bewegung um A fähig, bei welcher die L eine Fläche beschreibt. Eine solche Fläche heißt Drehungsfläche (Rotationsfläche), die Gerade A die Drehungs-

are, die Linie L die Erzeugende der Fläche. Der Schnitt, den eine durch die Drehungsare geführte Ebene auf der Fläche hervorbringt, wird ein Meridian der Fläche genannt.

Eine zuerst in die Augen springende Eigenschaft der Drehungsflächen ist die, daß jeder Punkt der Erzeugenden einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt auf der Drehungsare liegt und dessen Halbmesser der Abstand des Punktes von der Drehungsare ist. Die Ebene dieses Kreises ist senkrecht auf der Drehungsare, woraus umgekehrt folgt, daß jede zur Drehungsare senkrechte Ebene die Drehungsfläche nach einem Kreise schneidet (oder auch nach mehreren concentrischen Kreisen). Jeder solche Kreis heißt ein Parallelkreis.

Legt man durch die Drehungsare beliebig zwei Ebenen, so schneidet jede derselben die verschiedenen Parallelkreise in Punkten, welche einem Meridiane angehören. In jedem einzelnen Parallelkreise mißt der Bogen zwischen beiden Meridian-Ebenen den Neigungswinkel derselben; wenn daher dieser Bogen in dem einen Parallelkreise Null wird, so ist er zugleich in allen andern Parallelkreisen Null, d. h. wenn die eine Meridian-Ebene so weit gedreht wird, daß ein Punkt der Meridiancurve in den auf demselben Parallelkreise liegenden Punkt der andern Meridiancurve fällt, so fallen beide Meridiancurven selbst ganz zusammen. Alle Meridiane einer Drehungsfläche sind also congruent.

Ist der Meridian einer Drehungsfläche nicht unmittelbar als Erzeugende gegeben, so kann er als eine neue Erzeugende gelten. Ueberhaupt kann man irgend eine auf der Drehungsfläche gezogene Linie, welche alle Parallelkreise schneidet, an die Stelle der ursprünglichen Erzeugenden setzen; oder jede Drehungsfläche läßt unendlich viele Erzeugende zu.

So kann z. B. die Fläche eines geraden Cylinders erzeugt werden durch die verlängerte Seite eines Parallelogramms, das sich um die Gegenseite dreht; aber auch durch Drehung einer Schraubenlinie um ihre Are.

† Wird die Erzeugende (und also die Drehungsfläche selbst) von der Are geschnitten, so muß auch jede neue Erzeugende durch den Schnittpunkt gezogen werden. Hat die Are keinen Punkt mit der Fläche gemein, so kann zwar eine Lage der ursprünglichen Erzeugenden von einer Lage einer neuen Erzeugenden geschnitten werden, niemals aber können zwei Lagen einer und derselben Erzeugenden einen Punkt

gemeinschaftlich haben; denn während irgend ein Punkt der Erzeugenden einen Kreisbogen beschreibt, muß jeder andere ihrer Punkte einen zweiten Kreisbogen durchlaufen, der den nämlichen Centriwinkel hat wie der erste. (Selbst wenn man den ersten Kreisbogen unendlich klein nimmt, wird der zweite nicht Null, sondern ebenfalls unendlich klein.)

283. Die Axe einer Drehungsfläche ist Symmetralaxe für den Meridian; denn sie halbirt die in die Meridianebene fallenden Durchmesser aller Parallelkreise senkrecht.

Soll daher die Fläche durch den Meridian erzeugt werden, so reicht immer eine seiner symmetrischen Hälften aus.

Jede Meridian-Ebene einer Drehungsfläche ist Symmetral-Ebene für jeden einzelnen Parallelkreis, also auch für die Fläche selbst.

Ist eine Drehungsfläche so beschaffen, daß sie außerdem noch die Ebene eines Parallelkreises als Symmetralebene hat, so erhält dieser Parallelkreis den Namen Aequator.

In die Aequatorial-Ebene können auch mehrere Parallelkreise fallen. Dreht sich z. B. ein Kreis um eine Gerade, welche in seiner Ebene liegt ohne ihn zu treffen, so gibt es für die erzeugte Fläche einen äußern und einen innern Aequatorialkreis. (Die Fläche selbst heißt ein Wulst.)

284. Die Erzeugende L einer Drehungsfläche sei in einer beliebigen Lage gedacht und durch die Drehungsaxe eine beliebige Ebene M gelegt. Bildet man eine Linie L′, welche mit L symmetrisch gegen die Ebene M liegt, so muß die L′ ganz auf die Drehungsfläche fallen (Nr. 283), kann also als eine neue Erzeugende genommen werden; dabei könnte die L′ nur dann mit einer Lage der bewegten L übereinkommen, wenn die L ein Meridian wäre, was hier nicht vorausgesetzt sein soll. Wird nun die L festgehalten, während die L′ sich bewegt, so ist jede neue Lage der L′ wieder symmetrisch mit L gegen eine neue Meridianebene M_0; denn bei der ersten Lage der L′ halbirt die Ebene M nicht nur die auf ihr senkrechten Flächensehnen zwischen L und L′, sondern auch jeden Parallelkreisbogen zwischen denselben Grenzen, und da bei der Bewegung der L′ die Centriwinkel dieser Bögen um gleichviel wachsen oder abnehmen, so müssen die Halbirungspunkte der neuen Bögen wieder in einer Meridianebene M_0 liegen. Man kann die Ebene M_0 willkürlich wählen und die entsprechende Lage der L′ darnach

bestimmen; schneidet dabei die M_0 die L in einem Punkte P, so muß auch die entsprechende Lage der L′ durch P gehen; bewegt die L′ sich stetig weiter, während die L in Ruhe bleibt, so dreht sich die M_0 um die Axe und der Punkt P läuft stetig auf der L fort. Hieraus folgt: Ist die L so gestaltet, daß sie von allen Meridianebenen der Fläche geschnitten werden kann, so wird jede Lage der L von allen möglichen Lagen der L′ geschnitten; und umgekehrt.

285. Für die graphische Darstellung einer Drehungsfläche ist es am zweckmäßigsten, die HE senkrecht zur Drehungsaxe anzunehmen, so daß die H-Spur der letztern zugleich ihre H-Projection ist. Daraus fließen folgende Vortheile: 1) Jeder Parallelkreis hat zur H-Projection einen Kreis, dessen Mittelpunkt in die Spur der Drehungsaxe fällt und dessen Halbmesser dem Halbmesser des wahren Parallelkreises gleich ist. 2) Die V-Projection jedes Parallelkreises ist eine zum Grundschnitt parallele Gerade, welche an Länge dem Durchmesser des Parallelkreises gleichkommt und von der V-Projection der Drehungsaxe senkrecht halbirt wird. 3) Die H-Projection jedes Meridians ist eine Gerade, welche durch die H-Spur der Drehungsaxe geht. — Im Nachfolgenden wird diese Wahl des Grundsystems immer beobachtet werden.

Derjenige Meridian, welcher parallel zur VE ist und sich also auf letzterer unverändert projicirt, heißt der Hauptmeridian, und seine V-Projection ist zugleich der verticale Umriß der Fläche. Einen horizontalen Umriß erhält man als H-Projection eines größten oder eines kleinsten Parallelkreises, falls solche Parallelkreise überhaupt vorhanden sind.

Wenn die in einerlei Sinn aufeinanderfolgenden Parallelkreise fortwährend wachsen oder fortwährend abnehmen, so hat die Drehungsfläche keinen horizontalen Umriß. — Ein Parallelkreis heißt in relativem Sinne ein größter oder kleinster, wenn er größer oder kleiner ist als diejenigen, welche zu beiden Seiten seiner Ebene ihm zunächstliegen. — Ein Aequator ist immer ein größter oder kleinster Parallelkreis.

Ein kleinster Parallelkreis führt auch den Namen Kehlkreis.

286. **Aufg.** Eine Drehungsfläche hat (o, o′o″) zur Axe und (vuw, v′u′w′) zur Erzeugenden. Man soll für einen Punkt der Fläche, dessen eine Projection gegeben ist, den Parallelkreis projiciren. Fig. 95. 96.

Aufl. Ist die H=Projection a des Punktes gegeben, so findet man zuerst die H=Projection des Parallelkreises als einen mit oa um o beschriebenen Kreis. Dieser schneidet die vuw in einem Punkte b, zu welchem man als V=Projection den Punkt b′ erhält. Die V=Projection des Parallelkreises fällt in die durch b′ gehende Parallele mit dem Grundschnitt.

Ist die V=Projection a′ gegeben, so zieht man durch sie eine Parallele zum Grundschnitt, sucht die zu b′ gehörige H=Projection b, beschreibt mit ob einen Kreis um o und bestimmt die Grenzen für die V=Projection des Parallelkreises mittels der Größe ob.

† Sind im erstern Falle zu b mehrere V=Projectionen möglich, so gibt es mehrere Parallelkreise, welche einerlei H=Projection haben.

Können im zweiten Falle zu b′ mehrere H=Projectionen gehören, so schneidet eine zur Drehungsaxe senkrechte Ebene die Drehungsfläche in mehreren concentrischen Parallelkreisen.

287. Aufg. Zu der einen Projection eines auf einer gegebenen Drehungsfläche liegenden Punktes die zweite Projection zu finden.

Aufl. Man projicire den durch den Punkt gehenden Parallelkreis (Nr. 286) und bestimme die zweite Projection mittels einer Senkrechten zum Grundschnitt.

Aus Nr. 286, † folgt, daß man zur gegebenen Projection zuweilen mehrere zweite Projectionen finden kann, oder daß mehrere Punkte der Fläche eine gemeinschaftliche Projection haben können.

Fig. 96. **288. Aufg.** Die Axe einer Drehungsfläche ist (o, o′o″), die Erzeugende (vuw, v′u′w′); man verlangt die Projectionen derjenigen Lage der Erzeugenden, welche durch den in **b** projicirten Punkt der Fläche geht.

Aufl. Beschreibt man um o einen Kreis mit ob, welcher die vuw in b schneidet, so ist bb die Größe des Bogens, welchen der Punkt B der Erzeugenden durchlaufen muß, damit er in die Lage **B** komme. Um nun zu finden, wohin andere Punkte der Erzeugenden fallen, wenn diese die vorgeschriebene neue Lage eingenommen hat, ziehe man durch o eine beliebige Gerade ovw, und eine zweite o𝔳𝔴 so, daß arc. I1 = arc. bb, beschreibe um o Kreise, welche die vuw in verschiedenen Punkten u, t,.. schneiden, mache arc. t2 = arc. tII, arc. u3 = arc. uIII, ...; dann ist

die stetige Curve vtu...w die H-Projection für die neue Lage der Erzeugenden, und ihre V-Projection ergibt sich, wenn man die zu v, t, u,...w gehörigen V-Projectionen sucht (vgl. Nr. 287) und verbindet.

In besondern Fällen wird die Auflösung einfacher. So ist z. B. in Fig. 96 die H-Projection der Erzeugenden ein Halbkreis, dessen Durchmesser vw durch o geht;* daher erhält man ihre neue Lage leicht dadurch, daß man die Lage von ovw wie vorhin bestimmt, ov = ov, ow = ow macht und über vw einen Halbkreis beschreibt.

Noch einfacher verhält sich's, wenn die Erzeugende eine Gerade ist, wie in Fig. 97. (S. Nr. 292.)

289. Aufg. Den Meridian einer gegebenen Drehungsfläche zu projiciren, welche durch einen gegebenen Punkt derselben geht.

Aufl. Ist (o, o′o″) die Drehungsaxe, (vuw, v′u′w′) die Erzeugende, c die H-Projection des Punktes, für welchen der Meridian gesucht werden soll, so ist die Gerade oc die H-Projection des letztern. Sucht man für verschiedene Punkte in dieser Geraden die zugehörigen V-Projectionen (Nr. 287) und verbindet sie stetig, so hat man auch die V-Projection des Meridians. Fig. 96.

290. Aufg. Den verticalen Umriß einer Drehungsfläche zu zeichnen, deren Axe und Erzeugende gegeben sind.

Aufl. Diese Aufgabe ist nur ein besonderer Fall der vorigen, indem der verticale Umriß die V-Projection des Hauptmeridians ist; die H-Projection des Hauptmeridians ist aber parallel zum Grundschnitt.

Zusatz. Kennt man die V-Projectionen für eine Reihe von Lagen der Erzeugenden, welche den Hauptmeridian schneiden, so ergibt sich der verticale Umriß als Umhüllungscurve der letztern (vgl. Nr. 220).

Liegt nämlich auf der Fläche eine Curve C so, daß sie den Hauptmeridian in einem Punkte P schneidet, so muß die V-Projection der Curve den verticalen Umriß der Fläche in p′ berühren. Denn zieht man in P Tangenten an den Hauptmeridian,

---

* Die Erzeugende selbst ist ein halber Umgang einer Schraubenlinie, deren Axe der Drehungsaxe parallel liegt. Die erzeugte Fläche ist daher nur als ein Stück einer unendlich ausgedehnten Fläche zu betrachten, deren Erzeugende die vollständige Schraubenlinie ist, und welche in unendlich viele solche (unter sich congruente) Stücke zerlegt werden kann.

die Curve C und den durch P gehenden Parallelkreis, so liegen die drei Tangenten in einerlei Ebene (Nr. 260); diese aber ist die gemeinschaftliche v-projicirende Ebene der zwei ersten Tangenten, da die dritte senkrecht zur VE steht. *

291. Uebungsaufgabe. Eine bestimmte Ellipse dreht sich um ihre große Axe, welche (geneigt gegen die G-Ebenen) durch ihre Projectionen gegeben ist. Man projicire 1) den Meridian, der in eine projicirende Ebene der Axe fällt; 2) einen Parallelkreis; 3) einen beliebigen zweiten Meridian.

292. Zum Schlusse dieser allgemeinen Betrachtungen über Drehungsflächen soll noch diejenige Fläche etwas näher untersucht werden, deren Erzeugende eine Gerade ist, welche mit der Drehungsaxe nicht in einerlei Ebene liegt. Diese Fläche gehört — wie sich später (S. 257) zeigen wird — zu denjenigen Flächen, welche man Hyperboloide nennt, weil sie mit Hülfe einer Hyperbel erzeugt werden können.

Fig. 97. Die Erzeugende und die Drehungsaxe (o, o′o″) denke man sich durch eine Gerade OT verbunden, welche beide senkrecht schneidet. Da diese die kürzeste Entfernung zwischen beiden Linien angibt, so ist sie der Halbmesser des kleinsten Parallelkreises. Ist die Erzeugende in einer zur VE parallelen Lage (Vw, v′w′) gegeben, so ist die V-Projection jener kürzesten Entfernung der Punkt o′; die H-Projection ist die auf Vw senkrechte ot, und die H-Projection des kleinsten Parallelkreises ist der mit ot um o beschriebene Kreis. Dieser kleinste Parallelkreis ist der Aequator der Fläche; denn zwei Ebenen, die man oberhalb und unterhalb des Punktes (o, o′) in einerlei Abstand von ihm annimmt, schneiden die Fläche in gleichen Parallelkreisen, was sich folgendermaßen beweisen läßt. Liegt o′ in der Mitte der Parallelen v′m′, w′n′, welche die Richtungen für die V-Projectionen zweier Parallelkreise VM, WN vorstellen, so ist o′v′ = o′w′, also auch tV = tw und oV = ow; die mit oV und ow beschriebenen Kreise fallen demnach in einen zusammen, oder die von den Punkten (V, v′) und (w, w′) erzeugten Parallelkreise VM und WN haben einerlei H-Projection, sind folglich gleich.

Die H-Projection ktl des Aequators kann als ein innerer hori-

---

* Nur wenn die Tangente der C mit der dritten zusammenfällt, wird ausnahmsweise die V-Projection der C, welche dann entweder in p′ einen Rückkehrpunkt hat oder in allen ihren Punkten doppelt gilt, auf den Umriß stoßen ohne ihn zu berühren.

zontaler Umriß des Hyperboloids angesehen werden; ein äußerer ist wegen der unendlichen Ausdehnung der Fläche nicht möglich.

Während sich die Erzeugende (sammt der Linie OT) um die Axe (o, o′o″) dreht, bleibt die Projection des rechten Winkels VTO immer ein rechter Winkel, indem der Schenkel OT immer parallel zur HE bleibt; daher wird die H-Projection des Aequators von den H-Projectionen aller möglichen Lagen der Erzeugenden berührt. Jede Lage der Erzeugenden heißt eine Mantellinie.

Der mit oV um o beschriebene Kreis ist die H-Spur oder der Grundkreis des Hyperboloids und zugleich die H-Projection des Parallelkreises WN, welcher der Deckkreis heißen mag. Betrachtet man nun den Punkt S als die H-Spur irgend einer Lage der Erzeugenden oder einer Mantellinie, so erhält man die H-Projection dieser Mantellinie, wenn man eine Tangente an die H-Projection des Aequators zieht. Von S aus sind aber an diesen Kreis zwei Tangenten möglich, und nur eine derselben ist brauchbar, diejenige nämlich (Sr), welche auf der H-Projection des Deckkreises vom Punkte w aus einen dem Bogen VS gleichen Bogen wr abschneidet; denn es ist klar, daß der Punkt V im Grundkreise und der Punkt W im Deckkreise immer gleiche Bögen gleichzeitig zurücklegen. (Wenn daher der Punkt S bis in den Punkt w fortrückt, so kann Sr nicht mit wV zusammenfallen, sondern nimmt die Lage der zweiten Tangente ein, welche man von w aus noch außer der wV an den Kreis ktl ziehen kann.) Die zu Sr gehörige V-Projection s′r′ ist leicht anzugeben, indem die V-Projection von S in den Grundschnitt und die V-Projection von R in w′n′ fallen muß.

Da (wie eben bemerkt) arc. wr = arc. VS, so läßt sich Sr ziehen, wenn auch die H-Projection ktl des Aequators nicht gezeichnet ist; man darf nur von V und w aus auf dem Grundkreise zwei gleiche Bögen nach einerlei Richtung hin abschneiden und die Endpunkte S, r dieser Bögen verbinden. Gibt man diesen beiden gleichen Bögen nach und nach immer größere Werthe und sucht zu den verschiedenen Lagen der Verbindungslinie Sr die entsprechenden V-Projectionen, so gewährt der Inbegriff der auf diese Weise projicirten Mantellinien ein Bild des Hyperboloids selbst (s. Fig. 98).

Kann man die Lage der Erzeugenden beliebig wählen, so erhält man eine gefällige Figur dadurch, daß man zuerst den Grundkreis beschreibt, ihn in gleiche Theile theilt und die Verbindungslinie irgend zweier Theilpunkte als die H-Projection der Erzeugenden betrachtet. Eine solche Annahme liegt der Fig. 98 zu Grunde, deren Ent-

stehung wohl keiner weitern Erläuterung bedarf. Dabei ergibt sich die H=Projection des Aequators als Umhüllungscurve für die H=Projectionen und der verticale Umriß als Umhüllungscurve für die V=Projectionen der Mantellinien.

So wenig die Lage VW der Erzeugenden von irgend einer zweiten Lage geschnitten werden kann (Nr. 282, †), so wenig kann es eine ihr parallele Lage geben; denn die Lage, deren H=Projection Sr parallel zu Vw ist, projicirt sich auf die VE nicht nach v′w′, sondern nach der Linie m′n′, welche mit v′w′ symmetrisch gegen o′o″ liegt. Diese Linie m′n′ kann aber zugleich als V=Projection einer in der h=projicirenden Ebene der VW enthaltenen Geraden MN angesehen werden, welche mit VW symmetrisch gegen die Meridianebene OT liegt, also auf die Drehungsfläche fällt und als eine neue Erzeugende zu benützen ist (Nr. 284). Da nun die erste Erzeugende VW von jeder Meridian=Ebene geschnitten wird (nur von der ihr parallelen AOB in unendlicher Entfernung), so wird sie von jeder Lage der neuen Erzeugenden geschnitten, wobei auch (unter Annahme eines unendlich fernen Schnittpunkts) die ihr parallele Lage (rS, v′w′) mitbegriffen ist.

† Soll zu einem auf dem Hyperboloide liegenden Punkte, dessen H=Projection q ist, die V=Projection gesucht werden, so kann man an die Stelle des in Nr. 287 angegebenen Verfahrens auch das folgende setzen.

Fig. 97. Man zeichne die H=Spur (den Grundkreis VSM) des Hyperboloids und die H=Projection ktl des Aequators; an letztere ziehe man von q aus eine Tangente rqS; diese Tangente stellt die H=Projection zweier Mantellinien (nämlich einer Lage der ersten und einer Lage der zweiten Erzeugenden) dar, welche in S und r ihre H=Spuren haben und den Deckkreis in zwei Punkten schneiden, deren H=Projectionen in die Punkte r und S fallen. Die V=Projectionen s′r′, σ′ϱ′ dieser Mantellinien (welche sich bei richtiger Zeichnung auf k′l′ schneiden müssen) werden von einer aus q auf den Grundschnitt gefällten Senkrechten in den Punkten q′ und q″ getroffen, von denen jeder als die zu q gehörige V=Projection des Flächenpunktes gelten kann.

Von q aus ist an den Kreis ktl noch eine zweite Tangente Vqw möglich, auf welche sich das für Sqr beobachtete Verfahren ebenfalls anwenden läßt; durch Benützung dieser zweiten Tangente muß man aber offenbar wieder auf die vorigen Punkte q′, q″ kommen.

†† Da sich bei der hier betrachteten Fläche die verschiedenen Lagen der Erzeugenden so leicht projiciren lassen, so kann man diese auch (statt der

Parallelkreise, auf welche in Nr. 289 verwiesen ist) zur Construction des verticalen Umrisses benützen; die V-Projection p′ des Punktes P, wo eine Mantellinie SR die Ebene des Hauptmeridians AOB schneidet, gehört dem Umriß an, und zugleich ist die s′r′ Tangente des Umrisses in p′ (vgl. Nr. 290, Zus.). Dabei zeigt sich, daß die Linien v′w′, m′n′ Asymptoten des Umrisses sind.

Der verticale Umriß selbst (oder die Meridiancurve) ist eine Hyperbel.

Dieß läßt sich in folgender Art beweisen. Sind c, c′ die Projectionen eines im Hauptmeridian beliebig liegenden Punktes C, so ist die Tangente cd des Kreises ktl die H-Projection einer durch C gehenden Mantellinie, also d′c′ die V-Projection derselben. In dem rechtwinkeligen Dreieck, welches sich auf die VE in c′d′e′ projicirt, ist der Winkel bei D die H-Neigung der Mantellinie, also = n′t′k′. Die beiden Katheten dieses Dreiecks (von denen die eine die Größe ihrer H-Projection cd, die andere die Größe ihrer V-Projection e′c′ hat) verhalten sich demnach = t′k′ : k′f′ (wo k′f′ ⊥ k′l′), oder es ist, wenn man den Halbmesser des Aequators durch α, das Stück k′f′ durch β, t′e′ durch x und e′c′ durch y bezeichnet:

$$cd : y = \alpha : \beta$$

$$y = \frac{\beta}{\alpha} . cd$$

oder (da $cd^2 = oc^2 - od^2 = x^2 - \alpha^2$)

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2}$$

welche Gleichung in

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

umgeformt werden kann. Diese Gleichung zeigt aber, daß c′ auf einer Hyperbel liegt, deren reelle Axe k′l′ und deren imaginäre Axe o″o″ ist (vgl. Nr. 228). Zugleich bestätigt sich, daß die Asymptoten dieser Hyperbel keine andern Linien sein können als v′w′ und m′n′.

Die in v′w′ und m′n′ v-projicirten Asymptoten des Hauptmeridians sind den Mantellinien VW, MN parallel. Wäre also ursprünglich der Meridian der Drehungsfläche gegeben gewesen und sollten die geradlinigen Erzeugenden nachträglich gefunden werden, so hätte man im Mittelpunkt O der Meridianhyperbel eine auf ihrer Ebene Senkrechte OT zu errichten, die Länge OT gleich der reellen Halbaxe zu nehmen und durch T Parallelen mit den Asymptoten zu legen. — Man kann sich diese Parallelen in unveränderlicher Verbindung (mittels OT) mit den Asymptoten und der Hyperbel selbst denken und das so zusammengesetzte Gebilde als Ganzes in Drehung setzen; dann bleiben die Asymptoten

immer den successiven Lagen der beiden Erzeugenden parallel; sie selbst beschreiben einen geraden Kegel, dessen Mäntel sich dem durch den Meridian beschriebenen Hyperboloid ohne Ende nähern, und welcher der asymptotische Kegel des letztern heißt.

* Die bisher gefundenen Resultate lassen sich wie folgt zusammenfassen.

Auf der Fläche, welche durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre imaginäre Axe entsteht, sind zwei Systeme von Geraden möglich. Je zwei Gerade eines und desselben Systems können nie in einerlei Ebene liegen; dagegen schneidet jede Gerade des einen Systems alle Geraden des andern (darunter eine in unendlicher Entfernung). Durch jeden Punkt des Hyperboloids kann man eine Gerade des einen Systems und eine Gerade des andern Systems ziehen.

Zu jeder Mantellinie des von den Asymptoten beschriebenen Kegels lassen sich zwei Parallellinien auf dem Mantel des Hyperboloids ziehen; und umgekehrt: zu jeder Mantellinie des Hyperboloids läßt sich eine Parallele auf dem Mantel des asymptotischen Kegels finden.

Ferner sieht man, daß irgend drei zu einerlei System gehörige Mantellinien des Hyperboloids nie einer und derselben Ebene parallel sein können; denn wäre dieß der Fall, so müßten drei Mantellinien des asymptotischen Kegels (nämlich diejenigen, welche den erwähnten Mantellinien des Hyperboloids parallel sind) in einerlei Ebene liegen, und ihre H-Spuren auf einer zur Axe senkrechten Ebene (d. h. drei Punkte der kreisförmigen Kegelspur) würden dann in gerader Linie liegen, was nicht möglich ist.

Rückungsflächen.

293. Wenn eine ebene Curve, sich selbst congruent oder ähnlich bleibend, ihre Lage so ändert, daß ihre Ebene stets mit ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt, während ihre Bewegung noch außerdem an irgend ein bestimmtes Gesetz gebunden ist, von welchem zugleich die Aenderung ihrer Dimensionen abhängt, so beschreibt die Peripherie eine krumme Fläche, welche man eine Rückungsfläche nennen kann. Die fortrückende Curve heißt die Erzeugende.

So läßt sich z. B. jede Drehungsfläche auch als Rückungsfläche denken, indem sie durch einen Kreis entsteht, dessen Mittelpunkt in der Drehungsaxe fortschreitet, während seine Ebene senkrecht zu dieser bleibt und sein Durchmesser sich so ändert, daß er stets von der Peripherie des Meridians begrenzt wird.

Bleiben zwei Punkte einer constanten Erzeugenden in zwei parallelen Geraden, so beschreibt auch jeder andere Punkt eine Gerade, welche mit den beiden vorigen parallel läuft, und die Rücknngsfläche ist eine Cylinderfläche.

Ist die Erzeugende durch n Punkte bestimmt, so kann man als Rückungsfläche eine Kegelfläche erhalten, wenn man irgend n Punkte der (veränderlichen) Erzeugenden in n Geraden fortschreiten läßt, welche sich in einem Punkte schneiden.

Flächen zweiter Ordnung.

294. Durch parallele Rückung der Linien zweiter Ordnung kommen diejenigen krummen Flächen zum Vorschein, welche man Flächen zweiter Ordnung nennt.

Die hieher gehörige Kegelfläche ist bereits früher (Nr. 273—280) zur Betrachtung gekommen. Die Cylinderflächen der zweiten Ordnung zerfallen in drei Arten, indem die ursprüngliche Leitende (welche unter dem neuen Gesichtspunkte zur Erzeugenden der durch Rückung gebildeten Fläche wird) eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein kann.

Außerdem gibt es noch die folgenden Flächen zweiter Ordnung.

1) Ein Ellipsoid entsteht, wenn eine veränderliche Ellipse sich so bewegt, daß ihre Ebene senkrecht auf der einen Axe einer festen Ellipse bleibt, die Endpunkte ihrer einen Axe in der Peripherie der festen Ellipse fortlaufen und ihre beiden Axen ein gegebenes Verhältniß zu einander behalten (so daß also die Ellipse sich fortwährend ähnlich bleibt). — Die bewegliche Ellipse hat ihre größte Ausdehnung, wenn ihr Mittelpunkt in den Mittelpunkt der festen Ellipse fällt.

Geht die bewegliche Ellipse in einen Kreis über, so ist die erzeugte Fläche ein Drehungs-Ellipsoid, indem sie durch Drehung einer Ellipse um eine ihrer Axen entstehen kann. Ist zugleich auch die feste Ellipse ein Kreis, so entsteht als besonderer Fall des Ellipsoids die Kugel.

2) Ein Hyperboloid mit **einem** Mantel wird auf dieselbe Art wie das Ellipsoid erzeugt; man hat blos an die Stelle der festen Ellipse eine feste Hyperbel zu setzen, auf deren imaginärer Axe die Ebene der erzeugenden Ellipse senkrecht bleibt. Dabei erhält letztere ihre geringste Ausdehnung, wenn ihr Mittelpunkt in den Mittelpunkt der

Hyperbel fällt. Ist die erzeugende Ellipse ein Kreis, so hat man das einmantelige Drehungs-Hyperboloid, welches sich durch Drehung einer Hyperbel um die imaginäre Axe bilden kann und schon in Nr. 292 betrachtet wurde.

Läßt man aber die Ebene der erzeugenden Ellipse auf der Richtung der reellen Hyperbelaxe senkrecht bleiben, so ist die erzeugte Fläche

3) ein Hyperboloid mit zwei Mänteln. — Falls die erzeugende Ellipse ein Kreis ist, kann die Fläche auch durch Drehung einer Hyperbel um ihre reelle Axe beschrieben werden.

4) Ein elliptisches Paraboloid erhält man auf ähnliche Weise wie ein Ellipsoid, wenn man die feste Ellipse mit einer Parabel vertauscht. Auch diese Fläche kann zu einer Drehungsfläche werden.

Es wird später eine zweite Erzeugungsart dieses Paraboloids nachgewiesen werden, darin bestehend, daß eine Parabel, deren Ebene senkrecht auf der Ebene der festen Parabel ist, mit ihrem Scheitel auf der Peripherie der festen Parabel fortrückt, wobei ihre Axe parallel mit der Axe der letztern ist und die Axen beider Parabeln sich nach derselben Seite zu in's Unendliche erstrecken. Sind aber die Axen beider Parabeln nach entgegengesetzten Seiten gerichtet, während die übrigen Bedingungen dieselben bleiben, so beschreibt die bewegliche Parabel

5) ein hyperbolisches Paraboloid, welches seinen Beinamen daher hat, daß eine zur Axe der festen Parabel senkrechte Ebene es (wie sich später zeigen wird) nach einer Hyberbel schneidet. Diese Fläche kann nie durch Umdrehung entstehen, weil sie von einer Ebene nie nach einer geschlossenen Curve geschnitten werden kann.

Bei dem Ellipsoid und den beiden Hyperboloiden heißt der Mittelpunkt der festen Curve auch Mittelpunkt der Fläche, indem er, wie leicht nachzuweisen ist, jede durch ihn gehende Sehne der Fläche halbirt. Eine solche Sehne heißt ein Durchmesser. In den beiden Paraboloiden (für welche es keine Mittelpunkte gibt) versteht man unter einem Durchmesser irgend eine Gerade, welche mit der Axe der festen Parabel parallel ist. Diese letztere selbst heißt der Hauptdurchmesser oder die Axe des Paraboloids.

Von den vorhin genannten drei Flächen mit Mittelpunkten hat jede drei Hauptdurchmesser oder Axen, nämlich die beiden Axen der festen Curve und eine dritte, welche auf beiden senkrecht ist. Die Axen des Ellipsoids sind sämmtlich reell; das Hyperboloid mit einem Mantel hat

zwei reelle und eine imaginäre Axe; das Hyperboloid mit zwei Mänteln eine reelle und zwei imaginäre.

Man sieht sogleich, daß für jede dieser fünf Flächen die Ebene der festen Curve eine Symmetralebene oder Hauptebene sein müsse. Von den drei Flächen mit Mittelpunkten hat jede noch zwei andere Hauptebenen, deren jede durch zwei Axen geht. Die Hauptebenen dieser Flächen sind also aufeinander senkrecht. Für die beiden Paraboloide gibt es außer der zuerst genannten nur noch eine, welche durch die Axe der festen Parabel geht und auf der Ebene derselben senkrecht steht.

295. Aufg. Ein Hyperboloid mit einem Mantel, von welchem zwei Hauptebenen den Grundebenen parallel sind, Fig. 99. ist durch die Projectionen der festen Hyperbel (bc, v′b′c″w′) und der kleinsten Ellipse (vuw, v′w′) gegeben. Man soll für einen Punkt A der Fläche, dessen eine Projection man kennt, die zweite Projection finden.

Aufl. Ist die H-Projection a des Punktes A gegeben, so denke man sich die H-Projection abc für diejenige Lage der Erzeugungsellipse gezeichnet, welche durch A geht. Die Ellipsen abc und uvw sind ähnlich und liegen so gegeneinander, daß die Mittelpunkte und die Richtungen der Axen ineinander fallen. Daraus folgt, daß überhaupt zwei entsprechende Punkte (d. h. zwei Punkte, welche als entsprechende Ecken ähnlicher einbeschriebener Polygone betrachtet werden können) mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte o in gerader Linie liegen müssen, und daß die Entfernungen dieser Punkte von o sich verhalten wie die großen oder auch wie die kleinen Axen der Ellipsen. Dem Punkte a in abc entspricht der Punkt u in uvw; verbindet man u mit dem Scheitel v und zieht ab || uv, so ist b der Scheitel der Ellipse abc. Der Punkt b führt nun auf die (zum Grundschnitt parallele) V-Projection b′c′ oder b″c″ der durch A gehenden Ellipse; und ist diese einmal gezogen, so findet man sogleich auch die zu a gehörige V-Projection a′ oder a″. — (Die Ellipse abc braucht, wie man sieht, nicht wirklich gezeichnet zu werden.)

Ist die V-Projection a′ von A gegeben, so zeichne man zuerst die V-Projection b′a′c′ der durch A gehenden Erzeugungsellipse ABC, verbinde die Ellipsenscheitel B, V und denke sich den in o″ v-projicirten Punkt, wo die BV die imaginäre Axe der Fläche trifft, als Spitze eines Kegels, dessen Leitende die Ellipse ABC ist. Dieser Kegel muß durch

die Ellipse VUW gehen; denn er wird von der horizontalen Ebene VW nach einer Ellipse geschnitten, welche die Strecke VW zur Axe hat und der Ellipse ABC ähnlich, folglich identisch mit der Ellipse VUW ist. Die durch A gehende Mantellinie des Kegels schneidet die Ellipse UVW in einem Punkte, dessen V-Projection u′ ist, und dieser V-Projection entspricht als zugehörige H-Projection entweder u oder u_0; daher ist die H-Projection jener Mantellinie entweder oua oder ou_0a_0 und es gehört zu a′ entweder a oder a_0.

Zusatz. Die Lösung der Aufgabe nimmt denselben Gang, wenn statt des einmanteligen Hyperboloids ein zweimanteliges, dessen reelle Axe senkrecht zur Grundebene steht, gegeben ist, oder ein Ellipsoid, oder ein elliptisches Paraboloid mit vertical stehender Axe.

Fig. 100. **296. Aufg.** Ein hyperbolisches Paraboloid, dessen Hauptebenen den Grundebenen parallel sind, hat (tvt_0.., v′t′..) als feste und (vw.., w′v′w″..) als erzeugende Parabel; für einen Punkt A desselben ist die eine Projection gegeben; man verlangt die zweite Projection.

Aufl. Ist die H-Projection a gegeben, so projicirt sich die durch A gehende Lage der Erzeugungsparabel in die Richtung der mit vw parallelen Geraden at und ihr Scheitel in t; ihre V-Projection ist congruent mit w′v′w″.. und hat die Richtung von v′t′ zur Axe. Würde diese V-Projection wirklich gezeichnet, so fände man sogleich die zu a gehörige V-Projection a′ (oder a″) des Punktes A. Man kann diese letztere aber erhalten, ohne daß man die Parabel a′t′a″ construirt; denn denkt man sich die Parabel AT durch parallele Rückung in die Hauptebene nach VW versetzt, und zwar so, daß der Scheitel (t, t′) den geradlinigen Weg (tv, t′v′) beschreibt, so beschreibt A eine mit (tv, t′v′) parallele Gerade und kommt in einen Punkt W der Parabel VW zu liegen, dessen H-Projection w mittels der zu tv parallelen aw gefunden wird. Bestimmt man die zu w gehörige V-Projection w′ (oder w″), so erhält man die zu v′t′ parallele V-Projection w′a′ (oder w″a″) der von A durchlaufenen Geraden, und also auch die zu a gehörige V-Projection a′ (oder a″).

Ist die V-Projection a′ von A gegeben, so ziehe man a′w′ || GS, mache v′t′ = w′a′, bestimme die zu t′ gehörige H-Projection t (oder t_0), ziehe ta (oder t_0a_0) || GS und fälle $a'aa_0 \perp$ GS; dann ist a (oder a_0) die H-Projection von A.

297. Von den Flächen zweiter Ordnung (soweit sie nicht Kegel- oder Cylinderflächen sind) sollen zunächst diejenigen näher betrachtet werden, welche zugleich zu den Drehungsflächen gehören.

Durch 𝔈 sei irgend eine Ebene bezeichnet, welche eine Drehungsfläche zweiter Ordnung nach der Curve E schneidet; durch 𝔐 der auf 𝔈 senkrechte Meridian. Die Ebene dieses Meridians gilt in den nachfolgenden Betrachtungen als eine Grundebene. Die Schnittlinie der Ebenen 𝔈 und 𝔐 ist eine Symmetralaxe für die Curve E (und zugleich die Projection dieser Curve). Durch einen beliebigen Punkt P der Curve E sei ein Parallelkreis gelegt, welcher dem Meridian 𝔐 in den Punkten M, N begegne; dann ist der Punkt p, wo der Kreisdurchmesser MN die vorhin genannte Symmetralaxe trifft, die Projection des Punkts P; setzt man $Pp = y$, so ist $y^2 = Mp \cdot pN$.

a) Schneidet nun die Symmetralaxe der E den Meridian in zwei Punkten A, B, so bleibt (Nr. 281, †) das Verhältniß $y^2 : Ap \cdot pB$ ungeändert, wenn der Punkt P auf der Curve E verrückt (oder MN parallel verschoben) wird, dann aber auch, wenn sowohl AB als MN sich parallel verschieben; woraus erstlich folgt, daß die Curve E eine Ellipse oder Hyperbel ist, zweitens aber, daß alle der Curve E parallelen Schnittcurven ihr ähnlich sind. Der Halbirungspunkt O der AB ist der Mittelpunkt der E; die Mittelpunkte aller Parallelschnitte liegen auf einem Durchmesser der Meridiancurve 𝔐.

Es sei $AO = \alpha$, $Op = x$. Dann ist $Ap \cdot pB$ entweder $= (\alpha - x)(\alpha + x)$ oder $= (x - \alpha)(x + \alpha)$, je nachdem p zwischen A und B oder auf einer Verlängerung der Strecke AB liegt. (Der erste Fall findet statt, wenn die Drehungsfläche ein Ellipsoid oder ein Paraboloid ist, oder wenn an einem zweimanteligen Hyperboloid die Punkte A und B auf demselben Zweig der Meridiancurve liegen, oder wenn am einmanteligen Hyperboloid diese Punkte auf verschiedene Zweige des Meridians fallen; der zweite, wenn A und B am zweimanteligen Hyperboloid verschiedenen Zweigen, am einmanteligen Hyperboloid demselben Zweige des Meridians angehören.) Bezeichnet man das erwähnte unveränderliche Verhältniß mit $\beta^2 : \alpha^2$, so ergibt sich als Gleichung der E

im ersten Falle $\dfrac{y^2}{\alpha^2 - x^2} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ oder $\dfrac{y^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$,

im zweiten " $\dfrac{y^2}{x^2 - \alpha^2} = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ oder $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$.

b) Die Symmetralaxe der Curve E wird den Meridian 𝔐 nur in einem Punkte A schneiden, wenn sie am Paraboloid parallel mit der

Axe des Meridians, oder an einem der beiden Hyperboloide parallel zu einer Asymptote des Meridians ist. (Der andere Punkt B verschwindet für diese Fälle in unendlicher Entfernung.) Bezeichnet man Ap durch x, so bleibt im ersten Falle der Werth

$$\frac{Mp \cdot pN}{Ap} \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{x}$$

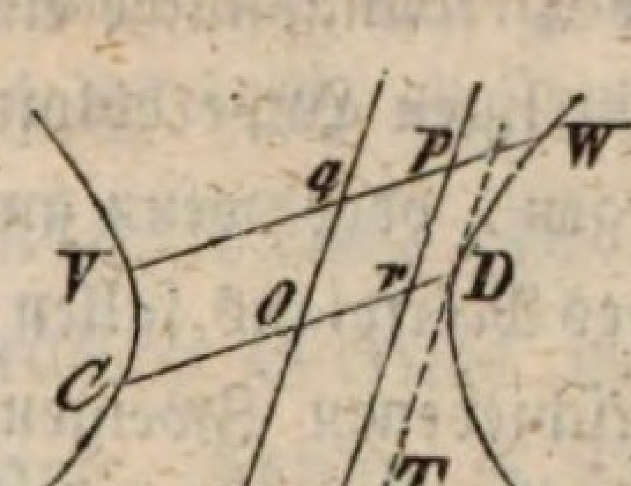
unveränderlich (Nr. 281, †) nicht blos bei Aenderung des Punkts P auf der Curve E, sondern auch bei paralleler Verschiebung der Ebene 𝕰; alle zur Meridianaxe parallelen Schnitte des Drehungsparaboloids sind also congruente Parabeln, und zwar zugleich congruent dem Meridian der Fläche, da die Ebene 𝕰 auch durch die Flächenaxe selbst gelegt werden kann. — In den beiden andern Fällen lehrt eine Betrachtung, ähnlich der in Nr. 281, † für die Parabel angestellten, daß bei paralleler Verschiebung der MN der Werth $y^2 : x$ ebenfalls unveränderlich, mithin die Curve E eine Parabel ist.

Richtet man nämlich nach einem sehr entfernten Hyperbelpunkte B die Sehne AB, welche von irgend zwei unter sich parallelen Sehnen MN, M′N′ in p und p′ geschnitten wird, wobei die Gleichung

$$\frac{Mp \cdot pN}{Ap} = \frac{M'p' \cdot p'N'}{Ap'} \cdot \frac{pB}{p'B}$$

besteht, so weicht der Werth des Verhältnisses pB : p′B wenig von 1 ab und kommt immer näher an 1, wenn durch fortwährende Verringerung des Winkels zwischen AB und der Asymptote der Punkt B in immer größere Ferne rückt. *

c) Ist die Fläche ein Drehungshyperboloid mit einem Mantel, so kann es vorkommen, daß die Symmetralaxe der Curve E den Meridian 𝔐 gar nicht schneidet. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die Symmetralaxe ein imaginärer Durchmesser Oq der Meridianhyperbel ist. Bezogen auf diesen Durchmesser und den ihm conjugirten reellen Durchmesser CD hat die Gleichung der Meridiancurve



(wenn man die mit CD parallelen Coordinaten durch z, die mit Oq parallelen durch x, die Länge OC durch γ bezeichnet) die Form

$$\frac{z^2}{\gamma^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \qquad \text{(Nr. 246).}$$

Durch CD und die Parallelsehne VW seien Ebenen senkrecht zur Meri-

* Näheres über den Grenzwerth des Verhältnisses zweier unendlich gewordenen Strecken s. Anhang, III.

dianebene gelegt. Diese Ebenen schneiden die Fläche nach ähnlichen Ellipsen und die Curve E in zwei Punkten, welche sich in O und q projiciren. Bedeutet β die Grunddistanz des in O projicirten, Y die Grunddistanz des in q projicirten Punktes (wobei β und Y zugleich Halbaxen der beiden Ellipsen sind), und werden in der vorigen Gleichung z und x speciell als die Coordinaten des Punkts V genommen, so folgt aus dieser Gleichung und aus der Proportion $z : Y = \gamma : \beta$ (Nr. 231) die neue Gleichung

$$\frac{Y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1, \qquad (\mathfrak{G})$$

welche (in rechtwinkeligen Coordinaten) die Gleichung der Curve E ist. Diese Curve ist also eine Hyperbel, deren imaginäre Axe in Oq liegt und deren reelle Axe 2β mit der in O projicirten Axe der Ellipse CD zusammenfällt.

Der Meridian des einmanteligen Drehungshyperboloids wird aber von der Symmetralaxe der E auch dann nicht geschnitten werden, wenn diese irgend einem imaginären Durchmesser Oq parallel ist und den conjugirten reellen Durchmesser CD zwischen seinen Endpunkten trifft, wie die Gerade rp. Haben jetzt die in p und r projicirten Punkte P und R der E die Grunddistanzen y und b, und setzt man $Or = \mathfrak{z}$, während die übrigen Buchstaben die vorigen Bedeutungen behalten (so daß auch $pr = x$), so gelten zunächst, insofern die Punkte P und R auf den Ellipsen VW und CD liegen, die Gleichungen

$$\frac{y^2}{Y^2} + \frac{\mathfrak{z}^2}{z^2} = 1, \qquad \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{\mathfrak{z}^2}{\gamma^2} = 1,$$

oder

$$\mathfrak{z}^2 = \frac{z^2}{Y^2}(Y^2 - y^2), \qquad \mathfrak{z}^2 = \frac{\gamma^2}{\beta^2}(\beta^2 - b^2).$$

Aus ihnen und der obigen Proportion folgt

$$Y^2 - y^2 = \beta^2 - b^2, \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = \frac{b^2}{\beta^2} - 1,$$

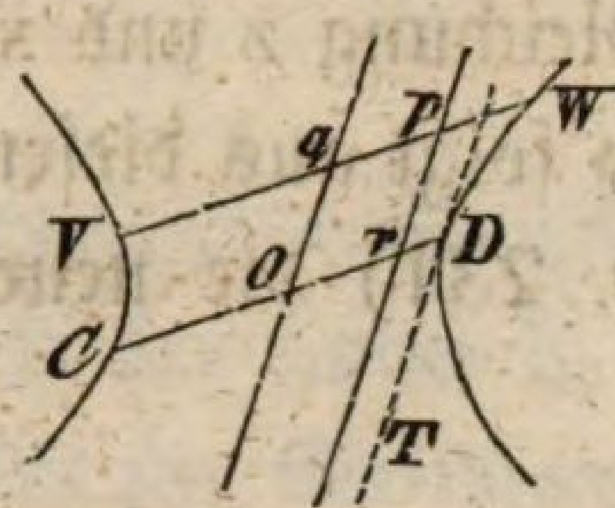
und da zwischen x und Y zugleich die Gleichung ($\mathfrak{G}$) besteht, so erhält man (durch Addition der zuletzt gefundenen und der $\mathfrak{G}$) für die Curve E (in rechtwinkeligen Coordinaten) die Gleichung

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{b^2}{\beta^2}. \qquad (\mathfrak{H})$$

Dividirt man noch durch den rechts stehenden Bruch, so nimmt diese Gleichung (unter Benützung abkürzender Bezeichnungen) die Form

$$\frac{y^2}{\mathfrak{B}^2} - \frac{x^2}{\mathfrak{A}^2} = 1$$

an, wobei aus den eigentlichen Werthen von $\mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{A}^2$ sofort ersichtlich wird, daß $\mathfrak{B} : \mathfrak{A} = \beta : \alpha$. Die Curve E ist also wieder eine Hyperbel und ähnlich der durch die Gleichung (G) dargestellten; die imaginären Axen und die reellen Axen beider Hyperbeln sind parallel. Wird p r parallel verschoben, so bleibt der Mittelpunkt r der neuen Hyperbel auf dem zu O q geordneten Meridiandurchmesser C D.



Die Asymptoten aller solchen Hyperbeln liegen in zwei Ebenen, welche sich, symmetrisch gegen die Meridianebene, in der Linie C D schneiden.

Jenes Verschieben kann so weit gehen, daß r in D fällt; dann ist b = 0 und die Gleichung (H) geht über in

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{y}{x} = \pm \frac{\beta}{\alpha}.$$

Der Schnitt einer durch die Tangente D T senkrecht zum Meridian geführten Ebene ist also so beschaffen, daß für jeden Punkt des Schnitts die von D aus auf T D gemessene Abscisse zu der auf T D senkrechten Ordinate ein unveränderliches Verhältniß behält, d. h. er besteht aus zwei geraden Linien, welche sich in D schneiden und symmetrisch gegen T D liegen. Diese beiden Mantellinien des Drehungshyperboloids sind parallel mit den Asymptoten der vorangegangenen hyperbolischen Schnitte (wie aus dem Verhältniß $\beta : \alpha$ hervorgeht, durch welches der Asymptotenwinkel für jede dieser Hyperbeln bestimmt wird); sie stellen den Grenzfall einer Hyperbel vor, deren reelle Axe bis auf Null abgenommen hat. Die ihnen parallelen Mantellinien des asymptotischen Kegels (Nr. 292) können keine andern Linien sein als die, nach welchen der Kegel durch die Ebene O q geschnitten wird; die letztern Schnittlinien geben also die Asymptoten für die Hyperbel O q ab.

Rückt man die mit O q parallele Ebene noch über D hinaus, so daß r auf die Verlängerung von C D fällt, so kommt man auf den früher (unter a) betrachteten Fall zurück; r bleibt immer der Mittelpunkt des hyperbolischen Schnitts, die reelle Axe ist aber jetzt parallel zu O q. Die reellen Axen solcher unter sich ähnlichen Schnitte sind wieder parallel, ebenso die imaginären Axen, mithin auch die Asymptoten, und zwar müssen die letztern ebenfalls dem Linienpaare parallel sein, nach welchem die Ebene T D die Fläche schneidet; denn dieses Paar ist als Grenzfall

einer veränderlichen Hyperbel von unveränderlichem Asymptotenwinkel anzusehen, deren reelle Axe anfangs eine Sehne des Meridianzweigs WD war, dann aber sich stetig bis zum Verschwinden vermindert hat.

Die Ebene TD ist, obwohl sie das Hyperboloid nach zwei Geraden schneidet, eine Berührungsebene desselben, indem diese Geraden unter die Tangenten der Fläche zu rechnen sind (vgl. Nr. 259 und 260).* Da die entsprechende Berührungsebene im Punkte C der vorigen parallel ist, CD jeden reellen Durchmesser der Meridianhyperbel und M selbst jeden Meridian der Drehungsfläche bedeuten kann, so liegen überhaupt die Berührungspunkte zweier parallelen Berührungsebenen des Hyperboloids auf einem reellen Durchmesser, der zugleich die Mittelpunkte aller den Berührungsebenen parallelen Schnitte enthält. Ein solcher Schnitt mag ein innerer heißen, wenn seine Ebene zwischen den beiden Berührungsebenen liegt, andernfalls ein äußerer. Alle diese Schnitte sind Hyperbeln; die äußern sind unter sich ähnlich, ebenso die innern. Legt man eine ihnen parallele Ebene durch den Mittelpunkt des Hyperboloids und verbindet jede der Linien, nach denen die Ebene den asymptotischen Kegel schneidet, durch eine neue Ebene mit dem Durchmesser, welcher die Mittelpunkte der Parallelschnitte trägt, so fallen in diese Ebenen die Asymptoten aller Parallelschnitte; während aber die Curven der äußern Schnitte in dem einen Paare der von den Ebenen gebildeten Scheitelwinkel liegen, finden sich die Curven der innern Schnitte im andern Paar.

† Der Durchmesser, auf welchem bei jeder der vier betrachteten Drehungsflächen die Mittelpunkte paralleler Schnitte liegen, heißt diesen Schnitten zugeordnet (conjugirt); und umgekehrt ist jeder Schnitt dem nach seinem Mittelpunkte gehenden Durchmesser conjugirt. Auch am zweimanteligen Hyperboloid (falls der Durchmesser ein reeller oder ein ihm conjugirter Schnitt eine Ellipse ist), sowie am Paraboloid und Ellipsoid ist die durch den Endpunkt eines Durchmessers parallel zu den conjugirten Schnitten geführte Ebene eine Berührungsebene der Fläche; denn sie enthält sowohl eine Tangente des Meridians M als eine Tangente desjenigen Schnitts, der den Durchmesser zur Projection hat. Parallel mit

---

* Zwei andere Linien, welche zur Bestimmung der Berührungsebene in D benützt werden könnten, sind die Meridiantangente DT und die im Punkte D projicirte Tangente der Ellipse CD.

einer gegebenen Ebene E_0 ist für die drei in's Unendliche sich ausdehnenden Flächen keine Berührungsebene möglich, wenn die E_0 das Paraboloid nach einer Parabel, das zweimantelige Hyperboloid nach einer Hyperbel, das einmantelige nach einer Ellipse schneidet. (Werden die beiden Hyperboloide von der E_0 nach Parabeln geschnitten, so gibt es parallel mit E_0 ebenfalls keine eigentliche Berührungsebene, wohl aber eine asymptotische Ebene, welche die Fläche in einem unendlich fernen Punkte berührt und bei späterer Gelegenheit noch zur Sprache kommen wird.)

298. Denkt man in der Figur auf S. 266 die Geraden VC und WD gezogen, so werden sich diese in einem Punkte S der qO schneiden. Ein Kegel, welcher S zur Spitze und die Ellipse VW zur Leitenden hat, wird von der Ebene CD geschnitten nach einer der Ellipse VW ähnlichen Ellipse über der Axe CD, d. h. nach der auf dem Hyperboloid liegenden Ellipse CD selbst. Rückt die Ellipse CD auf dem Hyperboloid parallel gegen VW fort, so ändert sich der durch beide Ellipsen gehende Kegel, seine Spitze aber bleibt auf qO; seine Mantellinien werden sämmtlich und gleichzeitig zu Tangenten des Hyperboloids, sobald CD in VW gefallen ist. Bleibt aber die Ebene CD in der ursprünglichen, durch den Mittelpunkt O gehenden Lage, während VW parallel gegen CD rückt, so erfährt der Kegel abermals eine stetige Aenderung; beim Zusammenfallen der VW mit CD sind wieder sämmtliche Mantellinien Tangenten des Hyperboloids geworden, zugleich aber unter sich parallel (da die Tangenten des Meridians in C und D parallel sind), d. h. der Kegel ist in einen Cylinder übergegangen.

Eine ähnliche Betrachtung lehrt, daß auch am zweimanteligen Hyperboloid, am Paraboloid und am Ellipsoid durch je zwei parallele elliptische Schnitte ein Kegel* gelegt werden kann, dessen Spitze auf dem conjugirten Durchmesser liegt und der in einen berührend umschriebenen übergeht beim Zusammenfallen beider Schnitte; erfolgt am Ellipsoid dieses Zusammenfallen in einer durch den Mittelpunkt gehenden Ebene, so verwandelt sich der umschriebene Kegel in einen Cylinder. Ferner

* Es gibt sogar immer zwei solche Kegel, von denen derjenige, dessen Spitze zwischen den ebenen Schnitten liegt, außer Acht bleiben mag, da er auf keinen Berührungskegel führt.

überzeugt man sich auf demselben Wege, daß die ausgesprochenen Sätze auch für die hyperbolischen Schnitte der Hyperboloide (wenn diese Schnitte am einmanteligen zwei äußere oder zwei innere sind) Geltung haben; gehen dabei zwei zusammengefallene Schnitte durch den Mittelpunkt, so verwandelt sich der berührend umschriebene Kegel in einen hyperbolischen Cylinder.

Der durch zwei Parallelschnitte gehende Kegel wird ferner auch dann durch einen Cylinder vertreten, wenn die Ebenen beider Schnitte auf beiden Seiten des Flächenmittelpunkts in gleichen Abständen von diesem liegen; als Richtlinie des Cylinders erscheint der den Schnitten conjugirte Durchmesser.

† Betrachtet man den Durchmesser, welcher einer Reihe von elliptischen oder hyperbolischen Parallelschnitten an einer der betrachteten Flächen conjugirt ist, als Richtungslinie schiefer Projectionen, und eine jener Schnittebenen als Grundebene, so projiciren sich auf diese alle Parallelschnitte so, daß die Projectionen den Mittelpunkt und die Richtungen gleichnamiger Axen gemein haben. Eine solche Lage zweier ähnlichen Ellipsen oder Hyperbeln soll „entsprechende Lage" heißen.

299. Durch D_1 sei ein beliebiger Durchmesser des Drehungs-Ellipsoids oder ein reeller (die Fläche in zwei Punkten schneidender) Durchmesser in einem der Drehungshyperboloide bezeichnet; H_1 bedeute eine durch den Mittelpunkt der Fläche gelegte Ebene („Diametralebene"), welcher jener Durchmesser conjugirt ist, $\mathfrak{N}$ eine beliebig durch D_1 geführte Ebene. Da die durch die Endpunkte von D_1 gehenden Berührungsebenen parallel mit H_1 sind und die Ebene $\mathfrak{N}$ ihnen nach parallelen Tangenten der in $\mathfrak{N}$ fallenden Schnittcurve begegnet, so ist D_1 auch für diese Curve ein Durchmesser, und derjenige, nach welchem die Ebene $\mathfrak{N}$ durch die H_1 geschnitten wird, ihm conjugirt. Da $\mathfrak{N}$ nach und nach jede durch D_1 gehende Ebene vorstellen kann, so sieht man, daß die H_1 alle mit D_1 parallelen Sehnen der Fläche halbirt. Dieß folgt auch schon daraus, daß (Nr. 298) zwei mit H_1 parallele Schnittebenen, welche auf D_1 vom Mittelpunkt aus gleiche Stücke nach beiden Seiten hin abschneiden, auf einem Cylinder liegen, dessen Mantellinien mit D_1 parallel sind; und aus diesem Grunde erweist sich der vorige Satz auch für den Fall als richtig, daß D_1 einen imaginären (die Fläche nicht schneidenden) Durchmesser eines Drehungshyperboloids bedeutet, wobei die Diametralebene H_1, welcher er conjugirt ist, das einmantelige Hyperboloid nach einer Ellipse, das zweimantelige nach einer Hyperbel schneidet.

Man denke zwei einander conjugirte Durchmesser D_2, D_3 der Curve, nach welcher die Diametralebene H_1 die Fläche schneidet (und welche am einmanteligen Hyperboloid elliptisch sein soll), gezeichnet, durch D_1 und D_2 eine Ebene H_3, durch D_1 und D_3 eine Ebene H_2 gelegt, so daß D_1, D_2 conjugirte Durchmesser für die Schnittcurve der H_3, ferner D_1, D_3 conjugirte Durchmesser des durch die H_2 erzeugten Schnittes werden. Jede mit H_3 parallele Ebene schneidet die Fläche nach einer Curve C und die Ebenen H_1, H_2 nach Geraden d', d'', welche conjugirte Durchmesser jener Curve sein müssen, da d'' die mit d' parallelen Sehnen halbirt und von d' halbirt wird; also liegt der Mittelpunkt von C in D_3, oder D_3 ist derjenige Flächendurchmesser, welcher der Diametralebene H_3 conjugirt ist. Ebenso ist D_2 der Diametralebene H_2 conjugirt.

Im Drehungsparaboloid versteht man unter einer Diametralebene eine Ebene welche der Axe parallel ist. Schneiden zwei solche Ebenen H_2, H_3 sich nach dem Durchmesser D_1 des Paraboloids und eine ihm conjugirte Ellipse nach zwei einander zugeordneten Durchmessern $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ derselben, so halbirt die Ebene $D_1\mathfrak{D}_2$ alle mit $\mathfrak{D}_3$ parallelen Sehnen des Paraboloids, die Ebene $D_1\mathfrak{D}_3$ die mit $\mathfrak{D}_2$ parallelen Sehnen.

300. Wenn zwei ähnliche Ellipsen oder zwei ähnliche Hyperbeln „entsprechend" liegen (Nr. 298, †), so sind die beiden Punkte P, P′, in denen ein solches Curvenpaar von einer aus dem Mittelpunkte O gezogenen Geraden geschnitten werden, zwei einander entsprechende Punkte und das Verhältniß OP : OP′ bleibt für alle Lagen jener Geraden unveränderlich (vgl. Nr. 295); das Nämliche gilt mithin auch für die beiden ähnlichen Flächen, welche durch Drehung jenes Curvenpaares um eine der gemeinschaftlichen Axen entstehen. Also schneidet ein Kegel, dessen Spitze der gemeinsame Mittelpunkt O beider Flächen und dessen Leitende ein ebener Schnitt der einen Fläche ist, die zweite Fläche nach einer ebenen und jener Leitenden ähnlichen Curve. Hieraus und aus Früherem folgt ferner, daß eine und dieselbe Ebene beide Flächen immer nach ähnlichen und entsprechend liegenden Curven schneidet, falls diese Flächen Ellipsoide oder zweimantelige Hyperboloide sind; im Fall zweier einmanteligen Hyperboloide aber nur dann, wenn die Schnitte der Ebene für beide Flächen äußere oder für beide innere sind.

Einem Punkte auf der Axe einer Parabel entspricht ein Punkt auf der Axe einer andern Parabel, dessen Abstand vom Scheitel der letztern

sich zum Abstand des ersten Punkts vom Scheitel der zugehörigen Parabel verhält wie der Parameter der zweiten Parabel zum Parameter der ersten. Für zwei Parabeln, welche die Axe gemein haben (und nach der nämlichen Seite concav sind) läßt sich also immer auf der gemeinsamen Axe ein Punkt O_0 finden, in welchem zwei solche entsprechende Punkte zusammengefallen sind*, und jede in O_0 entspringende Gerade schneidet dann die zwei Parabeln in entsprechenden Peripheriepunkten. Werden die zwei durch Drehung um die Axe erzeugten Paraboloide von irgend einer aus O_0 gezogenen Geraden in P und P′ geschnitten, so ist das Verhältniß $O_0P : O_0P'$ dem Verhältniß der Parameter gleich. Hieraus folgert man wie vorhin, daß beide Paraboloide von einer Ebene nach ähnlichen und entsprechend liegenden Curven geschnitten werden.

† Das zweimantelige Drehungshyperboloid hat, wie das einmantelige, einen asymptotischen Kegel, welcher bei der Drehung des Meridians von dessen Asymptoten miterzeugt wird. Läßt man die Asymptoten des Meridians unverändert, während die reelle Axe sich fortwährend verkürzt, so bleiben die zugehörigen Meridiane und also die Drehungsflächen selbst sich ähnlich, auch wenn für eine derselben die reelle Axe unendlich klein geworden ist. Da sonach das eine von zwei ähnlichen Hyperboloiden dem gemeinschaftlichen asymptotischen Kegel so sehr angenähert werden kann, daß sich seine Schnitte von den Schnitten des Kegels nicht mehr unterscheiden lassen, so ist zu schließen, daß ein zweimanteliges Hyperboloid und sein asymptotischer Kegel von jeder Ebene nach ähnlichen und entsprechend liegenden Curven geschnitten werden (wobei ein aus zwei Geraden bestehender Schnitt des Kegels zu den Hyperbeln zu stellen ist).

Für das einmantelige Hyperboloid und seinen asymptotischen Kegel gilt das Nämliche. In Betreff hyperbolischer Schnitte dieser Fläche ist der Satz schon in Nr. 297, c begründet; zugleich ist dort bereits angezeigt, daß sich in diesem Falle der Satz auf äußere Schnitte des Hyperboloids beschränkt, zu denen nur noch, unter Zulassung der Vertretung einer Hyperbel durch ihre Asymptoten, die Schnitte der das Hyperboloid berührenden und der durch seinen Mittelpunkt gelegten Ebene hinzukommen.**

---

*) Wenn die Parabeln congruent wären, würde dieser Punkt in unendlicher Entfernung verschwinden. Haben die Parabeln, ohne congruent zu sein, den Scheitel gemein, so fällt O_0 in denselben.

** Die hyperbolischen Schnitte des Kegels sind nämlich immer als äußere

Haben zwei Hyperbeln, ohne ähnlich zu sein, die Asymptoten gemein (so daß sie in verschiedenen Scheitelwinkelpaaren liegen), so entsteht durch Umdrehung um eine der Axen ein zweimanteliges und ein einmanteliges Hyperboloid mit gemeinschaftlichem asymptotischen Kegel. Beide Hyperboloide und der Kegel werden von einer Ebene nach drei ähnlichen und entsprechend liegenden Curven geschnitten, im Falle hyperbolischer Schnitte jedoch nur dann, wenn der Schnitt des einmanteligen Hyperboloids ein äußerer ist.

Ist eine Diametralebene H und ein Durchmesser D conjugirt in Bezug auf eines der Hyperboloide, so sind sie auch conjugirt in Bezug auf den asymptotischen Kegel.

301. Nimmt man in einem nicht durch Drehung entstandenen Ellipsoid, Hyperboloid oder elliptischen Paraboloid die Curve, welche in Nr. 294 als feste Leitlinie für die veränderliche, die Fläche erzeugende Ellipse gedient hat, zugleich als Meridian einer zweiten, durch Drehung zu bildenden Fläche an, so ist die erste Fläche eine Ableitung aus der zweiten (Nr. 268), wobei die Ebene der gemeinschaftlichen Curve die Grundebene, die Richtungslinie senkrecht zu ihr und das Ableitungsverhältniß dem Axenverhältniß der erzeugenden Ellipse gleich ist; denn unter diesen Annahmen ergibt jeder Parallelkreis der Drehungsfläche als Ableitung eine Lage der die andere Fläche erzeugenden Ellipse (Nr. 227). Umgekehrt kann auch die Drehungsfläche als Ableitung aus der andern angesehen werden.

Dehnt man an jedem der Drehungshyperboloide das Ableitungsverfahren, unter Beibehaltung des Verhältnisses, auch auf den asymptotischen Kegel aus, so erhält man für die beiden allgemeinen Hyperboloide ebenfalls asymptotische Kegel.

Ferner sieht man jetzt, daß die zu Ende der Nr. 292 bezüglich des Drehungshyperboloids zusammengestellten Sätze auch

---

aufzufassen, indem jeder reelle Durchmesser eines Hyperboloids beim Uebergang in den Kegel Null wird, somit nicht zwischen den Endpunkten geschnitten werden kann. Als ein innerer Schnitt des asymptotischen Kegels könnte nur das Paar gerader Linien angesehen werden, welches in eine durch seine Spitze gelegte Ebene fällt. (Ein solches Paar vertritt zugleich die Berührungsebenen, welche parallel mit einer gegebenen Ebene an ein einmanteliges Hyperboloid gelegt werden könnten; aber nicht die Ebene dieses Paars darf in diesem Sinne genommen werden; vielmehr reduciren sich alle Tangenten, welche parallel zur gegebenen Ebene durch die Kegelspitze gezogen werden können, auf jene zwei Linien selbst.)

für das allgemeine einmantelige Hyperboloid und seinen asymptotischen Kegel gelten (Nr. 268, 1, 3).

302. Eine der zu Anfang der vorigen Nummer genannten Flächen F, welche zunächst wieder in Verbindung mit der zugehörigen Drehungsfläche F′ gedacht werden soll, sei durch eine beliebige Ebene 𝔈 nach einer Curve 𝔈 geschnitten. Die F′ gelte als Ableitung der F. Die auf der Fläche F′ liegende Ableitung 𝔈′ der 𝔈 ist wieder eine ebene Curve (Nr. 268, 2), mithin (Nr. 297) eine Linie zweiter Ordnung; folglich ist auch 𝔈 (als Schnitt eines durch 𝔈′ gehenden Cylinders) eine Linie zweiter Ordnung, von gleicher Art mit 𝔈′.

Indem man nun beliebige Parallelschnitte der F, Durchmesser, Diametralebenen, Berührungsebenen 2c. derselben in den auf F′ bezüglichen Ableitungen wieder aufsucht und schließlich das Ableitungsverhältniß umgekehrt denkt, so daß das mit F zusammenhängende System von Linien und Ebenen als Ableitung des mit F′ zusammenhängenden erscheint, gelangt man (auf Grund der Sätze in 268) zu der Ueberzeugung, daß die in Nr. 297—300 entwickelten Hauptsätze auch in Beziehung auf die nicht durch Drehung entstandenen Flächen F ausgesprochen werden können.

Anmerk. Für das allgemeine Ellipsoid können alle diese Sätze unmittelbar aus bekannten Eigenschaften der Kugel entnommen werden. Die Kugel wird von parallelen Ebenen nach Kreisen geschnitten, deren Mittelpunkte auf einem zu den Ebenen senkrechten Durchmesser liegen; die Berührungsebenen in den Endpunkten des Durchmessers sind den Schnittebenen parallel. Durch zwei jener Kreisschnitte gehen zwei Kegel, deren Spitzen auf dem Durchmesser liegen; ein Kegel, aus einem Punkte auf der Verlängerung des Durchmessers um die Kugel beschrieben, berührt sie nach einem Kreise, dessen Ebene senkrecht zum Durchmesser ist; dieser Kreis wird ein größter, wenn der Kegel in einen zum Durchmesser parallelen Cylinder übergeht. Durch den Mittelpunkt der Kugel lassen sich unendlich viele Gruppen von je drei rechtwinkelig verbundenen Ebenen legen, deren jede die Kugelsehnen halbirt, welche mit der Schnittlinie der beiden andern parallel sind. — Alle diese Sätze dehnen sich, unter den bekannten Modificationen, zuerst auf das Drehungsellipsoid aus, indem man dasselbe als eine orthogonale Ableitung der Kugel entstehen läßt, wobei eine Diametralebene der Kugel als Grundebene dient; sodann erweitern sie sich auf die oben angegebene Weise für jedes Ellipsoid.

† Kommt bei Ableitung der Fläche F aus F′ (oder umgekehrt) ein Schnitt vor, dessen Ebene senkrecht zur Grundebene der Ableitung steht, so ist der obenerwähnte projicirende Cylinder, auf welchem ein

Schnitt und seine Ableitung liegen sollen, nicht mehr vorhanden. Daß auch in diesem Falle nicht nur der Kreis eine Ellipse, sondern überhaupt jede Linie zweiter Ordnung wieder eine Curve gleicher Art zur Ableitung hat, ist leicht zu sehen. Beide Curven haben eine in der Grundebene liegende Axe gemein. Durch proportionale Verkürzung der zur Axe senkrechten Ordinaten einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel entsteht wieder eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel; denn man kann die Curve, der die verkürzten Ordinaten zukommen, als eine Projection der andern auf ihre ursprüngliche Ebene erhalten, nachdem man diese andere um die Axe in eine neue Lage gedreht hat.

†† Es leuchtet ein, daß die Eigenschaften paralleler Schnitte an den betrachteten Flächen auf veränderte Erzeugungsarten führen, wobei übrigens jede Fläche wieder als eine Rückungsfläche entsteht.

303. Ein hyperbolisches Paraboloid läßt sich durch Ableitung nicht aus einer Drehungsfläche erhalten, wohl aber aus einer andern Fläche gleicher Art, in welcher die erzeugende Parabel P der festen Parabel 𝔓 congruent ist.

In diesem besondern Falle hat das Paraboloid die augenfällige Eigenschaft, daß die beiden Parabeln, deren Scheitel man sich vor Beginn der Erzeugungsbewegung in einem Punkte S vereinigt zu denken hat, gegenseitig ihre Bedeutungen vertauschen können, ohne daß die erzeugte Fläche eine andere wird. Nimmt man die ursprüngliche (durch S gehende) Ebene 𝔊 der Parabel P als Grundebene orthogonaler Ableitung, und bildet aus dem Paraboloid [P 𝔓] ein abgeleitetes, in welchem der Parabel 𝔓 die neue Parabel 𝔓′ entspricht, so rücken, falls P die erzeugende Curve war, alle ihre Lagen in Folge des Ableitens in andere Entfernung von 𝔊, bleiben aber sich congruent; war dagegen P als feste Parabel genommen, so verwandeln sich durch die nämliche Ableitung alle Lagen der beweglichen 𝔓 in neue Parabeln, welche congruent mit 𝔓′ sind. Sind daher in zwei aufeinander senkrechten Ebenen ursprünglich zwei ungleiche Parabeln P, 𝔓′ mit gemeinsamem Scheitel und entgegengesetzten Axenrichtungen gegeben, so ist es für das zu erzeugende Paraboloid gleichgiltig, welche der beiden Curven man an der andern hin bewegen will.

Andere Eigenschaften des Paraboloids ergeben sich, wenn man dessen Verwandtschaft mit dem einmanteligen Hyperboloid untersucht.

Eine zwischen zwei Punkten S, S′ des Grundschnitts genommene Strecke stelle die große Axe einer in der H-Ebene liegenden Ellipse E und zugleich die reelle Axe einer in der V-Ebene liegenden Hyperbel H vor; H sei die feste Leitlinie für ein einmanteliges Hyperboloid, E die Anfangslage der Ellipse, welche durch ihre Bewegung die Fläche erzeugen soll; das Hyperboloid [HE] ist durch beide Curven völlig bestimmt. Um diese Curven selbst zu bestimmen, braucht man, wenn die Länge 2α der gemeinsamen Axe gegeben ist, nur einen der beiden Scheitel, S, den zu ihm gehörigen Brennpunkt F der Hyperbel und den ihm benachbarten Brennpunkt $\mathfrak{F}$ der Ellipse festzusetzen. Der zweite Scheitel S′ und die mit ihm zusammengehörigen Brennpunkte F′ und $\mathfrak{F}'$ werden sämmtlich (da immer $S'F' = SF$ und $S'\mathfrak{F}' = S\mathfrak{F}$) in um so größere Entfernung rücken, je größer α angenommen wird. Um F′ und $\mathfrak{F}'$ seien in der V- und H-Ebene die beiden Kreise K, $\mathfrak{K}$ mit dem Halbmesser 2α beschrieben, welche von zwei durch F und $\mathfrak{F}$ gehenden Kreisen berührt werden müssen, wenn die Mittelpunkte dieser Kreise die Curven H und E durchlaufen sollen (Nr. 223. 224). Bei fortgesetztem Wachsen von α werden die Kreise K, $\mathfrak{K}$ immer flacher und können beide gleichzeitig einer geraden Linie so nahe gebracht werden als man will. Würde man sie wirklich durch gerade Linien ersetzen, so hätte man statt der Curven H, E zwei Parabeln (vgl. Nr. 232) und statt des Hyperboloids ein hyperbolisches Paraboloid; denn da am Hyperboloid die Ellipse E mit der H-Projection $\mathfrak{E}$ eines beliebigen horizontalen Schnitts „entsprechend" liegt und der Mittelpunkt O der Curven E, $\mathfrak{E}$ ganz dieselbe Bedeutung hat wie der in Nr. 300 durch O_0 bezeichnete Punkt auf der gemeinsamen Axe zweier Parabeln (indem die Parameter ähnlicher Ellipsen sich verhalten wie die großen Halbaxen), so gibt es, nachdem E und $\mathfrak{E}$ zu Parabeln geworden sind, für sie keinen wirklichen Punkt O_0 mehr; dieser ist in unendlicher Entfernung verschwunden und die Parabeln E, $\mathfrak{E}$ sind congruent. — Da nun für äußerst große Werthe von α das Hyperboloid mit seinen Eigenschaften noch besteht, so werden sich diese Eigenschaften zum Theil auch auf den Grenzfall übertragen, in welchem jene Fläche sich in ein Paraboloid verwandelt, und es ist nur zu untersuchen, ob und welche Eigenschaften eine Aenderung erfahren.

Die Eigenthümlichkeiten hyperbolischer Parallelschnitte tragen sich vom Hyperboloid auf das Paraboloid über; die Mittelpunkte solcher Schnitte liegen auf einer zur Axe SF parallelen Geraden, da der Mittel-

punkt O der Strecke SS′ mit dem Punkte S′ sich in unendlicher Entfernung verliert. Eine den Schnitten parallele Berührungsebene scheidet sie in zwei Klassen, jenseits und diesseits der Berührungsebene; werden alle diese Schnitte nach der Richtung des conjugirten Durchmessers auf die Berührungsebene projicirt, so haben sämmtliche Projectionen gemeinschaftliche Asymptoten; die Projectionen der einen Klasse und die der andern liegen aber in verschiedenen Scheitelwinkelpaaren. — Die beiden Geraden, nach denen der asymptotische Kegel des Hyperboloids [HE] von der V-Ebene geschnitten wird, vermindern ihren Winkel gegen SS′, je weiter der Mittelpunkt O sich entfernt; sie sind als parallel mit dem Grundschnitt zu denken, wenn S′ im Unendlichen liegt, verschwinden aber gleichfalls in unendlicher Entfernung vom Grundschnitt, da die Parabel H keine wirklichen Asymptoten hat. Mit ihnen verschwindet der asymptotische Kegel selbst, sammt allen innerhalb desselben liegenden (imaginären) Durchmessern; die reellen Durchmesser des Hyperboloids werden zu parallelen Durchmessern des Paraboloids. Die parabolischen Schnitte, welche am Hyperboloid parallel mit Mantellinien des asymptotischen Kegels waren, werden am Paraboloid parallel zur Axe S𝔉. Elliptische Schnitte gibt es am Paraboloid nicht; die Ellipsen des Hyperboloids haben sich beim Uebergang des letztern in ein Paraboloid zu Parabeln umgestaltet, da jede solche Ellipse einen Punkt mit dem durch S′ gehenden Zweig der Hyperbel H gemein hatte, der nunmehr in unendliche Ferne gerückt ist; die Ebenen dieser Parabeln liegen parallel zu S𝔉, denn die ursprünglichen Ellipsenebenen waren parallel mit reellen Durchmessern des Hyperboloids.

Anmerk. Wie das einmantelige Hyperboloid in ein hyperbolisches Paraboloid, so kann sich das zweimantelige in ein elliptisches Paraboloid verwandeln, indem man die leitende Hyperbel in eine Parabel übergehen läßt. Andererseits erscheint das elliptische Paraboloid auch als Grenzfall eines Ellipsoids, dessen leitende Ellipse in eine Parabel ausgeartet ist. Da ferner zwischen dem einmanteligen und dem zweimanteligen Hyperboloid der asymptotische Kegel als gemeinschaftlicher Grenzfall immitten steht, so sieht man, wie die verschiedenen Flächen zweiter Ordnung durch stetige Formveränderungen ineinander übergehen können.

Umhüllungsflächen.

304. Wenn eine Fläche sich nach einem vorgeschriebenen Gesetze stetig bewegt, so wird im Allgemeinen jede Lage derselben von der un-

mittelbar darauffolgenden nach einer (geraden oder krummen) Linie geschnitten, und der Inbegriff aller dieser Linien bildet eine stetige Fläche, welche die Umhüllungsfläche der ersten genannt wird. Jene Linie selbst nennt man die Charakteristik der Umhüllungsfläche, weil durch sie der Charakter der letztern eben so deutlich ausgesprochen ist wie durch die bewegliche Fläche. Man sieht leicht, daß man die Umhüllungsfläche auch durch Bewegung der Charakteristik entstehen lassen kann.

Die bewegliche Fläche kann zugleich auch ihre Gestalt nach einem bestimmten Gesetze ändern; sie heißt die umhüllte, und jede Lage derselben wird von der Umhüllungsfläche nach derjenigen Linie berührt, welche durch den Schnitt dieser Lage mit der unmittelbar darauffolgenden entsteht. Diese Linie (die betreffende Lage der Charakteristik) gehört nämlich sowohl der umhüllten als der umhüllenden Fläche an, und irgend eine Tangente der Charakteristik ist also eine gemeinschaftliche Tangente beider Flächen; ferner beschreibt (wenn man die Umhüllungsfläche durch Bewegung der Charakteristik erzeugen will) der Berührungspunkt einer solchen Tangente beim Uebergange der Charakteristik in ihre unendlich nahe Nachbarlage einen unendlich kleinen Weg oder ein Curvenelement, welches auf beiden Flächen zugleich liegt und dessen Verlängerung demnach eine zweite gemeinschaftliche Tangente ist. Folglich entspricht beiden Flächen für jeden Punkt der Charakteristik eine gemeinschaftliche Berührungsebene, oder die Flächen berühren sich in allen Punkten der Charakteristik.

305. (Umhüllte Ebenen.) Ist die umhüllte Fläche eine Ebene, so ist die Charakteristik nothwendig eine gerade Linie. Drei aufeinanderfolgende Lagen der umhüllten Ebene bringen zwei aufeinanderfolgende Lagen der Charakteristik hervor, und diese müssen (da sie beide in der mittleren Ebene liegen) entweder parallel sein oder sich schneiden. Im erstern Falle ist die Umhüllungsfläche eine Cylinderfläche; im andern Falle gehen entweder alle Lagen der Charakteristik durch einen und denselben Punkt und die Umhüllungsfläche ist eine Kegelfläche — oder die beiden Schnittpunkte von je drei aufeinanderfolgenden Lagen enthalten zwischen sich ein unendlich kleines Stück der mittleren Lage, und dann hat man diese aneinandergereihten Stücke als die Elemente einer Curve zu betrachten, an welcher sämmtliche Lagen der Charakteristik Tangenten sind. Jede Lage der umhüllten Ebene ist eine Oscula-

tionsebene dieser Curve, da sie durch zwei benachbarte Elemente derselben geht. Eine solche Curve heißt die Rückkehrcurve der Umhüllungsfläche, weil in ihr zwei Mäntel der letztern zusammenhängen, auf ähnliche Weise wie zwei Zweige einer Curve in einem Rückkehrpunkte. *

Um ein bestimmtes Beispiel von der Umhüllung einer Ebene vor Augen zu haben, lasse man diese sich so bewegen, daß sie beständig auf einer gegebenen Curve normal bleibt. Ist diese Curve eben, so ist jede Lage der Charakteristik senkrecht auf der Ebene derselben, und die Umhüllungsfläche der beweglichen Ebene ist also eine Cylinderfläche. Ist die Curve gewunden, so wird die Umhüllungsfläche eine Rückkehrcurve erhalten.

306. (Umhüllte Kugeln.) Wenn der Mittelpunkt einer Kugel in irgend einer Linie L fortläuft, so ist die Charakteristik ihrer Umhüllungsfläche ein Kreis, welcher in einer Normalebene der L liegt; denn die Ebene des Kreises, nach welchem sich zwei Kugeln schneiden, steht senkrecht auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte, und diese Verbindungslinie wird für zwei unendlich nahe Lagen der umhüllten Kugel zu einem Elemente der L.

Wenn L gerade ist, so muß die Umhüllungsfläche (bei constantem oder gesetzmäßig veränderlichem Kugelhalbmesser) immer eine Drehungsfläche sein, welche die L zur Drehungsaxe, die Charakteristik zum Parallelkreis, und zum Meridian die Umhüllungslinie der größten Kreise hat, nach welchen eine durch L beliebig gelegte Ebene die verschiedenen Lagen der Kugel schneidet. — Will man irgend eine vorgegebene Drehungsfläche als Umhüllungsfläche einer Kugel erscheinen lassen, so hat man den Mittelpunkt der beweglichen Kugel in die Drehungsaxe zu legen und zum Halbmesser immer die Normale des Meridians zu nehmen, welche vom Kugelmittelpunkte ausgeht und bis an die Peripherie des Meridians reicht.

Bleibt der Halbmesser der Kugel constant (während L entweder gerade oder krumm ist), so ist die Charakteristik ein größter Kreis und die Umhüllungsfläche selbst heißt eine röhrenförmige Fläche. Einer geraden Bahn des Kugelmittelpunkts entspricht als Umhüllungsfläche der Mantel eines geraden Cylinders; einer kreisförmigen Bahn

* Eine Rückkehrcurve kann auch bei solchen Umhüllungsflächen vorkommen, deren Charakteristik eine krumme Linie ist, und sie bildet sich dann (eben so wie vorhin) durch die Durchschnitte aufeinanderfolgender Lagen der Charakteristik.

ein Wulst (vgl. Nr. 283), denn die Ebene der Charakteristik geht, da sie immer normal auf der Kreisperipherie bleibt, in allen Lagen durch eine Gerade, welche im Mittelpunkte des Kreises senkrecht auf seiner Ebene steht und die Drehungsaxe des Wulstes abgibt.

Eine röhrenförmige Fläche, welche unter Anderem auch dadurch besonderes Interesse gewährt, daß sie eine Rückkehrcurve hat, wird später (Kap. V) noch zur Sprache kommen. Hier aber mag als Beispiel für die Zeichnung einer Röhrenfläche diejenige dienen, bei welcher der Mittelpunkt der Kugel eine Schraubenlinie durchläuft. Die Axe der Schraubenlinie sei senkrecht zur HE.

Der Umriß der Umhüllungsfläche auf einer der Grundebenen ist die Umhüllungslinie für die gleichnamigen Projectionen der fortschreitenden Charakteristik. Fig. 101. Diese Projectionen sind Ellipsen, welche in der großen Axe übereinstimmen, und diese dem Kugeldurchmesser gleichen Axen bleiben normal auf der Projection der Schraubenlinie, denn jede solche Axe ist (Nr. 240) parallel zur Spur der Normalebene, in welcher die betreffende Charakteristik liegt. Eine Lage der veränderlichen Ellipse wird von der nächsten Nachbarlage in Punkten geschnitten, die den Scheiteln unendlich nahe liegen, so daß die Umhüllungslinie der Ellipsen jede einzelne in den Scheiteln selbst berührt. Man kann daher den Umriß der Röhrenfläche als geometrischen Ort eines Punktes betrachten, welcher auf einer Normalen zur Projection der Schraubenlinie und von dieser um den Kugelhalbmesser entfernt liegt, folglich auch als Umhüllungslinie für den (aus einem größten Kreis bestehenden) Umriß der fortschreitenden Kugel, und diese letztere Auffassung läßt den verlangten Umriß am bequemsten zeichnen. * — Bei den in Fig. 101 gewählten Verhältnissen wird der horizontale Umriß durch zwei Kreise gebildet, welche mit der H-Projection der Schraubenlinie concentrisch sind und deren Halbmesser man erhält, wenn man den Halbmesser dieser Projection um den Kugelhalbmesser vermehrt und vermindert. Der verticale Umriß (im absoluten Sinne) besteht aus einzelnen getrennten Theilen. Denn wenn man die Kreise vom Punkte a″ aus bis zum Punkte c′ verfolgt und ihre obere Umhüllungslinie zieht, so bricht diese in einem Punkte ab, den man mit genügender Annäherung dorthin setzen kann, wo die berührende Curve an den um c′ beschriebenen Kreis stößt; von jenem Punkte aus läßt sich nämlich die Linie, welche bisher die successiven Kreise von außen berührt hat, nicht mehr in dieser Weise fortsetzen, weil der Punkt innerhalb des nächstfolgenden Kreises liegt. Folgt man der Umhüllungslinie vom Punkte x′ vorwärts und rückwärts, so kommt man aus ähnlichen Gründen auf zwei Punkte y′, z′, über welche sie nicht hinaus will. Derselbe Fall wiederholt sich für jeden Umgang der Schraubenlinie.

Dieses plötzliche Abbrechen einer nach bestimmtem Gesetze entstandenen Curve ist aber nur scheinbar; jene Punkte, in denen einzelne ihrer Zweige zu enden scheinen, sind Rückkehrpunkte der ununterbrochenen Curve; zwischen je zweien zum nämlichen Halbgang der Schraubenlinie gehörigen (wie y′ und v′) verläuft ein sie verbin-

---

* Man sieht, daß jede Normale für die Projection der Schraubenlinie zugleich eine Normale für den Umriß ist. Der Umriß ist eine „äquidistante“ Curve oder „Parallelcurve“ zu jener Projection.

dender Bogen, der seine Convexität gegen den benachbarten Doppelpunkt wendet und, in relativem Sinne, ebenfalls dem Umriß angehört (in der Figur aber nicht gezeichnet ist). Man sieht einen solchen Bogen am leichtesten entstehen, wenn man die Umrißlinie von dem Punkte beschreiben läßt, der auf der fortschreitenden Normalen der Curve a′b′c′d′... um den Kugelhalbmesser Abstand von letzterer hält. Will man aber den Umriß als Umhüllungslinie des beweglichen Kreises betrachten, so kommt der Bogen durch die successiven Durchschnitte von Kreislagen (deren Mittelpunkte sich zwischen c′ und b′, sowie zwischen c′ und d′ einschalten) ebenfalls zu Stande; nur reihen sich jetzt die Schnittpunkte auf den Kreisen in einem dem frühern entgegengesetzten Sinne aneinander und die betreffenden Kreislagen werden von innen durch den Bogen berührt. (Die zuerst citirte Erzeugungsart der Umrißlinie lehrt, daß die Rückkehrpunkte auf der Evolute der Curve a′b′c′d′.. liegen, und daß solche Rückkehrpunkte nur dann existiren, wenn der Kugelhalbmesser größer ist als der Krümmungshalbmesser der Curve a′b′c′d′ im Scheitel c′.)

307. (Umhüllte Cylinder.) Denkt man sich eine Cylinderfläche in unveränderlicher Verbindung mit einer Geraden, welche mit der Richtlinie des Cylinders einen rechten Winkel bildet, und bewegt den Cylinder um diese Gerade, so tritt als seine Umhüllungsfläche eine Drehungsfläche auf. Jeder Mantellinie des Cylinders entspricht als Umhüllungslinie ein Parallelkreis. Der Meridian der Drehungsfläche ergibt sich als Charakteristik der Umhüllungsfläche.

Jede durch Umhüllung einer constanten Kugel entstandene Fläche ist zugleich auch die Umhüllungsfläche eines Drehungscylinders, dessen Axe sich als Tangente der Curve fortschiebt, in welcher der Mittelpunkt der Kugel lief.

308. (Umhüllte Kegel.) Die umhüllte Fläche sei ein gerader Kegel, dessen Axe mit der Axe irgend einer Drehungsfläche zusammenfällt. Bewegt sich nun die Spitze des Kegels in der Drehungsaxe fort, und ändert sich dabei der Kegel so, daß die in eine bestimmte Meridianebene fallenden Mantellinien stets Tangenten an der Meridiancurve sind, so ist klar, daß als seine Umhüllungsfläche die Drehungsfläche selbst entsteht und als Charakteristik der veränderliche Parallelkreis dieser Fläche erscheint. (Die Spitze des Kegels kann sich dabei auch in unendliche Entfernung verlieren, so daß der Kegel in einen Cylinder übergeht.)

Die Spitze eines Kegels bewege sich in der Richtung einer Ellipsen-Axe; die in der Ebene der Ellipse liegenden Mantellinien seien Tangenten an dieser; die Basis des Kegels sei eine andere Ellipse, welche sich stets ähnlich bleibt und zu einer Axe die Verbindungslinie der Punkte

hat, in denen die erwähnten Mantellinien die Ellipse berühren; dann wird die Umhüllungsfläche des Kegels das (in Nr. 294, 1 aufgeführte) Ellipsoid sein. (Auf ähnliche Weise können die Flächen 2, 3, 4 der Nr. 294 als Umhüllungsflächen eines Kegels zum Vorschein kommen.)

309. Nach diesen zur Erläuterung ausgehobenen Beispielen wird man leicht weitere Beispiele verwandter Art, oder auch unter Annahme anderer Formen der umhüllten Fläche, finden können. (So entspricht einem Ellipsoid, welches sich ohne Drehung in seiner Axe verschiebt, als Umhüllungsfläche ein Cylinder; einem um eine seiner drei Axen sich drehenden Ellipsoid ein Paar zusammengehöriger Drehungsellipsoide, &c.)

Andererseits aber ist zu bemerken, daß nicht jeder Bewegung einer Fläche eine Umhüllungsfläche entspricht. Keine solche ergibt sich z. B., wenn eine Ebene parallel fortschreitet, oder eine Kugel bei unverändertem Mittelpunkt ihren Halbmesser nach irgend einem Gesetze ändert, oder wenn ein gerader Kegel (oder auch ein Drehungsparaboloid) sich in seiner Axe verschiebt.

Regelflächen.

310. Jede Fläche, welche durch Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden kann, wird eine Regelfläche (regelrechte Fläche) genannt, weil man auf ihr nach unendlich vielen Richtungen ein Lineal (eine „Regel") anlegen kann. Eine beliebige Lage der erzeugenden Geraden heißt (wie schon früher bei einzelnen Beispielen bemerkt wurde) eine Mantellinie.

Die Regelflächen zerfallen in zwei wesentlich verschiedene Klassen, indem je zwei aufeinanderfolgende Lagen der erzeugenden Geraden entweder in einerlei Ebene liegen oder nicht. Nennt man den unendlich schmalen Streifen der Fläche, welcher zwischen zwei solchen Lagen enthalten ist, ein Element der Fläche, so sind im erstern Falle die sämmtlichen Elemente eben, und es ist möglich, alle diese Elemente in ununterbrochener Folge in einer Ebene aneinander zu reihen oder die Fläche selbst ohne Riß und Falte in eine Ebene auszubreiten, weshalb eine solche Fläche entwickelbar heißt. Im zweiten Falle sind die Elemente nicht eben, die Fläche selbst wird demnach nicht zu einer Ebene ausgespannt werden können und heißt windschief (windisch, gewunden).

Entwickelbare Flächen können nur unter den Regelflächen vorkommen. Denn jede Fläche, welche sich zu einer ununterbrochenen Ebene ausbreiten läßt, muß auch umgekehrt aus einer Ebene hergestellt werden können, indem man diese in unendlich schmale Streifen bricht, deren jeder mit der Erweiterung des benachbarten einen sehr kleinen Winkel bildet. Eine Ebene läßt sich aber nur nach einer geraden Linie brechen (Nr. 5, IV), und deshalb muß die aus ihr gebildete Fläche unendlich viele gerade Linien enthalten oder eine Regelfläche sein.

A) Entwickelbare Flächen.

311. Die Umhüllungsfläche einer Ebene ist (nach Nr. 305) immer eine Regelfläche und zwar eine entwickelbare, welche die Charakteristik zur Erzeugenden hat. Umgekehrt kann jede entwickelbare Fläche (wenn sie nicht gerade eine Cylinder- oder Kegelfläche ist) als die Umhüllungsfläche einer Ebene angesehen werden, welche an einer gewundenen Curve stets Osculationsebene bleibt, und diese Curve ist die Rückkehrcurve. Oder man kann auch sagen, eine entwickelbare Fläche entstehe durch die Bewegung einer Geraden, welche an einer gewundenen Curve so fortgleitet, daß sie dieselbe fortwährend berührt. (Bei der Kegelfläche reducirt sich die Curve auf einen Punkt, durch welchen die Gerade beständig geht, und für die Cylinderfläche hat man diesen Punkt in unendlicher Entfernung zu denken.)

Ist auf einer entwickelbaren Fläche irgend eine Curve gezeichnet, so geht diese nach der Enwickelung in eine andere (ebene) Linie über, welche die Verwandelte der ersten heißt. Die Länge eines bestimmten Bogens einer solchen Linie kann sich durch die Entwickelung nicht ändern; deshalb ist auf einer entwickelbaren Fläche der kürzeste Weg zwischen zwei gegebenen Punkten diejenige Curve, deren Verwandelte eine Gerade gibt; und umgekehrt erhält man die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten, wenn man in der entwickelten Fläche diese Punkte durch eine Gerade verbindet und hierauf die Fläche zu ihrer ursprünglichen Gestalt zurückbiegt. Auf einer Cylinderfläche ist sonach die kürzeste Entfernung zweier Punkte ein Bogen einer Schraubenlinie im weitern Sinne (vgl. Nr. 253).

Die Winkel, unter denen eine auf der Fläche liegende Curve C die einzelnen Mantellinien schneidet, bleiben offenbar auch nach der Entwickelung dieselben. (Wenn daher eine Cylinderfläche durch eine Ebene senk-

recht zur Erzeugenden geschnitten wird, so muß die Verwandelte des Schnittes eine Gerade geben, weil die Elemente des Schnittes senkrecht auf den Mantellinien stehen.) — Die Winkel, unter welchen die Elemente der Curve C aneinanderstoßen (die Contingenzwinkel), werden sich durch die Entwickelung ändern, mithin auch die Krümmung der Curve. Nur in dem Falle erleiden jene Winkel keine Aenderung, wenn die Curve C die Rückkehrcurve ist. Denn bedeutet M_0 die Mantellinie, bei welcher man die Entwickelung beginnt, und M_1, M_2, M_3 ... die zunächst folgenden Mantellinien, von denen jede die vorhergehende schneidet, so dreht man, behufs der Entwickelung, zuerst das Flächenelement [M_0, M_1] (d. h. die unendlich schmale Ebene zwischen M_0 und M_1) um M_1 so lange, bis es in einerlei Ebene mit dem Elemente [M_1, M_2] liegt; dann dreht man die Ebene [M_0, M_2] um M_2, bis sie in die Erweiterung der Ebene [M_2, M_3] fällt, u. s. f.; nun ändert aber ein Winkel seine Größe nicht, wenn man ihn um den einen Schenkel dreht; daher bleiben die Winkel zwischen den einzelnen Mantellinien immer dieselben, und diese Winkel sind eben die Contingenzwinkel der Rückkehrcurve, da die Mantellinien als die verlängerten Elemente der letztern betrachtet werden.

Diejenigen Flächen, deren Entwickelung in den Anwendungen der descriptiven Geometrie am häufigsten begehrt wird, sind die Kegel- und Cylinderflächen, und von ihrer Entwickelung wird später (im vierten und fünften Kapitel) gehandelt werden. Jede andere, durch die Projectionen ihrer Rückkehrcurve gegebene entwickelbare Fläche wird man mit Annäherung dadurch in eine Ebene ausbreiten können, daß man an die Stelle der Rückkehrcurve eine ihr nahekommende gebrochene Linie und demgemäß an die Stelle der stetigen krummen Fläche eine gebrochene Fläche setzt. Doch läuft man dabei auch bei sorgfältiger Ausführung immer Gefahr, zu fehlen. Daher ist es stets von Vortheil, wenn man auf der zu entwickelnden Fläche eine Curve findet, deren Verwandelte sich zum Voraus bestimmen läßt, indem man dann diese Verwandelte der ganzen Entwickelung zu Grunde legen kann. Ein solcher Fall soll hier betrachtet werden.

Entwickelbare Schraubenfläche.

312. Eine Gerade, welche an einer Schraubenlinie so hingleitet, daß sie stets Tangente bleibt, erzeugt die entwickelbare Schrauben-

fläche. Um diese Fläche darzustellen, könnte man zuerst die Schraubenlinie projiciren und dann eine Anzahl ihrer Tangenten zeichnen. Leichter und genauer aber ist das folgende Verfahren.

Fig. 102. Denkt man sich die Axe der Schraubenlinie senkrecht zur HE, so liegen die H-Spuren ihrer sämmtlichen Tangenten in der Evolvente APX des Kreises Abc.., welcher ihre H-Projection vorstellt (Nr. 254, Zus. 3), und diese Evolvente ist demnach die H-Spur der Fläche selbst. Mit der Zeichnung derselben (nach Nr. 213) beginne man die Darstellung. In der H-Spur der Schraubenlinie, welche man am besten in den Punkt A legt, wo die Kreistangente dem Grundschnitt parallel ist, entspringt die Evolvente, und wenn sie diese Tangente wieder erreicht (in X, wobei AX = der rectificirten Kreisperipherie), hat die Erzeugende der Fläche einen Umgang der Schraubenlinie durchlaufen. Um die V-Projection a″x′ der letzten Mantellinie (welche X als H-Spur und AX als H-Projection hat) zu erhalten, mache man a′a″ gleich der Ganghöhe der Schraubenlinie. Es stellt dann a″x′ die wahre Länge der in (X, x′) und (A, a″) begrenzten Erzeugenden und also zugleich die Rectification des Schraubenganges dar (Nr. 254, Zus. 1). Legt man durch (A, a″) parallel zur HE eine Ebene, welche in a″y′ ihre V-Spur hat und die Deck-Ebene heißen möge, so sind die zwischen dieser und der HE enthaltenen Stücke aller Mantellinien von einerlei Größe, da (nach Nr. 254, Zus. 2) diese Mantellinien einerlei H-Neigung haben; daher sind auch die H-Projectionen aller dieser Stücke gleichgroß (Nr. 77, I), nämlich = AX. Wenn man also die V-Projection der Mantellinie finden will, welche W zur H-Spur und die Kreistangente Wev zur H-Projection hat, so mache man Wv = XA, bestimme die zu v gehörige, in a″y′ gelegene V-Projection v′, und ziehe w′v′. Auf diese Weise kann man zu beliebig vielen Mantellinien die V-Projectionen zeichnen, und die Umhüllungslinie derselben gibt dann die V-Projection der Schraubenlinie. — Die Curve, welche durch die Schnitte der Mantellinien in der Deck-Ebene sich bildet und welche sich auf die HE unverändert nach A..q..y projicirt, ist eine Evolvente des Kreises, in welchem die Deck-Ebene den Schraubencylinder schneidet; ihre H-Projection Aqy liegt mit der Evolvente APX symmetrisch gegen Ao und tritt an die Stelle des zweiten Zweiges von APX.

Anmerk. Was in Fig. 102 dargestellt ist, ist nur ein Stück der Schraubenfläche. Um sich zu einer allgemeinen Vorstellung von der ganzen Fläche zu erheben,

hat man sich die Schraubenlinie (Abc.., a'b'c'...) über (A, a'') hinauf und unter (A, a') hinab durch beliebig viele Umgänge fortgesetzt zu denken, und jede einzelne Lage der Erzeugenden ohne Grenzen zu nehmen. Die vollständige H-Spur der Fläche wird die ohne Ende fortlaufende Evolvente des Kreises Abc. (Die Spuren derjenigen Mantellinien, welche die fortgesetzte Schraubenlinie unterhalb der HE berühren, fallen in den Zweig Aqy... der Kreisevolvente.)

313. Trägt man auf jeder Tangente der Schraubenlinie vom Berührungspunkte aus ein constantes Stück (immer nach der nämlichen Seite hin) ab, so ist der Ort für die Endpunkte dieser Stücke eine zweite Schraubenlinie, welche mit der ersten einerlei Ganghöhe und einerlei Axe hat.

Fällt man nämlich aus dem Berührungspunkt (d, d') einer Tangente und dem Endpunkte (δ, δ') des auf ihr abgetragenen Stückes Lothe auf die Axe der Schraubenlinie, so bilden jene Punkte und die Fußpunkte der Lothe die Ecken eines unebenen Vierecks, welches seine Lage, aber nicht seine Gestalt ändert, wenn man die Tangente mit einer andern vertauscht; denn die Tangente bleibt mit dem erstgenannten Lothe (do, d'o') in unveränderlicher Verbindung, weil sie selbst senkrecht auf diesem steht (Nr. 87, Zus. 2) und immer die nämliche H-Neigung behält. Während der Punkt D die gegebene Schraubenlinie durchläuft und das Viereck in Mitbewegung versetzt, legen die beiden Lothe stets gleichzeitig gleiche Drehungswinkel und ihre Fußpunkte gleiche Strecken auf der Axe zurück; jeder der Punkte (d, d'), (δ, δ') hat sich um die Ganghöhe der gegebenen Schraubenlinie erhoben, wenn die Drehung 360° erreicht hat; hieraus (und aus der Note auf S. 217) folgt der oben ausgesprochene Satz. *

Je nach der Länge des constanten Stücks zwischen (d, d') und (δ, δ') kann letzterer Punkt jeden Punkt der Tangente bedeuten. Läßt man also an der gegebenen Schraubenlinie die Tangente gleiten, so beschreiben die sämmtlichen Punkte der letzteren neue Schraubenlinien. Wenn dagegen die Fortbewegung der Tangente wälzend ist, so beschreiben die sämmtlichen Punkte Evolventen von gleichen Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Schraubenaxe und deren Ebenen senkrecht zu dieser Axe liegen. Diese Evolventen ergeben sich auch als Schnitte der Schraubenfläche durch Ebenen senkrecht zur

---

* Zugleich ist damit der allgemeinere Satz nachgewiesen, daß, wenn irgend ein an sich unveränderliches Gebilde um zwei seiner Punkte gedreht wird, während zugleich diese Punkte auf der sie verbindenden Axe proportional mit der Drehung fortrücken, alle Punkte des Gebildes Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe um die gemeinschaftliche Axe beschreiben.

Axe; jene Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe als Schnitte der Fläche durch Drehungscylinder, deren Axe mit der Axe der Schraubenfläche zusammenfällt. (Die in der Figur gezeichnete Schraubenlinie dieser Art wurde gefunden, indem man zuerst um o den Kreis $T\gamma\delta\varepsilon$.. beschrieb und zu den Punkten, wo dieser die H-projicirten Mantellinien trifft, die V-Projectionen t′, γ′,... auf den V-Projectionen der Mantellinien bestimmte.)

314. Eine Ebene, welche durch eine Tangente PR an der Spur der Schraubenfläche und durch die im Berührungspunkte eintreffende Mantellinie PD geht, ist eine Berührungsebene der Fläche, zugleich aber auch (Nr. 256, †) Osculationsebene der Schraubenlinie im Punkte D; denn sie enthält das aus D auf die Axe gefällte Loth DO, weil DO || PR. Da nun DP ⊥ PR, so hat die Berührungsebene dieselbe H-Neigung wie die Mantellinie, mithin eine unveränderliche. Hieraus ergibt sich das Bewegungsgesetz, welches eine Ebene einzuhalten hat, damit sie eine entwickelbare Schraubenfläche als Umhüllungsfläche erzeuge; die Ebene muß nämlich so fortschreiten, daß sie beständig eine Kreisevolvente berührt und gegen deren Ebene eine constante Neigung behält.

315. Bei der Entwickelung der Schraubenfläche verwandelt sich die Schraubenlinie (Abc..., a′b′c′...) in einen Kreis. Denn es kann die Schraubenlinie, da sie die Rückkehrcurve der Fläche ist, ihre Contingenzwinkel (oder ihre Krümmungshalbmesser) durch die Entwickelung nicht ändern (Nr. 311); nun ist aber ihre Krümmung durch alle Punkte constant (Nr. 256); daher muß auch ihre ebene Verwandelte von durchaus gleicher Krümmung sein, und dieser Bedingung entspricht unter allen ebenen Curven blos der Kreis. Der Halbmesser der kreisförmigen Verwandelten ist, als Krümmungshalbmesser der gegebenen Schraubenlinie, nach Nr. 256, †† zu finden.

Die Tangenten der ursprünglichen Schraubenlinie sind nach der Entwickelung Tangenten an ihrer Verwandelten. Wegen der gleichen Länge der Strecken (cγ, c′γ′), (dδ, d′δ′), (eε, e′ε′).. liegen dann die Punkte, welche den Endpunkten (γ, γ′), (δ, δ′), (ε, ε′)... entsprechen, ebenfalls in einem Kreise, welcher mit jener Verwandelten concentrisch ist. In solche Kreise verwandeln sich also alle die Schraubenlinien, nach denen die Fläche von concentrischen Cylindern (Nr. 313) geschnitten werden kann.

Hieraus ergibt sich ein Mittel, den Halbmesser für die Verwandelte der gegebenen Schraubenlinie (und also den Krümmungshalbmesser dieser Schraubenlinie selbst) anders als durch die in Nr. 256 angegebene Construction zu erhalten. Weil (Nr. 314) eine Berührungsebene GKC der Schraubenfläche als eine Umhüllte, also KC als Charakteristik angesehen werden kann, muß die Ebene GKC die Schraubenfläche in allen Punkten der KC berühren (Nr. 304), mithin enthält die Ebene auch die Gerade, welche die Schraubenlinie ($\gamma\delta\varepsilon$.., $\gamma'\delta'\varepsilon'$..) in ($\gamma$, γ') berührt. Die V-Projection dieser Geraden fällt hier mit der V-Projection der KC zusammen; die H-Projection ist die Tangente γG des Kreises T$\gamma\delta$. Denkt man sich nun die Schraubenfläche so entwickelt, daß sie sich in die Ebene GKC oder Kk'c' ausbreitet, so bleiben die Linien (cγ, c'γ'), (Gγ, k'γ') Tangenten an den Verwandelten der beiden Schraubenlinien. In der horizontalen Umklappung der Ebene Kk'c' erhalten diese beiden Tangenten die Lagen KC_1 und $G\Gamma_2$ (vgl. Nr. 62, ††), und wenn man aus den Umklappungen C_1, Γ_1 der Berührungspunkte Senkrechte auf KC_1 und $G\Gamma_1$ errichtet, so gibt ihr Durchschnitt M_1 den umgeklappten Mittelpunkt der beiden Verwandelten, welche aus den Schraubenlinien hervorgehen; M_1C_1 ist der Krümmungshalbmesser der gegebenen Schraubenlinie.

Es ist nun nicht mehr schwer, den entwickelten Mantel der Schraubenfläche selbst irgendwo in der HE zu zeichnen. Man beschreibe um M einen Kreis $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{A}_2$ mit dem Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie (Abc.., a'b'c'..). Macht man arc. $\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1$ = arc. $\mathfrak{C}\mathfrak{A}_2$ = $\frac{1}{2}$ x'a" (vgl. Nr. 312), so ist arc. $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ die Verwandelte des Schraubenganges zwischen (A, a') und (A, a"). Die Punkte der ursprünglichen Schraubenlinie, deren Projectionen die Projection Abc.. derselben in gleiche Theile zerlegt haben, findet man in der Verwandlung wieder durch entsprechende Theilung des Bogens $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$. Wenn man von den Theilpunkten des Bogens aus auf den durch sie gelegten Tangenten die wahren Längen der Stücke abträgt, welche auf den zugehörigen Mantellinien zwischen der Schraubenlinie und der H-Spur ASKX der Schraubenfläche enthalten sind, so findet man die Verwandelte dieser Spur. Entspricht z. B. $\mathfrak{B}\mathfrak{S}$ der Mantellinie (bS, b's'), so ist $\mathfrak{S}$ ein Punkt der verwandelten ASKX, wenn $\mathfrak{B}\mathfrak{S}$ = BS. Es ist aber BS an Länge dem rectificirten Bogen der Schraubenlinie zwischen A und B gleich (Nr. 254, Zus. 1) und dieser Bogen hat wieder einerlei Länge mit dem Bogen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}$ des Kreises $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{A}_2$, so daß also $\mathfrak{B}\mathfrak{S}$ = arc $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}$; daher liegt $\mathfrak{S}$ auf der Evolvente des Kreises $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{A}_2$, welche in $\mathfrak{A}_1$ entspringt. Da man nun auf dieselbe Bemerkung kommt, wenn man statt $\mathfrak{B}\mathfrak{S}$ irgend eine andere Tangente des Kreises $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{A}_2$ betrachtet, so ist klar, daß die Verwandelte der ASKX keine andere Linie sein

kann als jene Evolvente. Man kann hiernach die Entwickelung desjenigen Mantels der Schraubenfläche, welche durch ihre H-Spur und durch die Schraubenlinie (Abc.., a'b'c'..) begrenzt wird, leicht zeichnen. Die Entwickelung des andern Mantels (zwischen der Schraubenlinie und der Deck-Ebene) liefert eine zweite Evolvente des Kreises $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C} \mathfrak{A}_2$, welche in $\mathfrak{A}_2$ entspringt.*

Auch für jeden andern zur Axe senkrechten Schnitt der Fläche ergibt sich als Verwandelte eine Evolvente des Kreises $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$; der Ursprung der Evolvente wechselt, je nach dem Punkte, in welchem die schneidende Ebene die Schraubenlinie trifft.

B) Windschiefe Flächen.

316. Wenn eine Gerade sich nach einem Gesetze bewegt, in welchem nicht direkt ausgesprochen ist, daß sie immer durch einen Punkt gehen oder einer Richtlinie parallel bleiben oder eine gewundene Curve berühren muß, so kann die von der Geraden erzeugte Fläche zuweilen ausnahmsweise zu den entwickelbaren gehören; im Allgemeinen aber wird sie eine windschiefe sein. Welche Bedingungen überhaupt für die Lage einer Geraden gestellt werden können, damit diese weder völlig bestimmt noch einer gesetzlosen Bewegung überlassen, sondern auf einen geometrischen Ort beschränkt sei, ist an Beispielen zu zeigen.

1) Eine Gerade ist bestimmt (d. h. entweder auf eine einzige Lage oder doch wenigstens auf eine bestimmte Anzahl von Lagen beschränkt), wenn sie durch einen gegebenen Punkt P gehen und zwei gegebene Linien A, B schneiden soll. Denn ihr geometrischer Ort ist einerseits die Kegelfläche, welche P zur Spitze und A zur Leitenden hat, andererseits die Kegelfläche, welcher P als Spitze und B als Leitende entspricht; zwei Kegelflächen aber, welche eine gemeinschaftliche Spitze P haben, können, wenn sie überhaupt zum Durchschnitte kommen, nur eine oder mehrere gerade Linien gemein haben. (Sind A und B selbst gerade Linien, so gehen die oben erwähnten Kegelflächen in Ebenen über.)

Es folgt hieraus, daß das Bewegungsgesetz einer Geraden G völlig gegeben ist,

---

* Ein Modell der entwickelbaren Schraubenfläche läßt sich entweder aus Pappe herstellen (indem man die beiden Figuren AKX, A''QY, welche durch die in der HE und der Deck-Ebene gelegenen Evolventen begrenzt werden, sowie die Entwickelungen beider Mäntel, ausschneidet und diese vier Stücke gehörig zusammenfügt), oder auch mit Hülfe ausgespannter Fäden (in welchem Falle man in zwei parallel verbundenen Ebenen jene Evolventen in der erforderlichen gegenseitigen Stellung zeichnet und je zwei entsprechende Punkte durch einen Faden verbindet, welcher dann eine Mantellinie vorstellt).

wenn sie beständig drei gegebene Linien A, B, C schneiden soll; man darf, um dieß einzusehen, nur statt des Punktes, der oben mit P bezeichnet wurde, nach und nach alle Punkte der Linie C eintreten lassen. Die Linien A, B, C heißen die Leitenden der erzeugten Fläche.

2) Man lasse eine Gerade G auf zwei Leitenden A, B beständig aufliegen, während sie zugleich einer gegebenen Ebene E (der Richt-Ebene) parallel bleibt. Dadurch ist die Bewegung der G bestimmt. Denn ist P ein Punkt in A, so ist die durch sie gehende Lage der G ein Schnitt einer durch P parallel zu E geführten Ebene und einer Kegelfläche, welche P zur Spitze und B zur Leitenden hat (und in eine Ebene übergeht, falls B gerade ist). Läßt man demnach den Punkt P die Linie A durchlaufen, so entsprechen seinen einzelnen Lagen bestimmte Lagen der G.

Ist eine von den Leitlinien A, B gerade, so nennt man die erzeugte Fläche ein Conoid, und zwar ein senkrechtes in dem besondern Falle, wo diese leitende Gerade senkrecht auf der Richt-Ebene steht.

3) Der Ort einer Geraden G, welche durch einen gegebenen Punkt P geht und eine gegebene Fläche F berührt, ist eine Kegelfläche, und der Ort des Berührungspunktes eine auf F liegende Curve B. Soll die G zugleich eine gegebene Linie A schneiden, so bestimmt sie sich als Durchschnitt jener Kegelfläche und einer andern, welche mit der erstern die Spitze P gemeinschaftlich hat und zur Leitenden die Linie A. Denkt man sich nun den Punkt P auf einer gegebenen Linie C fortschreitend, so überzeugt man sich wie in (1), daß das Bewegungsgesetz der G gegeben ist, wenn sie auf zwei Leitlinien A, C aufliegen und eine gegebene Leitfläche F berühren soll.

4) Auf ähnliche Weise zeigt sich, daß eine Gerade G eine stetige Fläche erzeugt, wenn sie fortwährend auf einer Leitlinie A aufliegt und eine Leitfläche berührt, während sie zugleich einer Richt-Ebene parallel bleibt.

Ist hiebei A gerade, so rechnet man die erzeugte Fläche zu den Conoiden.

Eine Fläche wird auch als Ort einer Geraden entstehen, welcher man zur Bedingung macht, daß sie

5) zwei Leitflächen berühre und eine Leitlinie schneide, oder auch

6) drei Leitflächen berühre.

7) Eine Gerade G bewegt sich gesetzmäßig, wenn sie eine gegebene Linie A stets unter dem nämlichen Winkel schneidet und dabei auf einer zweiten gegebenen Linie B aufliegt. Denn ist P irgend ein Punkt in A, so ist der Ort der durch P gehenden Lage von G ein Drehungskegel, welcher zur Axe die Tangente der A für den Punkt P hat; und diese Lage selbst bestimmt sich, indem dieser Kegel durch die Linie B in bestimmten Punkten geschnitten wird.

8) Ferner könnte man der beweglichen Erzeugenden G aufgeben, zwei gegebene Leitlinien A, B oder auch zwei Bögen A, B einer und derselben gewundenen Leitlinie so zu schneiden, daß das zwischen den Schnittpunkten enthaltene Stück von constanter Größe r bleibt. Ist P ein Punkt in A, und wird eine um P mit dem Halbmesser r beschriebene Kugel von B in Q geschnitten, so ist PQ eine Lage der Erzeugenden.

Daß die auf solchen Wegen erhaltenen Flächen in der Regel windschiefe sein werden, geht aus folgender Betrachtung hervor. Da in

den Fällen, wo eine Leitfläche gegeben ist, diese auch durch eine Leitcurve ersetzt werden kann (durch den Ort des Punktes nämlich, in welchem die Erzeugende die Leitfläche berührt), so hat bei jeder der aufgeführten Erzeugungsarten die bewegliche Gerade zwei Linien A, B zu schneiden und daneben eine dritte Bedingung zu erfüllen. Sind diese Linien gerade, so würden zwei aufeinanderfolgende Lagen der Erzeugenden nur dann in einer Ebene liegen, wenn A, B selbst in einer Ebene lägen, was nicht vorausgesetzt ist. Sind A, B Curven, und werden diese von irgend einer Lage der Erzeugenden in den Punkten 𝔄, 𝔅 geschnitten, so gleitet die Erzeugende beim Uebergang in eine nächstfolgende Lage durch die an jenen Punkten beginnenden Curvenelemente fort, oder sie bleibt während dieser unendlich kleinen Bewegung auf den zwei Tangenten der Curven in 𝔄 und 𝔅, welche im Allgemeinen nicht in einer Ebene liegen werden. Aehnliches gilt, wenn A eine Gerade und B eine Curve ist.

Einmanteliges Hyperboloid.

317. Das einmantelige Drehungs-Hyperboloid ist eine windschiefe Fläche, da zwei Lagen der erzeugenden Geraden, auch wenn man sie noch so nahe aneinander rückt, nie in einerlei Ebene fallen. Diese Fläche ist das Resultat einer in Nr. 316 nicht aufgeführten Bewegung; man kann aber sogleich mehrere der dort genannten Erzeugungsarten auf sie anwenden, wenn man die leitenden Linien oder Flächen passend wählt. Sie kann nach (1) entstehen, indem man zu Leitenden entweder drei von den Mantellinien desjenigen Systems nimmt, zu welchem die Erzeugende nicht gehört; oder den Aequator, den Grundkreis und Deckkreis; oder überhaupt irgend drei Parallelkreise. Ferner läßt sich die Fläche nach (7) oder (8) erzeugen, wobei irgend zwei Parallelkreise als Leitende dienen.

Denkt man sich durch zwei Punkte P, P′ der Meridianhyperbel, welche symmetrisch gegen die imaginäre Axe liegen, Tangenten an die Hyperbel gelegt, so müssen sich diese auf der imaginären Axe schneiden; ein Kreis, welcher die Tangenten in den Punkten P, P′ berührt, hat seinen Mittelpunkt auf der imaginären Axe und berührt auch die Hyperbel in P und P′; eben so kann man um einen beliebigen Punkt der imaginären Axe einen zweiten Kreis beschreiben, der die Hyperbel in zwei Gegenpunkten berührt. Bei Drehung um die Axe erzeugen die erwähnten zwei Kreise Kugeln, welche das Hyperboloid nach Parallelkreisen berühren

und von jeder einzelnen Lage der erzeugenden Geraden berührt werden müssen. Daher kann man auch das Bewegungsgesetz dieser Erzeugenden dahin aussprechen, daß sie beständig jene zwei Kugeln berührt und einen Parallelkreis schneidet (5), oder auch eine Kugel berührt und zwei Parallelkreise schneidet (3), oder endlich beide Kugeln und eine dritte auf ähnliche Art entstandene Kugel berührt (6).

Anmerk. Denkt man sich eine Ebene so liegend, daß sie zwei solche Kugeln berührt, so läßt sich (unabhängig von Nr. 297) leicht zeigen, daß der Schnitt der Ebene und des Hyperboloids eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, je nachdem die Kugeln auf verschiedenen Seiten oder auf einerlei Seite der schneidenden Ebene liegen. Der in in Nr. 233 enthaltene Nachweis elliptischer und hyperbolischer Schnitte eines geraden Kegels paßt nämlich auch auf das Drehungshyperboloid.

318. Nicht nur das durch Drehung erzeugte, sondern überhaupt jedes einmantelige Hyperboloid ist eine windschiefe Fläche, indem zwei einander beliebig nahe gerückte Mantellinien desselben (Nr. 301), sofern sie nur dem nämlichen System angehören, nie in einer Ebene liegen. Jedes einmantelige Hyperboloid kann durch eine Gerade des einen Systems erzeugt werden, wenn irgend drei Gerade des andern Systems gegeben sind, indem erstere die drei letztern fortwährend schneiden muß; oder auch mit Hülfe anderer Leitlinien, z. B. wenn drei von den elliptischen Schnitten gegeben sind, welche auf dem Hyperboloide durch drei zur imaginären Axe senkrechte Ebenen hervorgebracht werden.

319. Ein einmanteliges Hyperboloid, dessen imaginäre Axe senk- Fig. 103.
recht auf der HE steht, habe (o, o′) zum Mittelpunkt; die durch diesen Mittelpunkt gehende Lage der Erzeugungsellipse (welche Lage man die Aequatorial-Ellipse nennt) habe die Halbaxen OK, OJ, von denen die letztere (die kleinere) senkrecht auf der VE stehen soll; die große Halbaxe für die elliptische H-Spur der Fläche sei oA (= oB). Diese H-Spur, für welche man die zweite Halbaxe oC * und die Peripherie leicht zeichnen kann, ist zugleich die H-Projection einer dritten Ellipse, deren zur HE parallele Ebene (a″b″) vom Mittelpunkte (o, o′) eben so weit absteht wie dieser von der HE; daher ist das Hyperboloid selbst bestimmt (Nr. 318). Man denke sich dasselbe aus einem Drehungshyperboloid, dessen H-Spur den Durchmesser AB und dessen horizontale

* oC : oA = oi : ok.

Aequator-Projection den Durchmesser kl (= 2·ok) hat, durch Ableitung entstanden, indem aus allen Punkten des Drehungshyperboloids Senkrechte auf dessen Hauptmeridianebene (AB) gefällt und in dem Verhältnisse ok:oi verkürzt wurden. Ist (Sr, s′r″) irgend eine Mantellinie des Drehungshyperboloids, so liegt die ihr im andern Hyperboloid entsprechende Mantellinie in der nämlichen v-projicirenden Ebene, hat also auch die nämliche V-Projection s′r″. Die zugehörige H-Projection 𝔖𝔯 findet man, wenn man aus S und r Senkrechte auf AB fällt und die Punkte 𝔖, 𝔯 verbindet, in denen diese Senkrechten die Peripherie der Ellipse ACB treffen (oder, wenn die Peripherie ACB noch nicht gezeichnet ist, unmittelbar aus den Ableitungen der Punkte S, r). Da die H-Projection kil der Aequatorial-Ellipse die Ableitung des von der Sr berührten Kreises über kl ist, muß 𝔖𝔯 Tangente an der Ellipse kil sein.

Hiernach kann man folgende **Aufgaben** lösen.

1) Die beiden Mantellinien zu projiciren, welche durch den in q horizontal projicirten Punkt Q des Hyperboloids gehen, wenn zugleich bekannt ist, auf welcher Seite der Aequatorial-Ebene der Punkt Q liegt.

Fig. 103. Die H-Projectionen der gesuchten Mantellinien sind zwei durch q gehende Tangenten 𝔖𝔯, 𝔘𝔳 an der H-Projection kil der Aequatorial-Ellipse; die V-Projectionen s′r″, 𝔲′𝔳″ findet man, wenn Q unterhalb der Aequatorial-Ebene liegen soll, mittels der H-Spuren 𝔖, 𝔘 und der in 𝔯, 𝔳 horizontal projicirten Punkte, wo die Mantellinien die Ellipse (ABC, a″b″) treffen. (Den Berührungspunkten x, y müssen als V-Projectionen die Schnittpunkte der k′l′ mit s′r″ und 𝔲′𝔳″ entsprechen.)

Soll aber Q oberhalb der Ebene KL liegen, so haben die durch ihn gehenden Mantellinien ihre H-Spuren nicht in 𝔖, 𝔘, sondern in 𝔯, 𝔳, und daher zu V-Projectionen die Linien r′s″, 𝔳′𝔲″.

Entweder der Schnitt q′ der s′r″ und 𝔲′𝔳″ oder der Schnitt q″ der r′s″ und 𝔳′𝔲″ ist die V-Projection des Punktes Q, so daß durch die vorigen Constructionen zugleich die Aufgabe gelöst ist:

2) Die V-Projection zu einem Punkte des Hyperboloids zu finden, für welchen die H-Projection q gegeben ist (vgl. Nr. 295).

Hier läßt sich auch noch die Aufgabe anschließen:

3) Die H=Spur und den verticalen Umriß des asymptotischen Kegels zu zeichnen.

Für das Drehungshyperboloid, aus welchem das neue Hyperboloid abgeleitet wurde, ist der asymptotische Kegel nach Nr. 292 zu finden; sein Vertical=Umriß m′o′n′ gilt zugleich für den asymptotischen Kegel des neugebildeten Hyperboloids (da die in die Hauptmeridianebene fallenden Punkte keine Aenderung ihrer Stellung erleiden); seine kreisförmige H=Spur verwandelt sich beim Uebergang auf das neue Hyperboloid in eine der ABC ähnliche Ellipse, welche über dem Durchmesser mn jener kreisförmigen Spur als großer Axe beschrieben ist.

320. Aus der vorigen Nummer ergibt sich ein einfacher Weg, zu anschaulicher Darstellung eines Hyperboloids mittels der Projectionen eines Systems seiner Mantellinien zu gelangen.

Man errichte über der zum Grundschnitt parallelen großen Axe AB Fig. 104. einer Ellipse ACB, welche man für die H=Spur des Hyperboloids gelten lassen will, einen Halbkreis, theile diesen in gleiche Theile AI, III, IIIII,.... und fälle aus den Theilpunkten I, II, III,... Senkrechte auf AB, wodurch sich auf der Ellipse die Theilpunkte 1, 2, 3..., (1), (2), (3)... ergeben.* Eine zum Grundschnitt parallele Gerade a″b″ sei die V=Projection derjenigen Ellipse, deren H=Projection mit ACB zusammenfällt. Verbindet man nun zwei Theilpunkte A, 8, hierauf 1, 9, dann 2, 10, u.s.f., so hat man die H=Projectionen verschiedener Mantellinien, deren V=Projectionen a′8′,..... leicht zu finden sind. Der Vertical=Umriß der Fläche ergibt sich als Umhüllungslinie der vertical projicirten — die H=Projection der Aequatorial=Ellipse als Umhüllungslinie der horizontal projicirten Mantellinien.**

Die Projectionen des zweiten Systems der Mantellinien würden

---

* Man braucht nicht einmal die Ellipse ACB vorher zu zeichnen, sondern kann diejenigen ihrer Punkte, welche den Theilpunkten des Kreises A..B entsprechen, dadurch finden, daß man die aus den Kreispunkten I, II, III... auf AB gefällten Senkrechten in constantem Verhältnisse verkürzt. Wie eine solche Verkürzung am leichtesten auszuführen, zeigt Figur 105 (vgl. Nr. 227).

** Um ein Modell des Hyperboloids anzufertigen, zeichne man die Ellipsen (AB, a′b′) und (AB, a″b″) in zwei parallelen Ebenen und verbinde die entsprechenden Theilpunkte durch straffgespannte Fäden. Zugleich kann man mit Hülfe der nämlichen Theilpunkte das zweite System seiner Mantellinien auf ähnliche Weise darstellen.

auf die Projectionen des ersten Systems fallen. Will man dieses zweite System in die Darstellung mit aufnehmen, so sind die sämmtlichen Projectionen voll auszuziehen; denn jede Projection gilt dann für zwei Mantellinien zugleich, und zwar so, daß immer das unsichtbare (punktirte) Stück der einen mit dem sichtbaren Stück der andern zusammentrifft.

321. Zwei durch die Scheitel K, L der Aequatorial-Ellipse (Fig. 103) senkrecht zur Axe KL gelegte Ebenen haben mit dem Hyperboloid zwei Paare gerader Linien gemein und sind zugleich Berührungs-Ebenen (S. 267; Nr. 302); die Linien jedes Paares liegen symmetrisch gegen die Hauptebene AOB. In Fig. 104 (an welcher alle Dimensionen der Fig. 103 beibehalten sind) ist je eine Linie von jedem Paar projicirt; die H-Projectionen liegen in 4 (4) und (8) 8; die wahren Linien seien durch M_4 und M_8 bezeichnet, die denselben H-Projectionen entsprechenden Mantellinien des zweiten (in Fig. 104 nicht berücksichtigten) Systems durch N_4, N_8. Die Geraden M_4, N_8 und die Axe KL der Aequatorial-Ellipse liegen in einer Ebene, ebenso die drei Geraden N_4, M_8, KL; die erstere Ebene heiße E_4, die andere $E_{(4)}$. Diese Ebenen werden mit den Linien M_4, N_4 die Neigung gegen die Symmetralebene AOB ändern, wenn das Hyperboloid seine Verhältnisse ändert; sie bleiben aber fortbestehen, auch wenn (auf die in Nr. 303 erläuterte Art) die in AB projicirte Hyperbel und in Folge davon die Ellipse über KL der parabolischen Form angenähert worden sind. Hat sich der Scheitel L so weit entfernt, daß die in seiner Nähe befindlichen Flächentheile der Construction unzugänglich werden, so bleibt die Ebene E_4 durch die Geraden M_4 und KO, die Ebene $E_{(4)}$ durch N_4 und KO bestimmt. Das in der Fig. 104 dargestellte System von Mantellinien heiße das System 𝔐, das andere das System 𝔑. Denkt man sich nun das Hyperboloid durch drei Mantellinien des Systems 𝔐 bestimmt (Nr. 318) und unter diese die Linie M_8 aufgenommen, so werden alle Lagen der Erzeugenden die Ebene $E_{(4)}$ unter äußerst kleinen Winkeln schneiden, wenn die Axe KL äußerst groß geworden ist; beim Uebergang des Hyperboloids in ein hyperbolisches Paraboloid fällt mit dem Punkte L die ganze Linie M_8 in unendliche Entfernung (da alle ihre Punkte den Abstand KL von der Ebene M_4N_4 hatten) und die Lagen der Erzeugenden, d. h. die Mantellinien des Systems 𝔑, sind der Ebene $E_{(4)}$ parallel. War aber ursprünglich das Hyperboloid durch drei Linien des Systems 𝔑 bestimmt

und unter diesen die N_8, so lehren die nämlichen Schlüsse, daß beim Uebergang in das Paraboloid die Mantellinien des Systems $\mathfrak{M}$ parallel zur Ebene E_1 werden.

322. Wählt man auf einem Hyperboloid drei Mantellinien M_1, M_2, M_3 des einen Systems beliebig aus und fügt die ihnen der Reihe nach parallelen Mantellinien N_1, N_2, N_3 des andern Systems hinzu, so entsteht ein unebenes Sechseck, an welchem je zwei parallele Seiten Gegenseiten sind. Je zwei aufeinanderfolgende Seiten bestimmen eine Berührungsebene des Hyperboloids; und da die Berührungspunkte paralleler Berührungsebenen auf einem reellen Durchmesser der Fläche liegen, so gehen die drei Diagonalen zwischen Gegenecken des Sechsecks durch den Mittelpunkt O der Fläche. Eine zu M_1 parallele Mantellinie K_1 des asymptotischen Kegels liegt also in der Ebene $M_1 N_1$. Diese Ebene erscheint als die Berührungsebene des Hyperboloids für den unendlich fernen Punkt, in welchem M_1 und N_1 sich schneiden, oder als eine asymptotische Ebene desselben; sie muß zugleich Berührungsebene des asymptotischen Kegels sein, denn die beiden Mantellinien des Kegels, welche man parallel mit den in eine gewöhnliche Berührungsebene des Hyperboloids fallenden Mantellinien des letztern ziehen kann, haben sich hier in der Linie K_1 vereinigt. Ebenso sind $M_2 N_2$ und $M_3 N_3$ asymptotische Ebenen des Hyperboloids, welche den asymptotischen Kegel nach den mit M_2 und M_3 parallelen Linien K_2 und K_3 berühren. Bezeichnet man in Abkürzung die Ebenen $M_1 K_1 N_1$, $M_2 K_2 N_2$, $M_3 K_3 N_3$ durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, die Durchschnittslinie der $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ durch D_3, die der $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ durch D_1, die der $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_1$ durch D_2, so sind D_1, D_2, D_3 die schon erwähnten Diagonalen zwischen Gegenpunkten des unebenen Sechsecks.

Ist ein Kegel zweiter Ordnung gegeben, so kann man nach dem Vorigen drei Leitlinien für irgend eines der unendlich vielen, unter sich ähnlichen Hyperboloide bestimmen, zu welchen er als asymptotischer Kegel gehört.

Es seien jetzt drei Gerade M_1, M_2, M_3 beliebig im Raum angenommen (nur nicht einer Ebene parallel und nicht paarweise in einer Ebene liegend); es ist zu untersuchen, ob sie Leitlinien eines Hyperboloids sein können. Legt man durch jede der Geraden zwei Ebenen parallel mit den beiden andern, so bildet sich ein Parallelepiped, an welchem drei neuentstandene Kanten N_1, N_2, N_3 sich je zwischen zwei der

Linien M_1, M_2, M_3 zur Gestaltung eines unebenen Sechsecks einfügen. Durch den Mittelpunkt O des Parallelepipeds ziehe man die Geraden K_1, K_2, K_3 parallel mit M_1, M_2, M_3. Die drei Ebenen MKN sollen wieder $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ heißen, ihre Schnittlinien D_3, D_1, D_2; diese Linien sind drei von den Diagonalen des Parallelepipeds; die vierte Diagonale (welche die dem Sechseck nicht angehörigen Ecken verbindet) sei durch D_0 bezeichnet.

Damit die gegebenen Geraden M drei Mantellinien eines Hyperboloids sein können, müßte sich durch die Geraden K_1, K_2, K_3 ein Kegel zweiter Ordnung legen lassen, welcher in diesen Geraden die Ebenen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ berührt. Die Bedingung für die Existenz einer solchen Kegelfläche besteht, wie aus Nr. 279, 2 gefolgert werden kann*, darin, daß die Ebenen K_1D_1, K_2D_2, K_3D_3 sich in einer Geraden schneiden. Diese Bedingung aber wird bei jeder Gestalt des Parallelepipeds erfüllt, da die Diagonale D_0 mit D_1 und K_1, mit D_2 und K_2, mit D_3 und K_3 je in einer Ebene liegt; also können die drei Leitlinien des Hyperboloids beliebig angenommen werden.

† Soll ein Hyperboloid graphisch dargestellt werden, für welches man die drei geraden Leitenden beliebig annehmen darf, so thut man am besten, die eine Grundebene senkrecht zu einer der Leitenden zu legen. Man kann dann leicht die Punkte bestimmen, in denen eine durch diese Leitende gelegte Ebene die beiden andern Leitenden schneidet, und die Verbindungslinie der erhaltenen Schnittpunkte gibt eine Lage der Erzeugenden.

†† Wenn zwei Leitlinien M_1, M_2 eines Hyperboloids ganz willkürlich genommen sind und die dritte so gewählt wird, daß sie mit einer den beiden ersten parallelen Ebene einen sehr kleinen Winkel bildet, so wird das Hyperboloid einem hyperbolischen Paraboloid sehr nahe

---

* Sind a_1, a_2, a_3 drei Tangenten eines Kegelschnitts, k_1, k_2, k_3 die Berührungspunkte, d_3, d_1, d_2 die Schnittpunkte der Linienpaare (a_1a_2), (a_2a_3), (a_3a_1), so schneiden sich die Geraden k_1d_1, k_2d_2, k_3d_3 in einem Punkte, denn man kann die 6 Punkte k und d als Ecken eines um den Kegelschnitt beschriebenen Sechsecks ansehen (vgl. die erste Note auf S. 245). Hieraus läßt sich leicht beweisen, daß es immer einen bestimmten Kegelschnitt gibt, der drei Seiten a eines Dreiecks in gegebenen Punkten k berührt, wenn die von diesen Punkten nach den gegenüberliegenden Ecken laufenden Geraden sich in einem Punkte schneiden. Für den Raum liegt hierin der obige Bedingungssatz (vgl. Nr. 280).

kommen; für das Paraboloid selbst werden die drei Leitenden einer Ebene parallel, übrigens willkürlich sein.

323. In der vorigen Nummer liegt der Lehrsatz:

Erzeugt eine bewegliche Gerade g eine Fläche F dadurch, daß sie stets drei beliebig gegebene feste Gerade schneidet, so wird eine von diesen festen Geraden, wenn sie sich so in Bewegung setzt, daß sie stets drei beliebige, als fest angenommene Lagen der g schneidet, wieder die nämliche Fläche F erzeugen.

Dieser Satz läßt sich auch direkt beweisen.

Es seien (Fig. 145, Taf. XI) $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ die drei festen Geraden, $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $X_1 X_2$ drei beliebige Lagen der Erzeugenden g. Die Ebene der beiden Linien $A_1 B_1$, $B_1 B_2$ schneidet die Ebene der Linien $A_1 A_2$, $B_2 A_2$ in der Geraden $A_1 B_2 O$; die Linien $X_1 X_2$ und $A_3 B_3$ liegen, da sie sich schneiden, in einer dritten Ebene, und diese schneidet die vorigen nach den Geraden $X_1 B_3 \ldots$, $A_3 X_2 \ldots$, welche verlängert auf $A_1 B_2 O$ zusammentreffen müssen (Nr. 5, v).

Nun ist am Dreieck $A_1 B_2 B_1$

$$A_1 X_1 . B_1 B_3 . B_2 O = A_1 O . B_2 B_3 . B_1 X_1$$

und am Dreieck $A_1 B_2 A_2$

$$A_1 O . B_2 X_2 . A_2 A_3 = A_1 A_3 . A_2 X_2 . B_2 O;$$

folglich (wie die Multiplication beider Gleichungen zeigt) in dem windschiefen Viereck $A_1 A_2 B_2 B_1$

$$A_1 X_1 . B_1 B_3 . B_2 X_2 . A_2 A_3 = A_1 A_3 . A_2 X_2 . B_2 B_3 . B_1 X_1$$

oder

$$\frac{A_1 X_1}{B_1 X_1} \cdot \frac{B_2 X_2}{A_2 X_2} = \frac{A_1 A_3}{A_2 A_3} \cdot \frac{B_2 B_3}{B_1 B_3} \qquad (G)$$

Hält man nun die Linien $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ fest, während die $X_1 X_2$ sich über die drei festen Linien $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ fortbewegt, so ändern sich fortwährend die vier Stücke $A_1 X_1$, $B_1 X_1$, $A_2 X_2$, $B_2 X_2$, aber das Produkt $\frac{A_1 X_1}{B_1 X_1} \cdot \frac{B_2 X_2}{A_2 X_2}$ bleibt constant, weil es für alle Lagen der $X_1 X_2$ dem constanten Produkte $\frac{A_1 A_3}{A_2 A_3} \cdot \frac{B_2 B_3}{B_1 B_3}$ gleich ist, dessen Werth durch c bezeichnet sein mag; man kann daher umgekehrt schließen, daß irgend eine Linie X_1, X_2, welche die Seiten $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ des windschiefen Vierecks $A_1 B_1 B_2 A_2$ nach der Bedingung $\frac{A_1 X_1}{B_1 X_1} \cdot \frac{B_2 X_2}{A_2 X_2} = c$ schneidet, auch der Linie $A_3 B_3$ begegnen und also eine Lage für die Erzeugende g der Fläche F sein müsse.

Fixirt man hierauf auch die $X_1 X_2$ in irgend einer Lage, und ändert dafür die Lage der $A_3 B_3$ so, daß sie wieder die drei Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $X_1 X_2$ schneidet, so wird der Punkt O eine andere Lage erhalten, aber die Gleichung (G) behält ihre Geltung. Umgekehrt: jede Linie $A_3 B_3$, welche die Seiten $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ des windschiefen Vierecks $A_1 A_2 B_2 B_1$ nach der Bedingung $\frac{A_1 A_3}{A_2 A_3} \cdot \frac{B_2 B_3}{B_1 B_3} = c$ schneidet,

begegnet der Linie $X_1 X_2$, d. h. **irgend** einer Linie, welche die Seiten $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ nach der Bedingung $\frac{A_1 X_1}{B_1 X_1} \cdot \frac{B_2 X_2}{A_2 X_2} = c$ schneidet, folglich **allen** solchen Linien.

Wenn also die Linie $A_3 B_3$ sich über drei beliebige Lagen der g fortbewegt, so schneidet sie in jeder Lage zugleich alle möglichen andern Lagen der g, und liegt also stets ganz auf der durch die g erzeugten Fläche F, oder die von $A_3 B_3$ erzeugte Fläche ist mit F identisch.

† Sind die ursprünglichen Leitenden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ **parallel mit einer Ebene** (so daß man durch dieselben drei unter sich parallele Ebenen legen kann), so ist bekanntlich*

$$A_1 A_3 : A_2 A_3 = B_1 B_3 : B_2 B_3$$

oder

$$\frac{A_1 A_3}{A_2 A_3} \cdot \frac{B_2 B_3}{B_1 B_3} = 1$$

also auch

$$\frac{A_1 X_1}{B_1 X_1} \cdot \frac{B_2 X_2}{A_2 X_2} = 1$$

oder

$$A_1 X_1 : B_1 X_1 = A_2 X_2 : B_2 X_2$$

d. h. **es sind dann auch je drei Lagen der Erzeugenden** — und folglich alle möglichen Lagen — **parallel mit einer und derselben Ebene.**

Hyperbolisches Paraboloid.

324. Eine bewegliche Gerade, welche beständig zwei gerade Leitende L_1, L_2 (die nicht in einerlei Ebene liegen dürfen) schneidet und dabei einer Richt-Ebene E parallel bleibt (welche zu keiner der Leitenden parallel sein darf), erzeugt eine windschiefe Fläche (vgl. Nr. 316, 2), von welcher sich auch ohne Rücksicht auf die in Nr. 303 und Nr. 321 enthaltenen Bemerkungen nachweisen läßt, daß sie identisch ist mit dem **hyperbolischen Paraboloid.**

Fig. 106. Nimmt man die Richt-Ebene E zur HE, so sind die V-Projectionen aller Lagen der Erzeugenden parallel zum Grundschnitt. Es seien (l_1, l^I), (l_2, l^{II}) die Leitenden und $a^I b^I$, $a^{II} b^{II}$, $a^{III} b^{III}$ die V-Projectionen von irgend drei Mantellinien, welche die Leitenden in A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 schneiden. Ferner seien c^I, c^{II}, c^{III} die V-Projectionen der drei Punkte C_1, C_2, C_3, in denen jene Mantellinien von irgend einer zu L_1 und L_2 parallelen Ebene ε geschnitten werden. Dann bestehen die Proportionen

$$A_1 C_1 : C_1 B_1 = A_2 C_2 : C_2 B_2 = A_3 C_3 : C_3 B_3 \;**$$

und also auch (nach Nr. 28)

$$a^I c^I : c^I b^I = a^{II} c^{II} : c^{II} b^{II} = a^{III} c^{III} : c^{III} b^{III}$$

---

* Drei parallele Ebenen schneiden alle Geraden, denen sie begegnen, nach **einem und demselben Verhältniß.**

** Man kann sich nämlich durch L_1, L_2 Ebenen parallel mit ε gelegt denken.

Hieraus aber folgt, daß die Punkte c^I, c^{II}, c^{III} in einer geraden Linie liegen, welche durch den Schnitt der l^I und l^{II} geht. Die Punkte C_1, C_2, C_3 liegen demnach in der durch $c^I c^{III}$ gelegten projicirenden Ebene, und da sie zugleich in der Ebene ε liegen, so sind sie in dem geradlinigen Durchschnitte beider Ebenen enthalten. Diese Gerade ist durch die zwei Punkte C_1, C_2 bestimmt, und der dritte (C_3) muß immer auf ihr liegen, welche Lage der Erzeugenden man auch für die $A_3 B_3$ gelten lassen will, wodurch erwiesen ist, daß überhaupt alle möglichen Lagen der Erzeugenden durch die Ebene ε in einer Geraden geschnitten werden. Dieser Satz bleibt wahr, wenn die Ebene ε parallel mit sich selbst beliebig verrückt wird, und läßt sich daher ganz allgemein so aussprechen: Jede Ebene, welche parallel ist mit den beiden Leitenden L_1, L_2, schneidet die windschiefe Fläche nach einer geraden Linie.

Ist nun $\mathfrak{E}$ eine mit L_1 und L_2 parallele Ebene und sind $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ irgend zwei Lagen der Erzeugenden, so folgt aus dem Vorigen, daß jede Gerade, welche diese beiden Lagen schneidet und zugleich mit $\mathfrak{E}$ parallel ist, ganz auf der windschiefen Fläche liegen muß, und daß also diese Fläche noch eine zweite Erzeugung zuläßt, wobei die Ebene $\mathfrak{E}$ als Richt-Ebene und die Geraden $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ als Leitende auftreten; die Linien L_1, L_2, welche bei der ersten Erzeugung die Leitenden waren, erscheinen jetzt als zwei Lagen der neuen Erzeugenden.

Auf der Fläche sind demnach zwei verschiedene Systeme von Mantellinien möglich; die zu einem Systeme gehörigen sind sämmtlich einer Ebene parallel und jede Mantellinie des einen Systems schneidet alle Mantellinien des andern Systems. Durch jeden Punkt auf der Fläche lassen sich zwei Mantellinien legen, welche verschiedenen Systemen angehören.

Eine Fläche dieser Art kann auch ohne Hülfe einer Richt-Ebene erzeugt werden, indem man einer beweglichen Geraden aufgibt, stets drei Gerade zu schneiden, welche einer Ebene parallel sind und paarweise nicht in einerlei Ebene liegen, außerdem aber beliebig gerichtet sein mögen; denn alle Lagen der beweglichen Geraden werden dann von selbst einer neuen Ebene parallel (Nr. 323, †).

325. Sind die Leitenden L_1, L_2 und die Richt-Ebene E der windschiefen Fläche gegeben, so ist auch die Richt-Ebene $\mathfrak{E}$ der zweiten Erzeugung gegeben, da sie mit L_1 und L_2 parallel sein muß.

Um nun eine möglichst symmetrische Darstellung der Fläche zu erhalten, wähle man das Grundsystem so, daß die Grundebenen die beiden

Fig. 107. von den Richt-Ebenen E und 𝔈 gebildeten Nebenwinkel halbiren. Eine Seitenebene YOZ steht dann senkrecht zu beiden Richt-Ebenen, und auf diese Seitenebene projiciren sich die beiden Systeme von Mantellinien als zwei Systeme von Parallelen mit den Seitenspuren der Richt-Ebenen. Es seien OP″ und OQ″ diese Seitenspuren (wobei also der Winkel P″OQ″ vom ursprünglichen Grundschnitt OX halbirt wird); die mit OQ″ parallelen a″b″, c″d″ seien die S-Projectionen der Leitenden; ab, cd die zugehörigen H-Projectionen. Die S-Projection für jede Lage der Erzeugenden ist dann parallel zu OP″. Durch die Punkte B und C, welche eine gemeinschaftliche H-Projection b (c) haben, gehen zwei Lagen, deren S-Projectionen a″c″, b″d″ mit a″b″ und c″d″ einen Rhombus einschließen und deren H-Projectionen in ab und cd fallen.

Die H-Projectionen ab, cd der Leitenden sind in Fig. 107 so angenommen, daß sie gleiche Neigung gegen den neuen Grundschnitt OY haben. Dieß ist immer erlaubt. Denn wären ursprünglich zwei Leitende gegeben gewesen, welche diese Bedingung nicht erfüllen, so könnte man eine derselben stets durch eine andere auf der windschiefen Fläche liegende Gerade so ersetzen, daß obiger Bedingung nachträglich entsprochen würde.

Wäre z. B. W. cvw < W. bwv, so betrachte man vorerst statt der Linien (ab, a″b″), (cd, c″d″) die Linien (ac, a″c″). (bd, b″d″) als die Leitenden; dann stellt das erstgenannte Paar zwei Lagen der neuen Erzeugenden vor, und eine dritte Lage erhält man, wenn man m″n″ ∥ a″b″ zieht und (mittels Nr. 44) die zugehörige H-Projection mn bestimmt. Liegt nun m″n″ sehr nahe an a″b″, so wird der Winkel zwischen mn und OY von dem Winkel bwv äußerst wenig verschieden sein, aber kleiner als dieser (vorausgesetzt, daß m″n″ zwischen a″b″ und c″d″ fällt). Mann kann die Linie m″n″ zuerst mit a″b″ zusammenfallend denken und sie dann stetig gegen c″d″ fortschreiten lassen; dabei wird sich jene Neigung der mn gegen die OY stetig verringern und muß also irgend einmal dem Winkel cvw gleich werden; diese Lage der (mn, m″n″) würde dann der (ab, a″b″) zu substituiren und als die mit (cd, c″d″) zusammengehörige Leitende zu nehmen sein.

Unter obigen Voraussetzungen wird man nun eine gefällige Figur erhalten, wenn man a″b″ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile a″1″, 1″2″, 2″3″,.... theilt, durch die Theilpunkte Parallelen mit OP″ zieht und für jede solche Parallele (als S-Projection einer Mantellinie betrachtet) die H-Projection sucht. Die V-Projectionen aller dieser Mantellinien ergeben sich leicht, nachdem man die V-Projectionen a′b′, c′d′ der Leitenden bestimmt hat, und ein Blick auf die Fig. 107 wird das

hiebei zu beobachtende Verfahren deutlich zeigen. Die V-Projectionen a′b′, c′d′ haben nothwendig gleiche Neigung gegen die YOZ.

† Es wurden bisher nur die Mantellinien desjenigen Systems berücksichtigt, zu welchem die Leitenden nicht gehören. Will man auch die Mantellinien des andern Systems projiciren, so kann man durch die Punkte, in denen die b″d″ von den aus den Theilpunkten der c″d″ auf OY gefällten Senkrechten getroffen wird, Parallelen zu a″b″ ziehen (wie sie auch wirklich in der Seitenebene gezogen sind); die zu diesen S-Projectionen gehörigen H- und V-Projectionen müssen dann, wie leicht einzusehen, auf die bereits gefundenen H- und V-Projectionen des ersten Systems fallen, und diese Projectionen (deren jede sonach eine doppelte Bedeutung hat) sind aus diesem Grunde durchaus voll ausgezogen. (Würde man das zweite System der Mantellinien als nicht vorhanden betrachten, so hätte von den in der Figur angegebenen H- und V-Projectionen jede zum Theil punktirt werden müssen, auf ähnliche Weise wie in Fig. 104.)*

326. Die Umhüllungscurve für die H-Projectionen der Mantellinien bildet den horizontalen Umriß der windschiefen Fläche; die Umhüllungslinie der V-Projectionen ist der verticale Umriß.

Aus der Art, wie die H- und V-Projectionen der Mantellinien gefunden worden sind, ist zu ersehen, daß die dem Fortrücken der Erzeugenden entsprechende Lagenänderung einer Projection dem Gesetze** folgt, nach welchem sich die Gerade der Aufg. 4 in Nr. 220 bewegen sollte; daß also die beiden Umrisse der Fläche Curven von derselben Art sein müssen wie die dort verlangte Umhüllungslinie. Diese Umhüllungslinie aber ist eine Parabel.

---

* Ein Modell der Fläche läßt sich in folgender Art herstellen. Zwei gleichgroße, nicht in einerlei Ebene liegende (materielle) Linien AB, CD theile man in gleichviel gleiche Theile und verbinde die entsprechenden Theilpunkte durch straffgespannte Fäden, welche von selbst parallel mit einer und derselben Ebene sein werden. Diese Fäden stellen Mantellinien des einen Systems vor. Mantellinien des andern Systems erhält man, wenn man die erste (AC) und die letzte (BD) der vorigen Mantellinien ebenfalls in gleichviel gleiche Theile theilt und wie vorhin verfährt. Jeder von den Fäden des zweiten Systems muß dann auf allen Fäden des ersten Systems aufliegen. (Mittel zur Steifung des unebenen Vierecks ABDC liegen nahe.)

** $ab = bI + b1 = bII + b2 = \ldots = bVII + b7 = bd = bIX - b9 = \ldots$; ebenso $c'a' = a'1' + a'I' = a'2' + a'II' = \ldots = a'b' = a'9' - a'IX' = \ldots$

Dieß ergibt sich durch Umkehrung des folgenden Lehrsatzes. Sind an eine Parabel aus einem Punkte Q der Axe Tangenten QP, Q𝔓 gezogen, so ist die algebraische (d. i. mit Rücksicht auf Vorzeichen genommene) Summe der beiden Stücke, welche irgend eine neue Tangente auf den vorigen von Q aus abschneidet, von constanter Größe. Der Beweis kann mit einem der auf S. 182 gefundenen Sätze geführt werden. Ist nämlich (Fig. 108) F der Brennpunkt der Parabel, M𝔐 die Tangente im Scheitel, H𝔋 eine beliebige Tangente, so ist FM ⊥ QP, FG ⊥ H𝔋; also liegen M und G auf einem Kreise über dem Durchmesser FH. Aus gleichen Gründen liegen die Punkte 𝔐, G auf einem Kreise über F𝔋. Da in beiden Kreisen die Peripheriewinkel M, 𝔐, welche den zur gemeinschaftlichen Sehne FG gehörigen Bögen entsprechen, gleich sind, so sind die Kreise selbst gleich; daher sind auch die Bögen MH, 𝔐𝔋, sowie die Sehnen MH, 𝔐𝔋 gleichgroß. Wäre die beliebig zu wählende Tangente in der Lage H_1𝔋₁ angenommen worden, so hätte man durch dieselben Schlüsse die Gleichheit der Strecken MH_1, 𝔐𝔋₁ gefunden. Der Satz MH = 𝔐𝔋 (mit Einschluß von MH_1 = 𝔐𝔋₁) ist aber der obige Lehrsatz, nur in anderer Ausdrucksform.

(Da auch immer GH = G𝔋, oder G_1H_1 = G_1𝔋₁, so hat man zugleich noch den Satz: Das Stück einer beliebigen Parabeltangente, welches zwischen zwei zur Axe symmetrische Tangenten fällt, wird von der Scheiteltangente halbirt.)

327. Eine genauere Betrachtung der Fig. 107 führt zu Bemerkungen, welche beim Zeichnen derselben (theils als Genauigkeitsproben, theils als Erleichterungsmittel) zu beachten sind; zugleich aber lehrt sie die Fläche selbst — falls über deren Natur nichts weiter zum voraus bekannt sein sollte als was aus der in Nr. 324 gegebenen Definition unmittelbar folgt — näher kennen.

a) Die sämmtlichen Mantellinien sind sowohl in Beziehung auf die zur VE parallele Ebene Ys als auf die zur HE parallele Ebene Zs′ symmetrisch gepaart, woraus zu schließen ist, daß die genannten beiden Ebenen zwei Haupt- oder Symmetralebenen der Fläche sind. Faßt man nämlich irgend zwei (zu verschiedenen Systemen gehörige) Mantellinien in's Auge, deren H-Projectionen sich auf der Linie Ys schneiden, z. B. die Linien (3 III, 3′III′) und (V 5, 3′III′), so steht die Ebene dieser Linien senkrecht auf der verticalen Ebene Ys; letztere halbirt den Winkel beider Linien und mithin auch jede Sehne, welche in der Ebene der Linien senkrecht zur Ebene Ys gezogen werden kann. Ebenso steht die Ebene der Linien (3III, 3′III′) und (3III, V′5′) senkrecht auf der horizontalen Ebene Zs′; letztere halbirt den Winkel jener Linien und also jede Sehne, welche man in ersterer senkrecht zur HE ziehen kann.

Die Gerade, nach der sich die beiden Hauptebenen schneiden (und welche zur S-Projection den Punkt s″ hat), ist die Axe der Fläche. — Die durch den Punkt (s, s′, s″) gehenden Mantellinien bestimmen mit der Axe zwei Ebenen, welche den Richtebenen XOP″, XOQ″ parallel sind.

Die Umrisse der Fläche sind die Projectionen der beiden Curven, in denen die

Hauptebenen die Fläche schneiden; die Peripherie des $\left\{\begin{matrix}\text{horizontalen}\\\text{verticalen}\end{matrix}\right\}$ Umrisses enthält die $\left\{\begin{matrix}\text{H}\\\text{V}\end{matrix}\right\}$-Projectionen der Punkte, in welchen die $\left\{\begin{matrix}\text{horizontale}\\\text{verticale}\end{matrix}\right\}$ Hauptebene von den Mantellinien getroffen wird.

b) Man zeichne die H-Spur $EFGF_0E_0\ldots$ der Fläche (indem man die H-Spuren der einzelnen Mantellinien stetig verbindet). Schneidet man hierauf die Fläche durch eine horizontale Ebene e'g', welche von Zs' die nämliche Entfernung hat wie diese von der HE, so läßt sich aus (a) folgern, daß der Schnitt dieser Ebene der H-Spur congruent sein und sich auf diese horizontal projiciren muß.

c) Die Fläche wird durch die in der Zeichnung angegebenen Mantellinien in eine Anzahl windschiefer Vierecke zerlegt. — Die Flächenpunkte, welche sich durch die Durchschnitte der Mantellinien sichtbar machen, liegen reihenweise sowohl in Ebenen, welche parallel zur HE, als auch in solchen, welche parallel zur VE sind; denn die S-Projectionen dieser Punkte liegen reihenweise in Parallelen zu OY und OX. Daher müssen auch die V-Projectionen und die H-Projectionen der Flächenpunkte reihenweise in Parallelen zu OX liegen.

d) Den verticalen Umriß der Fläche erhält man mit hinreichender Genauigkeit, wenn man eine stetige Curve zeichnet, welche die V-Projectionen der Mantellinien berührt. Man kann aber auch leicht die einzelnen Berührungspunkte selbst bestimmen. Um z. B. den Punkt zu erhalten, in welchem die Projection II'2' den Umriß berührt, bemerke man, daß dieser Punkt des Umrisses die V-Projection desjenigen Punktes ist, in welchem die Mantellinie (II 2, II'2') die verticale Hauptebene Ys schneidet. Die S-Spur dieser Hauptebene ist Ys'', also u'' (wo Ys'' die II''2'' trifft) die S-Projection jenes Schnittpunkts; u'' gehört zur Reihe derjenigen Punkte, welche in eine durch IV'' gelegte Parallele zu OY fallen (vgl. c), daher muß die zugehörige V-Projection u' in einer durch IV' gehenden Parallelen zu OX liegen; da aber unter der Reihe der Punkte, welche dieser Parallelen entsprechen, auch der Schnitt von I'1' und III'3' ist, so hat man folgende Regel: Um auf einer Tangente des Umrisses den Berührungspunkt zu finden, ziehe man durch den Punkt, wo die vorausgehende und die nachfolgende Tangente sich schneiden, eine Parallele zu OX, dann trifft diese in den gesuchten Punkt.

Diese nämliche Regel gilt auch, wenn es sich um den horizontalen Umriß handelt. Denn um z. B. den Berührungspunkt t auf 7 VII zu erhalten — d. h. die H-Projection des Punktes, wo die (7 VII, 7'VII') die horizontale Hauptebene Zs' trifft, deren S-Spur a''s'' ist — kann man die S-Projection t'' dieses Punktes aufsuchen, und die auf OY senkrechte (oder zu OX parallele) t''t wird dann durch VI gehen.

Uebrigens hätte sich auch u' aus der zugehörigen H-Projection u (dem Schnitte der II 2 und Ys) finden lassen, und ebenso t aus der zugehörigen V-Projection t' (dem Schnitte der 7'VII' und Zs').

e) Die Stücke, in welche irgend eine Mantellinie des einen Systems durch die Mantellinien des andern Systems getheilt wird, sind von gleicher Größe, da die S-Projectionen dieser Stücke gleich groß sind; dasselbe muß also auch für die H- und V-Projectionen derselben gelten. — Man hat dadurch ein Mittel, **Mantellinien zu projiciren ohne unmittelbare Hülfe der ursprünglichen Leitenden.**

Trägt man z. B. auf der Verlängerung von 4IV eine Anzahl der gleichen Stücke ab, in welche die 4IV durch die von ihr geschnittenen projicirten Mantellinien zerlegt wird, und verfährt eben so in Beziehung auf eine zweite Linie 6VI, so hat man nur die aufeinanderfolgenden neuen Theilpunkte der verlängerten 4IV und 6VI zu verbinden, um eine Anzahl horizontal projicirter Mantellinien zu erhalten; und ähnlich verhält sich's in der VE. Auf diese Weise wurden in der That in Fig. 107 alle diejenigen Projectionen von Mantellinien gefunden, welche die projicirten Leitenden nicht mehr innerhalb des Zeichnungsraums treffen

f) Die H-Spur einer zur VE parallelen Ebene gehe durch VI; dann geht sie zugleich auch (nach c) durch die H-Projectionen h, i, k, l, t einer Anzahl von Punkten, in denen jene Ebene die windschiefe Fläche schneidet; die zugehörigen V-Projectionen h′, i′, k′, l′, t′, l′ ... h′ bestimmen eine krumme Linie. Durch eine dieser V-Projectionen, etwa durch l′, lege man eine Parallele zu OX, welche zugleich (nach c) durch andere V-Projectionen IV′, r′, u′ von Flächenpunkten gehen muß. Nun ist $IV'l' = \alpha' VI'$ (wegen Congruenz der Dreiecke $IV'l'V'$ und $VI'\alpha'V'$, welche zum Theil aus [e] folgt); aus gleichem Grunde $\alpha' VI' = \beta' t'$, also $IV'l' = \beta' t'$. Ganz auf dieselbe Weise zeigt sich, daß $IV'r' = \beta'\gamma'$, $r'u' = \gamma's'$, und durch Addition der gleichen Stücke folgt $l'u' = t's'$. Rückt man daher die Curve h′t′h′ parallel vorwärts, so daß die Punkte t′ und l′ in den (zu OX parallelen) Geraden t′s′ und l′u′ fortschreiten, so muß in dem Augenblicke, wo t′ in s′ fällt, auch l′ in u′ fallen, d. h. der Punkt l′ kommt mit dem Punkte t′ zu gleicher Zeit in der Peripherie des verticalen Umrisses an. Was aber so eben für den Punkt l′ bewiesen wurde, muß offenbar in derselben Weise auch für die Punkte h′, i′, k′, ... gelten, selbst dann noch, wenn (in Folge unendlicher Verkürzung und Vervielfältigung der auf den Leitenden abgenommenen gleichen Stücke) diese Punkte einander unendlich nahe rücken; woraus man ersieht, daß die Curve h′t′h′ dem verticalen Umriß der windschiefen Fläche congruent ist. — Läßt man die mit der VE parallele Ebene ht statt durch VI durch irgend einen andern Theilpunkt der Linie cd (oder auch der Linie ab) gehen, so muß man durch die nämlichen Schlüsse wieder zu demselben Resultate kommen; dabei können jene Theilpunkte auch in unendlicher Anzahl (und mithin unendlich nahe beisammen) gedacht werden. Demnach schneiden alle möglichen zur VE parallelen Ebenen die Fläche in congruenten Parabeln, deren Axen parallel sind und deren Scheitel auf dem Schnitte der horizontalen Hauptebene liegen, nämlich auf der Parabel (st, s′t′).

Alle diese parabolischen Schnitte lassen sich als Lagen einer erzeugenden Parabel betrachten, deren Scheitel auf der festen Parabel (st, s′t′) fortrückt, während ihre Axe immer parallel mit der Axe der letztern und ihre Ebene senkrecht auf der Ebene der letztern ist, wobei die Concavitäten beider Parabeln nach verschiedenen Seiten gekehrt sind; folglich ist die bisher betrachtete windschiefe Fläche keine andere, als das hyperbolische Paraboloid (Nr. 294, 5).

g) Aus der Congruenz der Parabeln h′t′h′ und g′s′g′ folgt noch, daß die Entfernung des Scheitels t′ von der Sehne h′h′ gleich der Entfernung des Scheitels s′ von g′g′ ist, also auch th = sG, auf welchen Punkt des horizontalen Umrisses auch t fallen möge. Es zeigt sich dadurch, daß die H-Spur des Paraboloids dem horizontalen

Umriß congruent sein muß. Nun ist aber die Entfernung der HE von der Hauptebene Z′s′t′ willkürlich genommen; daher müssen alle Schnitte, welche auf dem Paraboloid durch horizontale Ebenen hervorgebracht werden, der Parabel (st, s′t′) congruent sein, und hieraus läßt sich schließen, daß man das Paraboloid auch erzeugen kann, wenn man die Parabel (Gs, g′s′g′) als die feste und die Parabel (st, s′t′) als die bewegliche annimmt. *

Kugel-Conoid.

328. Eine Gerade soll eine gegebene Gerade schneiden, eine gegebene Kugel berühren und mit einer gegebenen Richtebene parallel sein; dann ist ihr geometrischer Ort eine windschiefe Fläche, welche man ein Kugel-Conoid nennen kann (vgl. Nr. 316, 4). — Man nehme die Richtebene als HE; die Projectionen der leitenden Geraden seien Ab, a′b′; Fig. 109.
die Umrisse der Kugel sind zwei Kreise, mit dem Kugelhalbmesser um die Projectionen o, o′ des Kugelmittelpunktes beschrieben.

Irgend eine zur HE parallele Ebene, deren V-Spur c′t′m′ ist, schneidet die (Ab, a′b′) in (c, c′) und die Kugel nach einem Kreise vom Halbmesser m′t′. Die aus c an die H-Projection dieses Kreises gehenden Tangenten ct_1, ct_2 sind die H-Projectionen für zwei Lagen der Erzeugenden; die zugehörigen V-Projectionen liegen in c′t′; die Berührungspunkte auf der Kugel sind (t_1, t′), (t_2, t″).

Auf die nämliche Art kann man beliebig viele Paare von Mantellinien projiciren. Die Umhüllungslinie ihrer H-Projectionen ist der horizontale Umriß der windschiefen Fläche; der verticale Umriß wird durch die mit dem Grundschnitt parallelen Tangenten des verticalen Kugelumrisses gebildet, und diese Tangenten stellen zugleich die V-Projectionen zweier Mantellinien vor, deren H-Projectionen durch o gehen müssen. — Die Punkte, in denen die einzelnen Mantellinien die Kugel berühren, bestimmen eine stetige Curve, nach welcher die Kugel vom Conoid berührt wird. **

Die Fläche durchschneidet sich selbst in der Geraden AB.

---

* Die beiden Parabeln, welche in der HE und in der Ebene g′e′ liegen, können für eine zweite Construction eines Modells benützt werden. Die Punkte, durch welche die Fäden gehen, ergeben sich leicht aus der Theilung der Linie OY.

** Die Mantellinien hat man sich, um ein vollständiges Bild der Fläche zu erhalten, über diese Curve hinaus fortgesetzt zu denken; diese Verlängerungen sind aber in Fig. 109 weggelassen, weil durch das Sichtbarwerden eines Theils der Kugel die Darstellung an Deutlichkeit gewinnt.

329. Uebungsaufgaben. Jede der nachstehend definirten Flächen soll durch die Projectionen einer hinreichenden Anzahl von Mantellinien dargestellt werden.

1) Für ein senkrechtes Conoid (vgl. Nr. 316, 2) dient als Richtebene die HE und als Leitcurve ein in der VE gezeichneter Kreis, durch dessen Mittelpunkt zugleich die V-Projection der leitenden Geraden geht. (Dabei ist zu beweisen, daß die Fläche von einer zur VE parallelen Ebene nach einer Ellipse geschnitten wird.)

2) Die Ebenen zweier gleichen Kreise sind parallel zur VE; ihre Mittelpunkte liegen in der HE; die Verbindungslinie dieser Mittelpunkte wird von einer Geraden L halbirt, welche senkrecht auf dem Grundschnitt steht (also ganz in der HE liegt). Eine erzeugende Gerade soll die beiden Kreise auf einerlei Seite der HE schneiden und zugleich der Geraden L begegnen (vgl. Nr. 316, 1).

3) Eine Gerade, welche eine gegebene Schraubenlinie in zwei Punkten schneidet, verändert ihre Lage so, daß die Entfernung der Schnittpunkte einen constanten Werth behält, der aber kleiner als die Ganghöhe sein soll (vgl. Nr. 316, 8).

Schraubenfläche.

330. Wenn das Wort Schraubenfläche ohne nähere Bezeichnung gebraucht wird, versteht man darunter nicht die in Nr. 312—315 betrachtete Fläche, sondern eine windschiefe Fläche, deren Erzeugung auf mehrere Arten vor sich gehen kann.

a) Die Schraubenfläche wird von einer beweglichen Geraden beschrieben, welche auf einer gegebenen Schraubenlinie aufliegt und zugleich die Axe dieser Schraubenlinie unter einem gegebenen Winkel φ schneidet (vgl. Nr. 316, 7). Die Axe der Schraubenlinie ist auch Axe für die Fläche.

Denkt man sich aus dem Punkte, in welchem die Erzeugende die Schraubenlinie trifft, eine Senkrechte auf die Axe gefällt, so bildet sich ein rechtwinkeliges Dreieck, welches das zwischen der Schraubenlinie und ihrer Axe enthaltene Stück der Erzeugenden zur Hypotenuse hat. Dieses Dreieck bleibt für alle Lagen der Erzeugenden immer das nämliche, weil an ihm die auf der Axe senkrechte Kathete (der Halbmesser des Schraubencylinders) und der Gegenwinkel dieser Kathete (die Neigung φ der

Erzeugenden gegen die Axe) constant sind. Man hätte daher auch das Entstehungsgesetz der Schraubenfläche auf folgende Art aussprechen können:

b) Die Erzeugende schneidet eine Schraubenlinie und ihre Axe, und bewegt sich so, daß das durch die beiden Schnittpunkte begrenzte Stück von unveränderlicher Größe bleibt (vgl. Nr. 316, 8).

Statt die Schraubenlinie als gegeben vorauszusetzen, kann man sie durch den betreffenden Eckpunkt des vorhin erwähnten Dreiecks beschreiben lassen, indem die zur Axe senkrechte Kathete so in Bewegung gesetzt wird, wie die Note zu S. 217 angibt; die verlängerte Hypotenuse erzeugt dann gleichzeitig die Fläche. Da aber die von der bewegten Kathete veranlaßte Bewegung der Dreiecksebene sich auch unabhängig von der Kathete definiren läßt, so ergibt sich die folgende Entstehungsart.

c) Die Schraubenfläche wird durch den einen Schenkel eines Winkels φ erzeugt, dessen anderer Schenkel sich in einer geraden Linie fortschiebt, während zugleich um diese Gerade die Ebene des Winkels proportional mit der Fortschreitung des Scheitels sich dreht.

Dabei müßte, damit die Schraubenfläche bestimmt sei, außer der Größe des Winkels noch die Strecke h gegeben sein, um welche während einer Drehung von 360° der Scheitel fortrückt. Man sieht (Nr. 313, *), daß jeder Punkt des erzeugenden Schenkels eine Schraubenlinie um die gemeinschaftliche Axe der Drehung beschreibt und daß allen diesen Schraubenlinien die Ganghöhe h zukommt. Umgekehrt kann man schließen, daß alle Drehungscylinder, welche zur gemeinschaftlichen Axe die Axe der Schraubenfläche haben, diese Fläche in concentrischen Schraubenlinien von gleichen Ganghöhen schneiden. Und hieraus folgt noch eine vierte Art, die Schraubenfläche zu erzeugen, nämlich

d) durch eine Gerade, welche beständig die entsprechenden Umgänge zweier concentrischen Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe schneidet und zugleich der gemeinschaftlichen Axe beider Schraubenlinien begegnet (vgl. Nr. 316, 1).

Eine Erzeugung, bei welcher die Schraubenfläche nicht unmittelbar als Regelfläche auftritt, ist im Obigen ebenfalls angezeigt. Als Erzeugende nämlich kann eine veränderliche Schraubenlinie gelten, welche ihre Axe und ihre Ganghöhe beibehält und stets eine feste, die Axe treffende Gerade schneidet.

331. Für die graphische Darstellung einer Schraubenfläche soll von der ersten Erzeugungsart (Nr. 330, a) ausgegangen werden.

Fig. 110. Man zeichne die Projectionen Ab.., a'b'b''.. der Schraubenlinie, indem man ihre Axe senkrecht zur HE annimmt. Die mit dem Grundschnitt parallele OA ist die H-Projection einer mit der VE parallelen Mantellinie, deren V-Projection man erhält, wenn man W. o'a'z' = 90° — φ macht. (Es stellt dann zugleich o'a'z' die wahre Gestalt und Größe des constanten Dreiecks vor, welches in Nr. 330 zur Sprache kam.)

Betrachtet man eine beliebig durch O gelegte Gerade Ob als H-Projection einer Mantellinie, so findet man die zugehörige V-Projection b'n' auf folgende Weise. Man suche die V-Projection b' des Punktes, in welchem die Mantellinie die Schraubenlinie trifft, fälle b'm' ⊥ o'o'', mache m'n' = o'z' und ziehe b'n'. Da aber zu b außer b' noch unendlich viele Punkte (z. B. b'') als V-Projectionen gehören können, so gibt es auch unendlich viele Mantellinien, denen Ob als gemeinschaftliche H-Projection zukommt; für jede derselben würde man die V-Projection wie vorhin finden, und alle diese V-Projectionen sind, wie leicht zu zeigen, unter sich parallel (z. B. b''n'' || b'n').

Auf diese Weise kann man, indem man der Linie Ob nach und nach andere Lagen gibt, beliebig viele Mantellinien der Fläche projiciren. Um aber der Darstellung eine gewisse Regelmäßigkeit zu geben, thut man am besten, zuerst die H-Projection Ab.. der Schraubenlinie in n gleiche Theile zu theilen und die nach den Theilpunkten gezogenen Radien als die Lagen einzelner Mantellinien gelten zu lassen. Hat sich nun bei der Bewegung des Dreiecks AOZ der Punkt A um $\frac{1}{n}$ der Ganghöhe h erhoben, so daß jetzt seine H-Projection in den ersten auf A folgenden Theilpunkt des Kreises Ab.. fällt, so ist auf der Schraubenaxe sowohl der Punkt O als der Punkt Z um $\frac{1}{n}$ h aufwärts gerückt; fällt bei weiterem Fortschreiten die H-Projection von A in den zweiten Theilpunkt, so liegt z' um $\frac{2}{n}$ h höher als zu Anfang; u. s. f. Man wird daher auf o'o'' von z' aufwärts das Stück $\frac{1}{n}$ h beliebig oft abtragen und die auf solche Art in o'o'' erhaltenen Punkte in gehöriger Aufeinanderfolge mit denjenigen Punkten verbinden, welche auf der V-Projection der Schraubenlinie den Theilpunkten des Kreises Ab.. entsprechen; die Verbindungslinien geben die V-Projectionen der Mantellinien und die Umhüllungscurven derselben bestimmen den verticalen Umriß.

Hiebei ist nicht zu übersehen, daß schon behufs der Construction der Schraubenlinie sowohl der Kreis Ab.. als die auf o'o'' abgetragene Ganghöhe in gleiche Theile ge-

theilt werden mußten. Läßt nun der Werth von φ es zu, daß die erste Lage von z' in einen der Theilpunkte fällt, welche für jenen frühern Zweck bereits auf o'o'' angenommen sind, so wird die Ausführung der Zeichnung sehr einfach. (So verhält sich's in Fig. 110; es ist dort $n = 14$ und $o'z' = \frac{6}{14}h$.)

Um ein leicht übersichtliches Bild zu erhalten, wurde in Fig. 110 die Erzeugende begrenzt angenommen, mithin nur ein begrenzter Theil der Schraubenfläche zur Anschauung gebracht. Zum Begriffe der vollständigen (unbegrenzten) Schraubenfläche wird erfordert, daß man sich die Erzeugende nach beiden Seiten hin ohne Ende verlängert denkt. *

† Außer der ursprünglichen Schraubenlinie (Ab.., a'b'b''..) ist in Fig. 110 noch eine zweite gezeichnet. Die V-Projection derselben wurde dadurch gefunden, daß man (nach Nr. 44) die V-Projectionen für diejenigen Punkte der Mantellinien suchte, deren H-Projectionen in den mit Oq um O beschriebenen Kreis fallen.

Die V-Projectionen aller auf der Schraubenfläche liegenden Schraubenlinien werden von dem verticalen Umriß der Fläche berührt; denn jede dieser V-Projectionen muß für jeden halben Umgang von der V-Projection irgend einer Mantellinie berührt werden. (Denkt man sich nämlich eine Ebene so bewegt, daß sie immer durch eine Mantellinie und durch die Tangente geht, welche an die betreffende Schraubenlinie durch den auf die Mantellinie fallenden Punkt gezogen ist, so kommen unter den Stellungen dieser Ebene solche vor, welche senkrecht zur VE sind.)

332. Ein besonderer Fall der Schraubenfläche ergibt sich, wenn man bei den in Nr. 330 unter (a) und (c) angegebenen Erzeugungsarten $\varphi = 90°$ setzt. Dann bleibt die Erzeugende stets parallel mit einer zur Axe senkrechten Ebene (der HE), und die erzeugte Fläche, welcher man in diesem Falle auch den Namen Wendelfläche beilegt, gehört also unter die senkrechten Conoide (Nr. 316, 2).

Nach (b) würde man die Wendelfläche erhalten, wenn das constante Stück der Erzeugenden dem Halbmesser des Schraubencylinders gleich ist; nach (d), wenn (bei verticaler Stellung der Axe) die H-Spuren der beiden gegebenen Schraubenlinien mit der Axe in einer Ebene liegen.

Einen Umriß hat die Wendelfläche nicht.

Schrauben.

333. Unter den körperlichen Gebilden, an denen Schraubenflächen vorkommen, sind die bekanntesten und wichtigsten die Schrauben;

* Weitere Betrachtung der vollständigen Fläche folgt im V. Kap.

ihre Darstellung soll als Beigabe zu dem Vorangegangenen hier folgen.

I. **Die Schraube mit scharfem Gewinde.** — Auf dem Cylinder einer Schraubenlinie nehme man das zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umgängen enthaltene Stück einer Mantellinie als die Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks an, dessen Ebene durch die Axe des Cylinders geht. Diese Ebene drehe man um die Axe und lasse dabei die Basis immer zwischen den Schraubengängen fortrücken; dann beschreibt der Flächenraum des Dreiecks einen Körper, welchen man ein scharfes (oder auch ein dreieckiges) Schraubengewinde nennt. Dieses Gewinde in fester Verbindung mit jenem Cylinder bildet eine Schraube; der Cylinder für sich heißt der Kern derselben.

Denkt man sich die beiden gleichen Seiten des erzeugenden Dreiecks bis zur Schraubenaxe verlängert, so sieht man, daß sie Schraubenflächen erzeugen, oder daß die Begrenzungsflächen des Schraubengewindes Stücke von Schraubenflächen sind. Die Spitze des Dreiecks beschreibt (nach Nr. 330, c) eine Schraubenlinie von derselben Ganghöhe und derselben Axe wie die ursprüngliche; letztere heißt die einspringende und erstere die ausspringende Schärfe der Schraube.

Fig. 111. Um eine solche Schraube zu zeichnen, wenn ihr Kern senkrecht auf der HE steht, projicire man zuerst die ursprüngliche Schraubenlinie ($a\alpha_1\alpha_2\ldots$, $a'\alpha^{I}\alpha^{II}b'\beta^{I}\beta^{II}\ldots$) und zeichne das erzeugende Dreieck in einer zur VE parallelen Stellung, für welche a'b'c' seine V-Projection sei. Die H-Projection c der Dreiecksspitze führt dann auf die H-Projection $c\gamma_1\gamma_2\ldots$ der äußern Schraubenlinie, und da deren Ganghöhe = a'b' ist, so kann man auch ihre V-Projection $c'\gamma^{I}\gamma^{II}\ldots$ zeichnen.* Will man nun irgend eine Lage des erzeugenden Dreiecks projiciren, so ziehe man durch o eine beliebige Gerade $\alpha(\beta)\gamma$, betrachte sie als H-Projection des Dreiecks, und suche auf $a'\alpha^{I}b'\beta^{I}$.. und $c'\gamma^{I}$.. die zu $\alpha(\beta)$

---

* Hat man die H-Projection der innern Schraubenlinie (und also auch die Ganghöhe a'b') in eine gerade Anzahl gleicher Theile getheilt, so trifft eine durch c' gehende Parallele mit dem Grundschnitt in einen Theilpunkt der a'b', und man kann dann mittels der auf a'z' (oder m'o') aufgetragenen Theilpunkte nicht nur die V-Projection der innern, sondern zugleich auch die der äußern Schraubenlinie construiren; die Theilpunkte des Kreises c... werden bei dieser Annahme durch die Verlängerungen derjenigen Radien bestimmt, welche von o aus nach den Theilpunkten des Kreises a... gehen.

und γ gehörigen V-Projectionen; die Verbindung dieser drei Punkte gibt die V-Projection des Dreiecks.

Der verticale Umriß des Schraubengewindes besteht aus Curvenstücken von der Art, wie man sie in Fig. 110 (Nr. 331) als Vertical-Umriß der Schraubenfläche fand, und diese Curvenstücke müssen die V-Projectionen zusammengehöriger Umgänge der innern und äußern Schraubenlinie berühren. Da aber die Krümmung dieser Curven um so unbedeutender wird, je mehr sie sich von der v-projicirten Schraubenaxe entfernen, und in größerer Entfernung kaum mehr durch Zeichnung bemerkbar zu machen ist, so kann man in den meisten Fällen für den Umriß des Gewindes ohne merklichen Fehler eine gerade Linie setzen, also eine gemeinschaftliche Tangente der beiden v-projicirten Schraubenlinien (wie U^{I}, U^{II}, U^{III},...; a′b′ und b′c′ aber gehören nicht zum Umriß). Nur dann würde man mit dieser Näherung nicht mehr ausreichen, wenn der Durchmesser des Kerns in Vergleich mit dem Durchmesser des äußern Schraubencylinders sehr klein wäre.

II. **Die Schraube mit flachem Gewinde.** — Die eine Seite AB eines Rechtecks ABCD liege in einer Mantellinie eines geraden Cylinders, während die Ebene des Rechtecks durch die Axe des Cylinders geht. Dreht man diese Ebene um die Axe und läßt zugleich den Punkt A auf der Cylinderfläche in einer Schraubenlinie fortschreiten, deren Ganghöhe $>$ AB ist, so erzeugt der Flächenraum des Rechtecks ein flaches (oder viereckiges) Schraubengewinde, dessen Kern jener Cylinder ist. Dabei beschreiben die Seiten AD, BC zwei Wendelflächen (Nr. 332) und die Punkte C, D zwei congruente Schraubenlinien, welche mit der ursprünglichen (von A durchlaufenen) einerlei Ganghöhe haben; der Punkt B aber beschreibt eine vierte Schraubenlinie, welche der ursprünglichen congruent ist.

Diese Schraube läßt sich (bei verticaler Stellung ihres Kerns) leicht auf der VE abbilden. Hat man die Projectionen $a\alpha$.., $a'\alpha'$... der ursprünglichen Schraubenlinie und die V-Projection a′b′c′d′ des erzeugenden Rechtecks für eine zur VE parallele Lage gezeichnet, so findet man sogleich die gemeinschaftliche H-Projection $c\gamma$.. der von C und D beschriebenen Schraubenlinien. Nimmt man eine beliebig durch o gelegte Gerade $\alpha\gamma$ als H-Projection für irgend eine neue Lage des Rechtecks, fällt $\alpha\alpha'\beta' \perp$ GS, macht $\alpha'\beta' =$ a′b′, $\beta'\gamma' \parallel \alpha'\delta' \parallel$ GS, $\gamma\delta'\gamma' \perp$ GS, so ist $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ die zugehörige V-Projection. Auf diese Art ergeben sich Fig. 112.

die V-Projectionen für beliebig viele Lagen des Rechtecks. Die stetigen Curven $b'\beta'\ldots$, $c'\gamma'\ldots$, $d'\delta'\ldots$ geben die V-Projectionen der drei von B, C, D beschriebenen Schraubenlinien an. Diese Schraubenlinien lassen sich aber auch leicht unmittelbar projiciren, da man ihre H-Projectionen und ihre Ganghöhe kennt.

† Die hier betrachteten Schrauben heißen einfache. — Wie bei der flachen, so können auch bei einer scharfen Schraube Stücke des Kerns zwischen den aufeinanderfolgenden Umgängen des Gewindes sichtbar bleiben; dieß geschieht, wenn man in Fig. 112 an die Stelle des Rechtecks ABCD ein gleichschenkeliges Dreieck setzt, dessen Basis zwischen den beiden auf dem Kern gezeichneten Schraubenlinien fortläuft.

In diesem Falle, oder im Fall II, kann man zwischen den Umgängen des Gewindes ein zweites Gewind führen, dessen Schraubenlinien wieder die vorige Ganghöhe haben; dadurch entsteht eine doppelte Schraube. (Sind dabei die Gewinde scharf, so können die Umgänge des einen sich an die Umgänge des andern anlegen.)

Man sieht nun leicht, was unter einer dreifachen, vierfachen ꝛc. Schraube gemeint sei. Die Zeichnung jeder mehrfachen Schraube ergibt sich eben so wie die der einfachen.

Drittes Kapitel.

Aufgaben über Berührungsebenen an krummen Flächen.

A. Berührungsebenen bei gegebenem Berührungspunkt.

334. Wenn im Folgenden die Aufgabe behandelt wird, an eine gegebene krumme Fläche eine Berührungsebene durch einen auf der Fläche gegebenen Punkt zu legen, und auf der Fläche Punkte von besonderer Bedeutung vorhanden sind, soll stets vorausgesetzt sein, daß der gegebene Berührungspunkt ein gewöhnlicher Punkt der Fläche sei.

Aus Nr. 260 folgt, daß die gesuchte Berührungsebene bestimmt ist, wenn man irgend zwei durch den gegebenen Berührungspunkt gehende Tangenten der krummen Fläche kennt. Man wird sich daher immer zuerst zwei Curven zu verschaffen suchen, welche auf der krummen Fläche durch den gegebenen Punkt gehen, an diese Curven Tangenten ziehen und dann durch beide Tangenten eine Ebene legen. Zwei solche Curven kann man erhalten, wenn man die krumme Fläche von Ebenen, welche durch den Berührungspunkt gehen, schneiden läßt, wozu später (Kap. IV) Anleitung gegeben werden wird; oder man kann für jede Curve die eine Projection durch die gleichnamige Projection des Berührungspunkts willkürlich ziehen und die zugehörigen zweiten Projectionen bestimmen (indem man wiederholt die frühere Aufgabe löst: zur einen Projection eines auf einer gegebenen Fläche liegenden Punkts die andere zu finden). Bei vielen Flächen aber hat man einfachere Mittel, zu den erforderlichen Linien zu gelangen, wie die Beispiele der folgenden Nummern zeigen werden.

† Kann man durch den gegebenen Berührungspunkt eine gerade Linie ziehen, so hat man (Nr. 259) nur noch eine Curve auf der Fläche nöthig. Sind durch den gegebenen Punkt zwei Gerade auf der Fläche möglich, so bestimmen diese unmittelbar die Berührungsebene.

Berührungsebenen an Drehungsflächen.

335. Durch jeden Punkt A einer Drehungsfläche geht ein Parallelkreis und ein Meridian, und diese beiden Curven bieten sich am natürlichsten als Hülfscurven für die Construction der Berührungsebene in A dar.

Bei einer solchen Construction sind folgende Lehrsätze zu beachten.

1) Die Berührungsebene einer Drehungsfläche steht senkrecht auf der durch den Berührungspunkt gehenden Meridianebene.

Denn wenn man durch den Berührungspunkt A den Parallelkreis zieht und an diesen durch A eine Tangente T legt, so steht T senkrecht auf der durch A gehenden Meridianebene M; und da durch T die Berührungsebene gehen muß, so steht auch diese senkrecht auf M.

2) Alle Berührungsebenen einer Drehungsfläche für die Punkte eines und desselben Parallelkreises schneiden die Drehungsaxe in demselben Punkte.

Denn denkt man sich an einen Meridian eine Tangente gezogen, welche die Drehungsaxe im Punkte X schneidet, so wird bei der Drehung des Meridians der Berührungspunkt einen Parallelkreis beschreiben, aber die verschiedenen Lagen, in welche die Tangente nach und nach kommt, müssen alle durch den unbeweglichen Punkt X gehen; werden nun durch verschiedene Punkte jenes Parallelkreises Berührungsebenen an die Drehungsfläche gelegt, so gehen diese durch die verschiedenen Lagen der Meridiantangente, also immer durch den Punkt X.

3) Jede Normale einer Drehungsfläche schneidet die Drehungsaxe.

Denn da die Berührungsebene senkrecht auf der Meridianebene des Berührungspunktes ist, so muß die Normale ganz in diese Meridianebene fallen, folglich der Drehungsaxe begegnen. (Doch kann in gewissen Fällen dieser Begegnungspunkt unendlich entfernt oder die Normale der Drehungsaxe parallel sein.) Zugleich sieht man hieraus, daß *jede (Haupt-) Normale irgend eines Meridians zugleich eine Normale der Drehungsfläche ist.*

4) Alle Normalen einer Drehungsfläche, welche ihre Fußpunkte in dem nämlichen Parallelkreise haben, schneiden die Drehungsaxe in dem nämlichen Punkte.

Trifft nämlich irgend eine Normale die Drehungsaxe im Punkte Y, so wird dieselbe bei Drehung der Meridianebene, in welcher sie liegt, in immer andere Lagen kommen, jedoch stets Normale des Meridians, und mithin auch der Fläche selbst, bleiben; ihr Fußpunkt wird dabei einen Parallelkreis durchlaufen, aber der Punkt Y kann seine Stelle nicht ändern.

336. Aufg. Die Berührungsebene einer durch die (verticalstehende) Drehungsaxe (o, o′o″) und den Meridian (vw, v′u′w′) gegebenen Drehungsfläche zu finden, wenn man die H-Projection a des Berührungspunkts kennt.

Aufl. Die H-Projection des durch A gehenden Meridians ist oa. Fig. 95.
Dreht man diesen Meridian, bis er auf den gegebenen fällt, so kommt a in die Lage b (so daß ob = oa) und die zugehörige V-Projection ist b′. Durch b′ ziehe man eine Tangente b′o″ an die Curve v′u′w′; dann ist (ob, o″b′) die durch (b, b′) gehende Tangente des Meridians und S ihre H-Spur. Bei der Zurückbewegung des Meridians in seine ursprüngliche Lage beschreibt diese Tangente eine Kegelfläche, deren Spitze (o, o″) in der Drehungsaxe liegt; die H-Spur S kommt nach P zu liegen (oP = oS) und die H-Spur der gesuchten Berührungsebene muß durch P gehen. Die Projectionen der Geraden, welche in A den betreffenden Parallelkreis berührt, sind ar (⊥ oa) und a′b′R′ (∥ GS); durch die V-Spur R′ dieser Berührungslinie geht die V-Spur der gesuchten Berührungsebene. Die H-Spur der Ebene ist aber parallel mit ar (Nr. 37, ††); zieht man daher PQ ∥ ar und verbindet Q mit R′, so ist PQR′ die Berührungsebene im Punkte A.

Bei dieser Auflösung braucht man weder die V-Projection a′ des Berührungspunkts noch den Punkt o″, der zuweilen über die Grenzen des Zeichnungsblatts hinaus fällt. Hat man o″ und will man a′ bestimmen, so läßt sich die Tangente (oa, o″a′) des durch A gehenden Meridians angeben und man gelangt zu dem Punkte P auf anderem Wege als vorhin.

† In Fig. 95 ist der gegebene Meridian VUW der Hauptmeridian. Für den Gang der obigen Lösung ist dieß unwesentlich. Eine solche Lage des gegebenen Meridians führt aber noch auf eine andere Auflösung. Ist nämlich b′o″ gefunden, so kann man die V-Projection b′c′ (⊥ b′o″) für die durch (b, b′) gehende Normale der Drehungsfläche zeichnen; verbindet man (nachdem a′ bestimmt ist) c′ mit a′, so ist (oa, c′a′) die Normale des Punktes A (Nr. 335, 4). Nun bestimme man den Punkt R′ wie vorhin, ziehe R′Q ⊥ c′a′ und dann QP ⊥ oa, so ist PQR′ die verlangte Berührungsebene (Nr. 27).

337. Ist von einer Drehungsfläche (mit verticaler Axe) eine vom Meridian verschiedene Erzeugende gegeben, so könnte man,

nach Zeichnung eines Meridians (Nr. 289), auf eine der vorigen Lösungen zurückgehen. In den meisten Fällen aber wird das folgende Verfahren vorzuziehen sein. Ist (Fig. 96) VUW die gegebene Erzeugende, B der Berührungspunkt, so bestimme man den Punkt B der Erzeugenden, welcher mit B auf demselben Parallelkreis liegt, construire die Tangente der Erzeugenden in B und die H-Spur S der Tangente, denke sich die Erzeugende sammt der an ihr haftenden Tangente gedreht bis B in B fällt, und suche die neue Lage S der Tangentenspur (wobei W. SoS = W. bob, oS = oS); die SB und die durch B gelegte Tangente des Parallelkreises BB bestimmen die Berührungsebene.

Einfacher noch wird dieses Verfahren bei einem Drehungs-Hyperboloid, weil hier die Erzeugende selbst statt ihrer Tangente gilt.

Berührungsebenen an entwickelbaren Flächen.

338. Bei jeder entwickelbaren Fläche findet sich die Eigenthümlichkeit, daß die durch einen ihrer Punkte gelegte Berührungsebene sie zugleich noch in unendlich vielen andern Punkten berührt, welche alle auf einer Geraden liegen. Es wurde nämlich früher (Nr. 311) gezeigt, daß jede entwickelbare Fläche als Umhüllungsfläche einer beweglichen Ebene betrachtet werden kann, welche entweder stets eine gewundene Curve berührt, oder durch einen festen Punkt geht, oder mit einer festen Geraden parallel bleibt; jede Lage der umhüllten Ebene berührt (Nr. 304) die Umhüllungsfläche nach der Charakteristik und diese ist eine Gerade (Nr. 305); für alle möglichen Punkte einer solchen Geraden ist also nur eine einzige Berührungsebene der Fläche möglich.

Hat die entwickelbare Fläche eine Rückkehrcurve, so gibt es für jeden Punkt dieser Curve nur eine Berührungsebene, obgleich dort zwei Flächenmäntel zusammenstoßen; denn die Berührungsebene der Fläche ist eine Osculationsebene der Rückkehrcurve, und einer Curve kommt für einen gewöhnlichen Punkt nur eine Osculationsebene zu. Jene beiden Flächenmäntel haben also für jeden gemeinschaftlichen Punkt eine gemeinschaftliche Berührungsebene oder sie berühren sich selbst.

Da die Berührungsebene einer entwickelbaren Fläche durch die gerade Mantellinie geht, auf welcher der Berührungspunkt liegt, so hat man zu ihrer Bestimmung nur noch eine Curve auf der Fläche zu zeichnen. Diese Curve braucht nicht einmal durch den Berührungspunkt

selbst zu gehen, wenn sie nur jene Mantellinie schneidet; denn eine Tangente derselben, durch ihren Schnitt mit der Mantellinie gezogen, muß jedenfalls in die fragliche Berührungsebene fallen.

† Man sieht hieraus, daß der Satz in Nr. 260, † sich bezüglich der entwickelbaren Flächen zu nachfolgender Form erweitert. **Wird eine entwickelbare Fläche F von einer Ebene E nach der Mantellinie M berührt, und es schneidet irgend eine andere Ebene die F in der Curve f, die E in der Geraden e, die M im Punkte m, so berührt e die Curve f in m.**

339. Aufg. An eine Cylinderfläche, welche (vw, v′w′) als Leitende und eine zu (mn, m′n′) parallele Erzeugende hat, soll eine Berührungsebene durch den in a projicirten Flächenpunkt gelegt werden. Fig. 93.

Aufl. Da die H-Projection a mehreren Flächenpunkten entsprechen kann (Nr. 265), so würde man mehrere Auflösungen erhalten. Es soll aber von diesen Punkten hier nur derjenige berücksichtigt werden, welcher die kleinste H-Distanz hat.

Man projicire (Nr. 264) die durch A gehende Mantellinie (ab, a′b′) und ziehe durch den Punkt (b, b′), wo sie die Leitende schneidet, eine Tangente (bP, b′p′) an letztere. Die durch (ab, a′b′) und (bP, b′p′) gelegte Ebene PQR′ ist die gesuchte Berührungsebene.

340. Aufg. Durch einen auf einer Kegelfläche gegebenen Punkt (a, a″) eine Berührungsebene an diese zu legen.

Aufl. ganz ähnlich wie in Nr. 339. (S. Fig. 94.)

341. Aufg. Eine entwickelbare Schraubenfläche ist durch ihre Rückkehrcurve (Abcd.., a′b′c′d′..), deren Axe senkrecht auf der HE steht, gegeben. Man soll durch den in δ h-projicirten Punkt Δ der Fläche eine Berührungsebene an sie legen. Fig. 102.

Aufl. Eine aus δ an den Kreis Abc.. gezogene Tangente δd ist die H-Projection der durch Δ gehenden Mantellinie und ihr Berührungspunkt d die H-Projection desjenigen Punktes, in welchem diese Mantellinie die Schraubenlinie (Abc.., a′b′c′..) berührt. Man bestimme die zugehörige V-Projection d′ (mittels dd′ ⊥ GS) und dann (nach

Nr. 254) die V-Projection $d'p'$ der erwähnten Mantellinie.* Die H-Spur der gesuchten Berührungsebene muß durch die H-Spur P der Mantellinie $D\varDelta$ gehen und die H-Spur der Schraubenfläche berühren (Nr. 338, †). Da aber die Flächenspur eine Evolvente des Kreises Abc.. ist (Nr. 312), so ist $d\delta P$ eine Normale derselben (Nr. 213), und also senkrecht auf der H-Spur der Berührungsebene. Demnach kann man diese Spur PR der Berührungsebene zeichnen, ohne daß man die Spur der Fläche braucht, und die V-Spur der Berührungsebene ist dann leicht hinzuzufügen, da sie durch die V-Spur der Mantellinie PD gehen muß.

Die V-Spur der PD läßt sich durch die V-Spur der Geraden DO ersetzen, welche aus D auf die Axe der Schraubenlinie gefällt wird (vgl. Nr. 314).

Endlich könnte man die Aufgabe auch dadurch lösen, daß man statt der $p'd'$ die V-Projection $x'a''$ derjenigen Mantellinie zeichnet, welche der VE parallel ist, die Spur PR wie vorhin bestimmt und durch sie eine Ebene legt, deren H-Neigung = W. $a'x'a''$ ist (Nr. 314), wobei nur darauf zu achten, daß der spitze Neigungswinkel auf der richtigen Seite von PR angetragen wird.

342. Aufg. Für eine gegebene gewundene Curve W die Osculationsebene in einem gegebenen Punkte D zu finden.**

Aufl. Da (Nr. 305) die verlangte Ebene eine Berührungsebene der entwickelbaren Fläche F ist, welche die W zur Rückkehrcurve hat, so wird man, nach Bestimmung der Projectionen und der H-Spur der durch D gehenden Tangente, noch einige Tangenten der W construiren, deren Berührungspunkte auf verschiedenen Seiten von D gewählt sind, und die H-Spuren dieser Tangenten suchen. Ein durch die Spuren gelegter Curvenbogen gehört der H-Spur der Fläche F an und wird von

---

* Die auf dem Grundschnitt senkrechte dd' trifft die V-Projection der Schraubenlinie noch in unendlich vielen andern Punkten; daher können in δd unendlich viele Mantellinien projicirt sein. Ferner kann man aus δ an den Kreis Abc.. noch eine zweite Tangente ziehen, welche ebenfalls die gemeinschaftliche H-Projection von unendlich vielen Mantellinien der Fläche vorstellt. Auf allen diesen Mantellinien kann der Punkt $\varDelta$ liegen. Damit man nun einen bestimmten Fall vor Augen habe, ist oben unter den möglichen Lagen des Punktes $\varDelta$ diejenige gewählt, welchem oberhalb der HE die kürzeste H-Distanz zukommt.

** Vgl. Nr. 252.

der H-Spur der verlangten Ebene berührt. (Zeichnet man auch die V-Spuren der Tangenten und den sie stetig verbindenden Bogen, so ergibt sich eine Controle.)

Berührungsebenen an windschiefen Flächen.

343. Die Berührungsebene einer windschiefen Fläche enthält die durch den Berührungspunkt A gehende Mantellinie M; aber sie berührt nicht die Fläche nach der ganzen Länge dieser Geraden, sondern nur in dem einzigen Punkte A. Legt man nämlich an die Fläche durch A eine beliebige Berührungslinie und durch irgend einen andern Punkt B der Mantellinie M eine zweite, so bestimmt die erste Tangente mit M die Berührungsebene für A; diese Ebene kann nicht zugleich die zweite Tangente enthalten, denn würden beide Tangenten in einerlei Ebene liegen, so müßte auch eine unendlich nah an M genommene Mantellinie M′ mit M in einerlei Ebene liegen, weil M, um in M′ überzugehen, auf jenen Tangenten (oder eigentlich auf den Elementen, welche sie mit zwei in der Fläche liegenden Curven gemein haben) fortgleitet, und diese Annahme ist mit dem Begriffe einer windschiefen Fläche unvereinbar. Demnach entspricht dem Punkte B eine Berührungsebene, welche von der Berührungsebene des Punktes A verschieden ist und mit letzterer nur die Gerade M gemein hat.

Man sieht aus dem Vorigen, daß eine Berührungsebene die windschiefe Fläche zugleich nach derjenigen Mantellinie (M) *schneidet*, auf welcher der Berührungspunkt liegt. Aber außerdem schneidet die nämliche Berührungsebene die Fläche noch nach einer zweiten (gewöhnlich *krummen*) Linie; denn im Allgemeinen werden die Mantellinien der Fläche mit der Berührungsebene nicht parallel laufen, sondern diese in verschiedenen Punkten schneiden, deren Gesammtheit dann jene zweite Schnittlinie darstellt. Der Berührungspunkt muß jedenfalls auf derselben liegen. — Für das einmantelige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid wird die zweite Schnittlinie *gerade*. Es wurde nämlich früher gezeigt, daß auf diesen Flächen durch den Berührungspunkt A außer der Mantellinie M noch eine zweite Mantellinie N gezogen werden kann, und durch diese muß die Berührungsebene gehen (Nr. 334, †). Da aber die N von allen denjenigen Mantellinien, welche mit M zu einerlei System gehören, geschnitten wird, und eben so

die M von allen Mantellinien des andern Systems, so sieht man, daß die Berührungsebene mit der krummen Fläche keine andern Punkte gemein haben kann, als die Punkte der Geraden M und N.

344. Dreht man eine Ebene, welche irgend eine windschiefe Fläche in dem Punkte A berührt, um die durch A gehende Mantellinie M, so bleibt sie fortwährend eine Berührungsebene, aber der Berührungspunkt wird in jedem Augenblicke ein anderer, indem er auf M fortrückt. Um dieß sich deutlich zu machen, schneide man die windschiefe Fläche durch unendlich viele Ebenen, welche zur Vereinfachung der Vorstellung alle unter sich parallel sein mögen, und lege dann durch die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$, in denen sie die Mantellinie M treffen, die Tangenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ an die Schnittcurven. Bei Drehung jener ersten Ebene um M werden der Reihe nach die Tangenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ in sie fallen, so daß sie nach und nach für die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ als Berührungsebene erscheint.

Es wird hieraus klar, daß überhaupt jede Ebene, welche eine windschiefe Fläche nach einer Mantellinie schneidet, zugleich die Fläche in irgend einem Punkte dieser Mantellinie berührt. Ist eine solche Ebene E beliebig durch die Mantellinie M gelegt, so findet man den Berührungspunkt auf folgende Weise. Man projicire die erzeugende Gerade in mehreren der M vorausgehenden Lagen $'M, ''M, '''M, \ldots$ und auch in mehreren auf M folgenden Lagen $M', M'', M''', \ldots$; hierauf suche man die Schnittpunkte $'P, ''P, '''P, \ldots, P', P'', P''', \ldots$ dieser Lagen und der Ebene E (Nr. 48). Legt man durch die erhaltenen Punkte (P) eine stetige Curve, so schneidet diese die M in dem gesuchten Berührungspunkte. — Ist die gegebene windschiefe Fläche ein Hyperboloid oder Paraboloid, so liegen die Punkte P auf einer geraden Linie (Nr. 343) und man hat daher deren nur zwei zu bestimmen (also auch außer M nur zwei Mantellinien zu projiciren, welche aber mit M zu einerlei System gehören müssen).

345. Unter besondern Umständen kann es geschehen, daß die Curve, welche im Allgemeinen durch die Punkte P bestimmt wird, die M nicht schneidet, sondern sich ihr als einer Asymptote ohne Aufhören nähert. Dann liegt der Berührungspunkt auf der M in unendlicher Entfernung und die Berührungsebene wird zu einer asymptotischen Ebene.

Beim einmanteligen Hyperboloid, wo die Punkte P in einer

Geraden liegen, geht die berührende Ebene in eine asymptotische über, wenn jene Gerade die mit M parallele Mantellinie des andern Systems ist. Wie schon früher (Nr. 322) gezeigt wurde, berührt jede asymptotische Ebene des Hyperboloids den asymptotischen Kegel desselben*, so daß dieser Kegel als die Umhüllungsfläche aller asymptotischen Ebenen erscheint.

Beim hyperbolischen Paraboloid, wo die Punkte P ebenfalls in eine Gerade fallen, kann diese Gerade zwar nicht mit M parallel werden, aber sie kann in unendliche Entfernung fallen, mithin ganz verschwinden. Dieß ist in der That der Fall, wenn die durch M gelegte Ebene E parallel mit der Richtebene ist; denn dann sind alle Mantellinien, welche mit M zu einerlei System gehören, parallel mit E (oder ihre Schnitte P mit E liegen unendlich fern). Man betrachtet aber auch jetzt noch die Ebene E als Berührungsebene für einen unendlich entfernten Punkt auf M, oder als eine asymptotische Ebene.

346. Eine mit Hülfe einer Leitfläche erzeugte windschiefe Fläche berührt diese Leitfläche in einer Curve C, welche durch die Folge derjenigen Punkte bestimmt wird, in denen die einzelnen Lagen der Erzeugenden die Leitfläche berühren. Ist nämlich M irgend eine Lage der Erzeugenden, T der Punkt, wo sie die Leitfläche berührt (also ein Punkt der Curve C), X die durch T an C gezogene Tangente (wobei zu beachten, daß C sowohl auf der leitenden als auf der erzeugten Fläche liegt), so berührt die durch M und X gelegte Ebene die windschiefe Fläche, insofern M eine Mantellinie und X eine Tangente derselben ist; die nämliche Ebene berührt aber auch die Leitfläche, insofern M und X zwei Tangenten derselben sind. Beide Flächen haben daher im Punkte T eine gemein-

---

*) Dieß ist auch unabhängig von jenen Untersuchungen sehr leicht nachzuweisen. Denkt man sich auf dem in Fig. 103 dargestellten Hyperboloide zwei parallele Mantellinien gezogen, deren eine die (Uv, u′v″) sein mag, so sind die H-Projectionen derselben zwei parallele Tangenten der Ellipse kil und ihre Berührungspunkte y, z liegen auf einem Durchmesser dieser Ellipse; da aber diese Berührungspunkte die H-Projectionen der Punkte Y, Z sind, in denen die beiden Mantellinien die Aequatorialellipse KIL schneiden, so liegen auch Y und Z mit dem Mittelpunkte O des Hyperboloids in gerader Linie; mithin liegt die (einzige) Mantellinie des asymptotischen Kegels, welche jenen Mantellinien des Hyperboloids parallel ist, mit letzteren in einerlei Ebene.

schaftliche Berührungsebene, und das nämliche gilt für jeden andern Punkt der Curve C.

Es ist klar, daß auch jede Berührungslinie der Leitfläche für einen auf C willkürlich genommenen Punkt zugleich eine Berührungslinie der erzeugten Fläche ist, weil sie in die diesem Punkte entsprechende gemeinschaftliche Berührungsebene fällt.

Fig. 110. **347. Aufg.** Eine Schraubenfläche mit verticaler Axe ist durch die leitende Schraubenlinie (Ab..., a′b′...) und eine zur VE parallele Lage (AO, a′z′) der Erzeugenden gegeben. Man soll die Berührungsebene derselben finden, wenn q die H-Projection des Berührungspunktes ist.

Aufl. Von den unendlich vielen Punkten der Fläche, welche gemeinschaftlich in q projicirt sind, soll derjenige gewählt werden, welcher in kürzester Distanz über der HE liegt.

Man projicire die durch Q gehende Lage (Ob, n′b′) der Erzeugenden (Nr. 331) und suche auf n′b′ die V-Projection q′ von Q. Ein mit Oq um O beschriebener Kreis ist die H-Projection einer Schraubenlinie, welche auf der Schraubenfläche liegt und durch Q geht (vgl. Nr. 330, c). Eine durch Q gelegte Tangente dieser neuen Schraubenlinie bestimmt mit (Ob, n′b′) die Berührungsebene, und diese Tangente selbst findet man nach Nr. 254 (wobei man die V-Projection der neuen Schraubenlinie gar nicht braucht, die HE aber parallel zu verschieben hat, bis sie durch den Punkt geht, in welchem eine der Mantellinien, etwa AZ, den Cylinder dieser Schraubenlinie schneidet).

Zusatz. Die verlängerte QB, die erwähnte Tangente der durch Q gehenden Schraubenlinie und das h-projicirende Loth Qq bilden ein Dreikant, in welchem der Winkel an Qq ein rechter ist, während die diesen Winkel einschließenden Seiten die Complemente für die H-Neigungen der QB und der Tangente sind. Man hätte also dasselbe Dreikant erhalten, wenn statt Q irgend ein anderer Punkt der nämlichen Schraubenlinie gegeben gewesen wäre. Daraus folgt zunächst, daß eine auf der Schraubenfläche gezogene Schraubenlinie die sämmtlichen Mantellinien unter demselben Winkel schneidet.

Da ferner die Pyramiden, welche die HE mit den verschiedenen Lagen jenes Dreikants bildet, unter sich ähnlich sind, so hat man den zweiten Satz, daß allen Ebenen, welche eine Schraubenfläche in verschiedenen Punkten der nämlichen Schraubenlinie berühren, gleiche H-Neigung (und also auch gleiche Neigung gegen die Axe der Schraubenfläche) zukommt.

Beide Sätze ergeben sich auch schon daraus, daß die Schraubenfläche (vermöge ihrer Erzeugungsart) in sich selbst bewegt werden kann.

348. Aufg. An ein gegebenes einmanteliges Hyperboloid eine Berührungsebene zu legen, wenn die H-Projection q des Berührungspunktes gegeben ist.

Auflösung.

A) Die Fläche sei auf die in Nr. 319 angenommene Art gegeben.

Man projicire die beiden durch Q gehenden Mantellinien (Nr. 319, 1) und lege durch sie eine Ebene. *

B) Es seien irgend drei Mantellinien von einerlei System gegeben.

Man nehme die HE senkrecht zu der einen Mantellinie an und lege zugleich die VE durch diese Mantellinie. Unter diesen Voraussetzungen seien A′B′, (cd, c′D′), (ef, e′F′) die drei gegebenen Mantellinien. Fig. 113.
Das System, welchem sie angehören, heiße das erste.

Da alle Mantellinien des zweiten Systems die A′B′ schneiden müssen, so gehen die H-Projectionen derselben sämmtlich durch A′; zieht man daher A′q, sucht die zu c und e gehörigen V-Projectionen c′, e′ (Nr. 44) und verbindet sie, so ist (ce, c′e′) die durch den Berührungspunkt Q gehende Mantellinie des zweiten Systems, und es läßt sich nun auch die V-Projection q′ dieses Punktes angeben. Die Spuren S, S′ der Mantellinie (ce, c′e′) liegen in den Spuren der gesuchten Berührungsebene. Zur wirklichen Bestimmung dieser Ebene muß aber auch die durch Q gehende Mantellinie (PQ) des ersten Systems projicirt werden. Ihre H-Projection pq läßt sich unmittelbar zeichnen; denn da unter den Mantellinien des zweiten Systems eine mit A′B′ parallele, mithin zur HE senkrechte sich befindet und diese von allen Mantellinien des ersten Systems geschnitten wird, so gehen die H-Projectionen der letztgenannten Linien durch einen Punkt p, welcher von cd und ef bestimmt ist. Für die V-Projection der PQ ist neben q′ noch ein Punkt nöthig, den man erhält, wenn man die PQ von irgend einer neuen Mantellinie des zweiten Systems geschnitten denkt; in Fig. 113 ist die H-Projection df dieser Mantellinie in den Grundschnitt gelegt, wobei man nach Bestimmung der Punkte D′, F′ sogleich die V-Spur T′ der PQ erhält. ** —

---

* Auf ganz ähnliche Art kann die Aufgabe für ein Drehungs-Hyperboloid gelöst werden, welches durch die verticale Drehungsaxe und irgend eine Lage der erzeugenden Geraden gegeben ist.

** Hätte man statt der df etwa die Linie A′gh gewählt und g′h′ bestimmt, so würde man den Punkt m′ gefunden haben.

Die Spuren T, T′ der PQ bestimmen mit S, S′ die verlangte Berührungsebene.

† Die obige einfache Construction der PQ wird unausführbar, wenn der Punkt p nicht mehr im Zeichnungsblatt liegt. In diesem Falle hat man die zur HE senkrechte Mantellinie des zweiten Systems durch eine andere Mantellinie desselben Systems zu ersetzen. Man projicirt zwei diesem System angehörige Mantellinien (gh, g′h′), (df, D′F′), indem man ihre H-Projectionen durch A′ beliebig zieht und ihre V-Projectionen wie vorhin bestimmt. Auf diesen Linien muß die gewünschte Mantellinie PQ aufliegen; daher erhält man letztere, wenn man durch (q, q′) und (df, D′F′) eine Ebene führt, den Schnittpunkt dieser Ebene mit (gh, g′h′) sucht und ihn mit (q, q′) verbindet. Um die erwähnte Ebene möglichst leicht zu finden, wurde die Mantellinie (df, D′F′) in die VE verlegt, so daß ihre V-Projection D′F′ sogleich die V-Spur der Ebene ist. Nachdem nun (mittels QR || D′F′) auch ihre H-Spur OR gezogen und ihr Schnitt (m, m′) mit (gh, g′h′) gefunden ist (Nr. 48), bestimmt man die Spuren T, T′ der Verbindungslinie (mq, m′q′). *

Wenn die drei gegebenen Mantellinien der Fläche ursprünglich in solchen Stellungen projicirt sind, daß keine derselben die für A′B′ angenommene günstige Lage hat, so ändert man das Grundsystem, indem man erstlich die VE gegen die h-projicirende Ebene einer Mantellinie umtauscht (Nr. 125) und hierauf auch die HE so verlegt, daß sie senkrecht zu dieser Mantellinie steht (Nr. 125),

Eine solche Aenderung wird jedoch unnöthig, wenn der Berührungspunkt auf einer der gegebenen Mantellinien (M) liegt; denn man kann dann leicht seine zweite Projection bestimmen und durch ihn (mittels Nr. 50 und Nr. 48) eine Gerade N ziehen, welche auf den drei Mantellinien aufliegt; durch M und N geht die Berührungsebene.

349. Aufg. An ein gegebenes hyperbolisches Paraboloid eine Berührungsebene zu legen, wenn die V-Projection q′ des Berührungspunktes bekannt ist.

Auflösung.

Fig. 114. A) Das Paraboloid sei durch die beiden Parabeln (wv, w′v′w″), ($t_0$vt, t′v′) gegeben, welche in seine (mit den Grundebenen parallelen) Hauptebenen fallen.

Aus Nr. 327, a weiß man, daß die Parabel $t_0$vt von den H-Projectionen und die Parabel w′v′w″ von den V-Projectionen aller Man-

* Die Punkte T, T′ müssen in die Spuren der Ebene ROF′ fallen.

tellinien berührt wird. Zwei aus q' an $w'v'w''$ gezogene Tangenten $q'p'$, $q'w'$ sind daher die V-Projectionen der durch Q gehenden Mantellinien und die Berührungspunkte p', w' die V-Projectionen der Punkte P, W, in denen diese Mantellinien die verticale Hauptebene schneiden. Als zugehörige H-Projectionen erhält man auf vw die Punkte p und w; von den aus w an t_0vt gelegten Tangenten wt, wt_0 kann jede als H-Projection zu $q'w'$ gehören, und ebenso sind die von p ausgehenden Tangenten pr, pr_0 die H-Projectionen zweier Mantellinien, denen die gemeinsame V-Projection $q'p'$ zukommt. Die Schnittpunkte q, q_0 sind die H-Projectionen der beiden in q' v-projicirten Flächenpunkte. * Betrachtet man nun (q, q') als den Berührungspunkt, so erhält man die Berührungsebene, wenn man durch $(qp, q'p')$ und $(qw, q'w')$ eine Ebene legt; läßt man aber (q_0, q') als Berührungspunkt gelten, so geht die Berührungsebene durch $(q_0p, q'p')$ und $(q_0w, q'w')$.

B) Das Paraboloid sei durch zwei Leitende und eine Richtebene gegeben.

Die Richtebene sei die HE; die Leitenden seien $(Ab, a'b')$, $(ot_1, o''t')$. Fig. 109.
Die mit dem Grundschnitt parallele $c'q't'$ ist die V-Projection einer durch Q gehenden Mantellinie des Paraboloids, für welche man die H-Projection ct_1 nach Bestimmung der Punkte c und t_1 (Nr. 44) findet. Auf ct_1 ergibt sich die H-Projection q des Berührungspunktes Q. Da (wie in Nr. 324 bewiesen wurde) bei horizontaler Lage der Richtebene die V-Projectionen aller derjenigen Mantellinien, zu deren System die Leitenden gehören, sich in einem Punkte schneiden, so erhält man die V-Projection für die zweite durch Q gehende Mantellinie, wenn man q' mit dem Schnitte b' der $a'b'$ und $t'o''$ verbindet. Die H-Spur S dieser Mantellinie muß in der Linie AF liegen, welche die H-Spuren der gegebenen Leitenden verbindet (denn AF ist eine Lage der ursprünglichen Erzeugenden und muß also von der Mantellinie QS geschnitten werden). Durch die beiden Linien QS und QC ist die gesuchte Berührungsebene bestimmt, und man erhält demnach ihre Spuren, wenn man $SX \parallel cqt_1$ zieht und X mit der V-Spur R' der QC verbindet.

Ist die gegebene Richtebene nicht horizontal, so kann man das Grundsystem ändern, indem man die VE senkrecht zur H-Spur der Richtebene legt und dann diese letztere Ebene selbst für die HE nimmt (Nr. 125).

---

* Man hat also hierin zugleich eine neue Auflösung für die Aufgabe der Nr. 296.

350. Die Auflösung der beiden letzten Aufgaben (Nr. 348 und Nr. 349) ist deswegen besonders einfach, weil sich die Berührungsebene immer durch Hülfe gerader Linien bestimmen läßt. Auf diese einfachen Aufgaben können aber auch alle jene Aufgaben zurückgeführt werden, in denen die Berührungsebene für eine beliebige windschiefe Fläche verlangt wird. Dieß wird aus folgender Betrachtung erhellen.

Irgend eine windschiefe Fläche F denke man von drei beliebigen Ebenen geschnitten und an die drei Schnittcurven Tangenten durch solche Punkte gezogen, welche auf einerlei Mantellinie M der Fläche liegen. Jene drei Curven kann man als die Leitenden der Fläche gelten lassen und ihre Tangenten als die Leitenden eines einmanteligen Hyperboloids H. Die drei Ebenen, welche durch M und je eine der erwähnten Tangenten bestimmt werden, sind offenbar drei gemeinschaftliche Berührungsebenen der Flächen F und H. Aber auch für jeden andern Punkt auf M ist die Berührungsebene beiden Flächen gemeinschaftlich, was sich in folgender Art beweisen läßt. Die M wird die Fläche F erzeugen, wenn sie auf den drei Schnittcurven fortgleitet, die Fläche H dagegen, wenn sie sich auf den drei Tangenten fortbewegt; beim ersten Uebergang in die unendlich nahe Nachbarlage bleibt sie aber auf den Elementen, welche jene drei Curven mit ihren Tangenten gemein haben, folglich auf beiden Flächen, oder F und H haben den unendlich schmalen windschiefen Flächenstreifen, welcher zwischen den beiden Nachbarlagen der M enthalten ist (und ein Flächen-Element genannt werden kann), gemeinschaftlich. Denkt man sich nun eine neue (vierte) Ebene hinzu, welche die Fläche F in der Curve f und die Fläche H in der Curve h schneidet, so müssen beide Curven dasjenige Element gemeinschaftlich haben, welches in das vorhin erwähnte Flächenelement fällt, oder sie haben in dem Punkte P, wo sie von der ursprünglichen Lage der M geschnitten werden, einerlei Tangente, und daher haben auch die Flächen F und H im Punkte P einerlei Berührungsebene, wobei nicht vergessen werden darf, daß P jeden beliebigen Punkt der M bedeuten kann. Demnach berühren sich die Flächen F und H selbst nach der gemeinschaftlichen Mantellinie M. — Das Hyperboloid H kann aber für dieselbe Fläche F und dieselbe Mantellinie M unendlich viele verschiedene Formen annehmen; denn seine Leitenden sind drei Tangenten, welche man durch drei beliebig auf M genommene Punkte beliebig zieht. Sind diese drei Tangenten mit einer Ebene parallel (was

immer möglich ist), so geht das Hyperboloid in ein hyperbolisches Paraboloid über.

Das Ergebniß obiger Untersuchung ist der Lehrsatz: Jede windschiefe Fläche kann längs irgend einer willkürlich bestimmten Mantellinie von unendlich vielen einmanteligen Hyperboloiden und unendlich vielen hyperbolischen Paraboloiden berührt werden.

Ist nun eine windschiefe Fläche F z. B. durch drei Leitcurven gegeben und auf einer Mantellinie M derselben ein Punkt A, durch welchen eine Berührungsebene geführt werden soll, so ziehe man an die Leitcurven durch die Punkte, wo sie von der M geschnitten werden, Tangenten, betrachte diese als die Leitenden eines Hyperboloids und suche für dasselbe die dem Punkte A entsprechende Berührungsebene (Nr. 348, B); diese berührt dann zugleich die Fläche F in A.

Ist eine windschiefe Fläche F durch zwei Leitende und eine Richtebene gegeben, so findet man ein berührendes Paraboloid, wenn man an die Leitenden Tangenten durch die Punkte zieht, wo sie von einer Mantellinie M getroffen werden, und dann diese Tangenten als Leitende eines Paraboloids P nimmt, welches mit der gegebenen Fläche F die Richtebene gemein hat. Denn beim Uebergange in die unendlich nahe folgende Lage bleibt die M sowohl auf den Leitenden als auf ihren Tangenten, daher sowohl auf F als auf P, oder beide Flächen haben ein Element gemeinschaftlich.

Ist die windschiefe Fläche F durch eine Leitlinie, eine Leitfläche und eine Richtebene gegeben, so könnte man wie im vorigen Fälle verfahren, da die Leitfläche durch eine Leitcurve ersetzt werden kann, durch die Curve nämlich, welche auf der Leitfläche durch die Berührungspunkte der Mantellinien bestimmt wird; statt der Tangente dieser Curve kann man aber auch durch den betreffenden Berührungspunkt eine beliebige Tangente an die Leitfläche ziehen, weil jede solche Linie (nach Nr. 346) zugleich eine Tangente der windschiefen Fläche selbst sein muß. (Ein Beispiel hiezu liefert die nächste Nummer.)

† Der oben gefundene Satz führt noch auf einen allgemeineren Lehrsatz; nämlich: Wenn irgend zwei windschiefe Flächen eine Mantellinie gemeinschaftlich haben und sich in drei Punkten derselben berühren, so berühren sie sich längs der ganzen Ausdehnung dieser Mantellinie; denn es kommt

ihnen ein gemeinschaftliches Berührungshyperboloid zu, dessen Leitende durch jene drei Punkte gehen und beide Flächen berühren.

†† Ein hyperbolisches Paraboloid, welches eine windschiefe Fläche F längs der Mantellinie M berühren soll, kann man so wählen, daß dasjenige System seiner Mantellinien, zu welchem die M nicht gehört, diese Linie M unter rechten Winkeln schneidet. Eine Normale der Fläche F, durch einen beliebigen Punkt der M gelegt, steht senkrecht auf M und auf der durch den nämlichen Punkt gehenden andern Mantellinie des Paraboloids. Man kann also das ganze Paraboloid um M so drehen, daß alle seine Mantellinien, welche ursprünglich Tangenten der Fläche F sind, gleichzeitig zu Normalen derselben werden. Hieraus folgt der Satz: Für jede windschiefe Fläche bilden die Normalen, deren Fußpunkte auf der nämlichen Mantellinie liegen, ein hyperbolisches Paraboloid.

351. Aufg. An ein Kugel-Conoid eine Berührungsebene zu legen, wenn der Berührungspunkt gegeben ist.

Fig. 109. **Aufl.** Die Richtebene sei die HE; (Ab, a′b′) die leitende Gerade; (o, o′) der Mittelpunkt und o′t′ der Halbmesser der leitenden Kugel; q′ die V-Projection des Berührungspunkts Q.

Nachdem die Umrisse der Kugel gezeichnet sind, projicire man (nach Nr. 328) die durch Q gehende Mantellinie (ct_1, c′t′), welche die Kugel in (t_1, t′) berührt, und führe ein hyperbolisches Paraboloid mit horizontaler Richtebene ein, welches nach jener Mantellinie in Berührung mit dem Kugel-Conoid steht. Die eine Leitende eines solchen Paraboloids ist die Linie (Ab, a′b′); als zweite Leitende hat man irgend eine durch (t_1, t′) gehende Tangente der Kugel zu nehmen, wobei man am besten thut, wenn man die Kugel als Drehungsfläche mit verticaler Axe betrachtet und die Tangente (ot_1, o″t′) des dem Berührungspunkte (t_1, t′) entsprechenden Meridians sucht (vgl. Nr. 336). Eine Ebene SXR′, welche das durch (Ab, a′b′), (ot_1, o″t′) und die HE bestimmte Paraboloid in (q, q′) berührt, findet man nach Nr. 349, B, und diese Ebene ist zugleich die verlangte Berührungsebene des Kugel-Conoids.

† Läge der gegebene Berührungspunkt auf der Geraden (Ab, a′b′), z. B. in (c, c′), so würde man zwei Berührungsebenen erhalten (nämlich eine besondere für jeden der beiden Flächenmäntel, welche sich nach der AB schneiden). Die eine dieser Ebenen wäre dann unmittelbar durch die Geraden (Ab, a′b′) und (ct_1, c′t′) bestimmt; die andere durch (Ab, a′b′) und (ct_2, c′t″). *

---

* Eine durch CT_1 und CT_2 gehende Ebene kann keine Berührungsebene sein, weil diese beiden Linien auf verschiedenen Mänteln der Fläche liegen.

Berührungsebenen an Umhüllungsflächen.

352. Es kommen hier nur Umhüllungen **krummer** Flächen in Betracht, da die Umhüllungsflächen der Ebene (als entwickelbare Flächen) schon berücksichtigt worden sind (Nr. 338—341).

Jede Berührungsebene einer Umhüllungsfläche berührt zugleich irgend eine Lage der umhüllten Fläche, und der Berührungspunkt liegt auf der betreffenden Charakteristik (Nr. 304). Ist man daher im Stande, für einen auf der Umhüllungsfläche gegebenen Punkt A die entsprechende Lage der umhüllten Fläche anzugeben (nämlich diejenige Lage, für welche die Charakteristik durch A geht), so hat man, um die Berührungsebene der umhüllenden Fläche im Punkte A zu erhalten, die Berührungsebene der umhüllten für denselben Punkt zu suchen.

353. Auf diesem Wege kann man namentlich für die Flächen zweiter Ordnung die Berührungsebenen leicht construiren. Es wurde schon in Nr. 308 angegeben, inwiefern man diese Flächen, mit Ausnahme des hyperbolischen Paraboloids, als Umhüllungsflächen beweglicher Kegel betrachten kann. Das hyperbolische Paraboloid ergibt sich auf ähnliche Weise als Umhüllungsfläche eines veränderlichen parabolischen Cylinders; denn durch je zwei Lagen der das Paraboloid ursprünglich erzeugenden Parabel läßt sich ein Cylinder legen, welcher in einen berührend umschriebenen übergeht, wenn die beiden Lagen zusammenfallen. *

Sowie die hier erwähnten Kegel und Cylinder mit der in Nr. 294 angegebenen Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung zusammenhängen, so führen andere Erzeugungsarten, auf welche in Nr. 302, †† hingedeutet ist (und welche auch für das hyperbolische Paraboloid möglich sind) zu andern Reihen von Kegeln und Cylindern, welche ebenfalls von den Flächen zweiter Ordnung umhüllt werden.

354. Aufg. Ein Ellipsoid, von welchem zwei Hauptebenen den Grundebenen parallel sind, ist durch die in diese Ebenen fallenden Ellipsen gegeben. Man soll an dasselbe eine Berührungsebene legen, deren Berührungspunkt ober-

---

* Der nämliche Berührungscylinder entsteht auch, wenn man an die feste Parabel durch den Punkt, in welchem die Scheitel für jene beiden Lagen der Erzeugungscurve zusammengefallen sind, eine Tangente zieht, hierauf die feste Parabel zur erzeugenden werden läßt und die Tangente mitbewegt.

halb der horizontalen Hauptebene liegt und a zur H=Projection hat.

Fig. 115. **Aufl.** Die V=Projection a″ des Berührungspunktes A findet man wie in Nr. 295. Da b″c″ die V=Projection der durch A gehenden Lage E der Erzeugungsellipse ist, so stellen zwei Tangenten, durch b″ und c″ an die Ellipse v′b″w′ gezogen, den verticalen Umriß des Kegels dar, welcher das Ellipsoid nach der Ellipse E berührt, und also wird die Berührungsebene dieses Kegels für den Punkt (a, a″) zugleich die gesuchte Berührungsebene des Ellipsoids sein. Diese Ebene geht durch die Mantellinie (oa, o″a″) des Kegels; zu ihrer völligen Bestimmung hat man sich noch auf seinem Mantel irgend eine Curve zu verschaffen und an dieselbe eine Tangente durch den Punkt zu ziehen, wo sie von der (oa, o″a″) getroffen wird (vgl. Nr. 338). Verlängert man nun vv′ und ww′ bis sie den verticalen Kegelumriß in x′ und y′ schneiden und betrachtet die Verbindungslinie x′y′ (welche parallel mit dem Grundschnitt sein muß) als die V=Spur einer zur HE parallelen Ebene, so schneidet diese Ebene den Kegel nach einer Ellipse, welche der Ellipse E ähnlich ist (Nr. 269) und deren eine Axe die Länge vw hat; diese Ellipse ist mithin der (vuw, v′w′) congruent und ihre H=Projection fällt mit vuw zusammen. Eine Tangente (ut, z′T′), durch den Schnitt (u, z′) der (oa, o″a″) und der Ellipse (vuw, x′z′y′) an letztere gezogen, fällt in die gesuchte Berührungsebene; daher sind SQ (∥ ut) und T′S′ die Spuren dieser Ebene.

Zusatz. Man sieht leicht, daß man durch dieselben Constructionen die Berührungsebene eines elliptischen Paraboloids oder eines Hyperboloids (mit einem Mantel oder zwei Mänteln) erhalten kann, und daß auch für ein hyperbolisches Paraboloid die Aufgabe sich in ähnlicher Weise behandeln läßt, wenn an der Stelle des Kegels ein umschriebener Cylinder benützt wird.

B. Berührungsebenen, parallel mit einer gegebenen Geraden.

355. Denkt man sich einer krummen Fläche F parallel mit einer Geraden G einen Cylinder C umschrieben (Nr. 259), wobei die durch die Berührungspunkte der Mantellinien gehende Curve durch X bezeichnet sein mag, so ist jede Berührungsebene dieses Cylinders auch eine Berührungsebene jener krummen Fläche; denn in ihrer ersten Eigenschaft

enthält sie eine Mantellinie des Cylinders und eine Tangente der Curve X, und diese beiden Linien sind zugleich Tangenten der Fläche F.

Es folgt hieraus, daß die Aufgabe, an die Fläche F eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden zu legen, im Allgemeinen eine unbestimmte ist, und daß der Cylinder C die Umhüllungsfläche aller Lagen vorstellt, welche die Berührungsebene einnehmen kann. Die Curve X ist der geometrische Ort des Berührungspunkts.

356. Obige Aufgabe wird aber eine bestimmte für den besondern Fall, wenn die gegebene Fläche F entwickelbar ist. Jede entwickelbare Fläche läßt sich bekanntlich als Umhüllungsfläche einer Ebene betrachten, welche sich nach einem bestimmten Gesetze bewegt, d. h. so, daß sie nur noch eine willkürliche Bedingung erfüllen kann; diese Ebene (welche fortwährend eine Berührungsebene bleibt) ist daher entweder auf eine einzige Lage oder doch auf eine Anzahl bestimmter Lagen beschränkt, wenn die Bedingung hinzutritt, daß sie einer gegebenen Geraden parallel sein soll.

Diese in bestimmter Anzahl vorhandenen Berührungsebenen vertreten hier zugleich den umschriebenen Cylinder C, und statt der Curve X erscheinen die Mantellinien der entwickelbaren Fläche, nach denen die Berührung stattfindet.

357. Aufg. An eine durch Leitende und Erzeugende gegebene Cylinderfläche eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden G zu legen.

Aufl. Da die gesuchte Ebene eine Mantellinie des Cylinders enthält, so muß eine Ebene E, welche man parallel zur Erzeugenden durch G legt, parallel mit jener Ebene sein. Ferner müssen die Spuren der gesuchten Ebene die gleichnamigen Spuren der Cylinderfläche berühren (Nr. 338, †). Man hat demnach die Spuren der Ebene E zu bestimmen (Nr. 52), eine Spur der Cylinderfläche zu zeichnen (Nr. 266) und an diese eine Tangente parallel mit der gleichnamigen Spur der E zu ziehen; diese Tangente ist dann die eine Spur der gesuchten Ebene; die zweite ist leicht hinzuzufügen, da sie der zweiten Spur von E parallel ist.

Die Berührungsebene ist mehrerer Lagen fähig, wenn man an die Cylinderspur mehrere Tangenten parallel mit der betreffenden Spur der E ziehen kann.

358. Aufg. An eine durch Leitende und Spitze gegebene Kegelfläche eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden G zu legen.

Aufl. Die Berührungsebene muß, weil sie eine Mantellinie enthält, durch die Kegelspitze gehen; und da sie zugleich parallel mit G sein soll, so muß eine durch die Kegelspitze parallel mit G gelegte Linie P ganz in diese Ebene fallen. Eine Spur derselben findet man also, wenn man eine der Kegelspuren zeichnet und an diese eine Tangente aus der gleichnamigen Spur der P zieht (vgl. Nr. 338, †); ihre zweite Spur ergibt sich durch die zweite Spur der P. (Lassen sich n Tangenten an die Kegelspur aus der entsprechenden Spur der P ziehen, so gibt es n Ebenen, welche der Aufgabe genügen.)

† Ist die Leitende der Kegelfläche eine ebene Curve, so kann man auch, um der Construction der Kegelspur auszuweichen, den Punkt suchen, in welchem die P die Ebene der Leitenden trifft, aus diesem Punkte eine Tangente T an die Leitende ziehen, und durch T und P eine Ebene führen, welche dann die verlangte Berührungsebene sein wird.

359. Aufg. Eine entwickelbare Fläche hat zur Rückkehrcurve eine gegebene Schraubenlinie mit verticalstehender Axe. Man soll an diese Fläche eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden G legen.

Aufl. Ehe man noch die gesuchte Berührungsebene selbst hat, läßt sich ihre H-Neigung φ finden, da diese (Nr. 314) der H-Neigung der Mantellinien gleich ist. Legt man nun durch G eine Ebene E unter der H-Neigung φ (Nr. 81), so ist diese Ebene parallel mit der gesuchten, und letztere selbst kann man demnach leicht erhalten, indem man noch berücksichtigt, daß ihre H-Spur die H-Spur der Fläche (d. i. die Evolvente des Kreises, in welchen sich die Schraubenlinie projicirt) berühren muß.

† Auf eine bestimmte Anzahl beschränken sich hier die Berührungsebenen nur unter der Voraussetzung, daß die Fläche selbst zwischen bestimmten Grenzen (gewöhnlich zwischen zwei zur Axe senkrechten Ebenen) genommen sei. Mit der Erweiterung dieser Grenzen wächst jene Anzahl.

†† Da es für die Ebene E im Allgemeinen zwei Lagen gibt (deren H-Spuren durch H_1 und H_2 bezeichnet sein mögen), so zerfallen auch die Berührungsebenen in zwei Parallelgruppen. Man wird parallel mit H_1 und parallel mit H_2 desto mehr Tangenten an die als Flächenspur erscheinende Kreisevolvente ziehen können, je weiter man die Evolvente (in ihren beiden Zweigen) fortsetzt. Dabei ist aber zu beachten,

daß nicht jede dieser Tangenten die Spur für eine der verlangten Berührungsebenen darstellt. Ist z. B. in Fig. 102 die Tangente PR parallel zu H_1, so wäre auch die Tangente im Punkte S parallel zu H_1; von den beiden Berührungsebenen, welche diese beiden Tangenten zu Spuren haben, kann aber blos eine der Aufgabe entsprechen, da beide Ebenen, obwohl sie gleiche H-Neigung haben, nicht parallel sind. (Nur wenn G parallel zur HE liegt, also $H_1 \parallel H_2$ ist, würden beide Berührungsebenen gelten, jedoch ohne zur nämlichen Parallelgruppe zu gehören.) — Welche Tangenten für die Lösung der Aufgabe brauchbar sind, läßt sich leicht entscheiden, wenn man sich vergegenwärtigt, nach welcher Seite die zugehörige Ebene ihre spitze Neigung kehrt.

360. Soll an eine krumme Fläche F, welche keine entwickelbare ist, eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden G gelegt werden, so läßt sich die Aufgabe zu einer bestimmten dadurch machen, daß man verlangt, der Berührungspunkt solle einer auf der Fläche gegebenen Curve angehören; denn dann ergibt er sich durch den Schnitt dieser Curve und der X (Nr. 355). Ohne eine solche besondere Bedingung aber geht die Aufgabe, wenn alle ihre möglichen Auflösungen mittelbar zusammengefaßt werden sollen, eigentlich in folgende über: Der Fläche F einen berührenden Cylinder parallel mit einer gegebenen Geraden zu umschreiben und die Curve X der Berührung zu finden. Der allgemeine Weg der Lösung dieser neuen Aufgabe ist bereits in Nr. 259 angedeutet; die wirkliche Ausführung der Constructionen setzt aber voraus, daß man die Schnitte einer krummen Fläche und einer Ebene projiciren könne, was erst das folgende Kapitel zu lehren hat. Besondere Beispiele, welche eine einfachere Behandlung zulassen, werden in Nr. 364 und Nr. 365 betrachtet werden.

† Die Curve X wird in den meisten Fällen eine gewundene sein. Ist aber die gegebene Fläche von der zweiten Ordnung, so ist die Curve X immer eben, nämlich eine Linie zweiter Ordnung; ihre Ebene ist eine Diametralebene und dem mit G parallelen Durchmesser der Fläche zugeordnet (Nr. 298. 302).

361. Es ist hier am Ort, eine allgemeine Methode anzugeben, wie man für jede gegebene Fläche die Umrisse finden kann. Auf jeder Grundebene ist der Umriß einer Fläche die Spur eines Cylinders, welcher der Fläche so umschrieben ist, daß seine Mantellinien senkrecht auf der GE stehen. Die Curve, in welcher dieser Cylinder die Fläche berührt, ist in Beziehung auf die

betreffende Grundebene die Grenze zwischen dem sichtbaren und unsichtbaren Theile der Fläche.

Hiernach muß die Spur jeder zur GE senkrechten Berührungsebene der Fläche eine Tangente des Umrisses sein; denn diese Ebene ist zugleich eine Berührungsebene jenes Cylinders.

† Auf Grund des Vorstehenden lassen sich einige Lehrsätze, welche in Betreff einzelner Flächenarten schon bei früheren Gelegenheiten erwiesen worden sind, nunmehr mit allgemeiner Geltung aufstellen.

I) Ist auf einer krummen Fläche irgend eine stetige Curve Y so gezogen, daß sie sich (in Beziehung auf eine Grundebene gedacht) sowohl über den unsichtbaren als den sichtbaren Theil der Fläche erstreckt, so berührt ihre Projection den gleichnamigen Umriß der Fläche. Denn berührt eine zur Grundebene senkrechte Ebene die Fläche in einem Punkte P der Curve Y, so fällt die Projection der durch P an Y gezogenen Tangente in die Spur dieser Ebene, und diese Spur berührt den Umriß der Fläche, ist also eine gemeinschaftliche Tangente dieses Umrisses und der Projection von Y.

II) Wird eine Fläche F von irgend einer andern ihr umschriebenen Fläche 𝔉 in einer Curve Y berührt, und beide Flächen liegen gegen das Grundsystem so, daß sie Umrisse zulassen, so berührt der Umriß der Fläche 𝔉 den gleichnamigen Umriß der Fläche F.

III) Unter den nämlichen Voraussetzungen werden zugleich die Umrisse beider Flächen in ihren gemeinschaftlichen Punkten von der gleichnamigen Projection der Berührungscurve Y berührt.

Für II und III ergibt sich der Beweis aus I; denn ist P derjenige Punkt der Curve Y, für welchen die gemeinschaftliche Berührungsebene der Flächen F und 𝔉 senkrecht zur Grundebene steht, so muß in der Projection von P sowohl der Umriß der F als der Umriß der 𝔉 von der Projection der Y berührt werden, weil Y sowohl auf F als auf 𝔉 liegt.

362. Aufg. Eine Ebene zu finden, welche eine gegebene Drehungsfläche in einem bestimmten Parallelkreise berührt und mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

Fig. 116. **Aufl.** Die Drehungsfläche sei durch die verticalstehende Axe (o, o′ o″) und den Hauptmeridian (vw, a′v′w′) gegeben; (gh, g′h′) sei die gegebene Gerade, (mfn, m′n′) der gegebene Parallelkreis.

Die gesuchte Ebene wird zugleich einen Kegel K berühren, welcher der Drehungsfläche nach dem Parallelkreis (mfn, m′n′) umschrieben werden kann (vgl. Nr. 308); deshalb läßt sich die Aufgabe auf die der Nr. 358 zurückführen.

Die Spitze des Kegels liegt auf der Drehungsaxe; sein verticaler Umriß besteht aus den durch m′ und n′ an die Curve a′v′w′ gelegten

Tangenten m′k′, n′k″. Zieht man durch die Spitze eine Parallele P zu GH und aus dem Punkte, wo sie die Ebene des Parallelkreises trifft, Tangenten an letzteren, so bestimmen diese mit der Linie P zwei Ebenen, deren jede für die verlangte Berührungsebene genommen werden kann (vgl. Nr. 358, †); ihre Berührungspunkte sind die Punkte, in denen die erwähnten Tangenten den Parallelkreis berühren.

Fällt die Kegelspitze in zu große Entfernung (wie es in der That bei Fig. 116 der Fall ist), so rücke man den Kegel, ohne ihn zu drehen oder zu neigen, abwärts, so daß seine Spitze in einen tiefer liegenden Punkt der Drehungsaxe, z. B. in (o, o′), trifft (wobei offenbar die Linien seines verticalen Umrisses q′o′r′ parallel mit den Tangenten m′k′, n′k″ bleiben), bestimme seine neue H-Spur qyr, ziehe (oS, o′s′) || (gh, g′h′) und lege durch die H-Spur S der erstern Linie Tangenten Sx, Sy an qyr. Dann sind ox, oy die H-Projectionen der Mantellinien, in denen die neue Stellung des Kegels von zwei mit (gh, g′h′) parallelen Ebenen berührt wird. Rückt man hierauf den Kegel in seine ursprüngliche Stellung zurück, so bewegen sich jene beiden Mantellinien in ihren h-projicirenden Ebenen fort und behalten also ihre H-Projectionen unverändert bei. Daher sind die Punkte e, f, wo diese die H-Projection mfn des gegebenen Parallelkreises treffen, die H-Projectionen und e′, f′ die zugehörigen V-Projectionen der Punkte, in denen die gegebene Drehungsfläche von den verlangten Ebenen berührt wird. Die Spuren dieser Ebenen lassen sich auf verschiedenen Wegen leicht hinzufügen.

† Die Art, wie man die Berührungsebenen fand, zeigt, daß es nie mehr als zwei derselben geben kann, welche Form auch die gegebene Drehungsfläche haben mag; denn die Lage dieser Ebenen hängt wesentlich von den Tangenten eines Kreises ab, welche an ihn von einem außer ihm gelegenen Punkte gezogen werden, und deren sind nur zwei möglich.

Geht die Kegelspur qyr durch S (in welchem Falle sich ox und oy mit oS vereinigen), so gibt es nur eine Berührungsebene; gar keine, wenn jene Spur den Punkt S einschließt.

363. Aufg. Eine Ebene zu finden, welche eine gegebene Drehungsfläche in einem bestimmten Meridian M berührt und mit einer gegebenen Geraden GH parallel ist.

Aufl. Die Drehungsfläche sei auf dieselbe Art wie vorhin gegeben; Fig. 116.
die H-Projection des Meridians M habe die Richtung of.

Denkt man sich nach diesem Meridiane einen Cylinder um die Drehungsfläche beschrieben, indem man den Meridian als Leitende betrachtet und die Mantellinien senkrecht zu seiner Ebene annimmt (vgl. Nr. 307), so wird die gesuchte Ebene zugleich eine Berührungsebene dieses Cylinders sein, und die Aufgabe kommt auf Nr. 357 zurück.

Durch einen Punkt der Drehungsaxe, z. B. durch (o, o'), ziehe man eine Parallele OS zu GH und durch deren H-Spur S eine Senkrechte Sy zu of. Dann ist die Ebene, welche durch die Linien OS und Sy bestimmt wird, parallel mit der gesuchten Berührungsebene, und die Linie Oy (nach welcher jene erstere Ebene die Meridianebene schneidet) parallel mit dem Schnitt der Meridianebene und Berührungsebene. Dieser Schnitt ist aber eine Tangente des Meridians und der Berührungspunkt derselben gibt zugleich den Berührungspunkt für die gesuchte Ebene. Damit man nun die V-Projection des Meridians nicht zu zeichnen braucht, drehe man seine Ebene, bis sie in die des Hauptmeridians fällt; dadurch kommt die Linie Oy in die Lage (or, o'r'); eine mit (or, o'r') parallele Tangente des Hauptmeridians hat den Berührungspunkt (n', n), welcher nach Zurückbewegung des Meridians die Lage (f, f') einnimmt und hier den Berührungspunkt einer Ebene vorstellt, welche die Forderung der Aufgabe erfüllt. Die Spuren dieser Ebene sind leicht nachzubringen.

Die Form des Meridians ist für den Gang der Auflösung gleichgiltig, hat aber Einfluß auf die Zahl der Lösungen. In Fig. 116 ist der gegebene Hauptmeridian a'v'w' eine Ellipse; deshalb gibt es hier noch eine zweite mit o'r' parallele Tangente t'u'. und mithin auch eine zweite Lage für die verlangte Ebene. Die Berührungspunkte n', t' paralleler Tangenten liegen auf einem Durchmesser der Ellipse; daraus folgt $n'\alpha' = t'\beta'$, und daher müssen die zwei Parallelkreise, auf welche die Berührungspunkte (f, f'), (f, f') für beide Lagen der Ebene fallen, eine gemeinschaftliche H-Projection nfmf haben.

Fig. 116. **364. Aufg.** Einer Drehungsfläche, welche durch die (verticalstehende) Axe (o, o'o'') und den Hauptmeridian (vw, a'v'w') gegeben ist, einen Cylinder parallel mit der Geraden (gh, g'h') zu umschreiben und die Berührungscurve zu construiren.

Aufl. Als Beispiel ist ein Ellipsoid gewählt; doch bleibt das im Folgenden angegebene Verfahren bei allen Drehungsflächen im Wesentlichen dasselbe.

Zwei mit g'h' parallele Tangenten der Ellipse a'v'w' bilden den

verticalen Umriß des umschriebenen Cylinders (Nr. 361, II) und die Berührungspunkte a′, b′ gehören der V-Projection der Berührungscurve an. Die zugehörigen (auf vw gelegenen) H-Projectionen a, b sind zwei Punkte für die H-Projection dieser Curve. Bemerkt man, daß der horizontale Umriß des Ellipsoids die H-Projection des Aequators ist (welchem als V-Projection die Axe v′w′ der Ellipse a′v′w′ zukommt), so erhält man auf ähnliche Weise den horizontalen Umriß des Cylinders und zwei neue Punkte (c, c′), (d, d′) der Berührungscurve.

Um nun noch beliebig viele andere Punkte der Curve zu finden, löse man wiederholt die Aufgabe der Nr. 362 in Bezug auf verschiedene Parallelkreise, oder auch die Aufgabe der Nr. 363 für mehrere Meridiane (wobei man natürlich immer nur auf die Berührungspunkte der dort verlangten Ebenen Rücksicht nimmt). *

Macht man im erstern Falle Gebrauch von jener Rückung des Hülfskegels K, und zwar so, daß die Spitzen der den verschiedenen Parallelkreisen entsprechenden Kegel immer in den nämlichen Punkt (o, o′) versetzt werden, so gilt die Linie (oS, o′s′) für alle diese Kegel zugleich. Die H-Spuren der Kegel ändern sich; aber an alle hat man von S aus Tangenten zu legen, deren Berührungspunkte mithin alle in den über oS beschriebenen Kreis fallen; zeichnet man diesen Kreis zum Voraus, so braucht man die Tangenten selbst gar nicht zu ziehen, weil sich die Berührungspunkte durch die Schnitte des Kreises und der Kegelspuren ergeben.

Aus Nr. 362, † geht hervor, daß im Allgemeinen jeder Parallelkreis zwei Punkte der Berührungscurve trägt, daß aber auf gewisse Parallelkreise gar keine Punkte fallen können. Die Grenzen, zwischen denen die Curve eingeschlossen ist, sind jene Parallelkreise, welche nur je einen Punkt mit ihr gemein haben; diese Parallelkreise müssen die Curve berühren, und ihre Projectionen berühren die gleichnamigen Curvenprojectionen; man findet sie wie folgt. Derjenige Hülfskegel, dessen H-Spur nach der Rückung durch S geht, hat $\gamma'o'\delta'$ als verticalen Umriß für seine gerückte Stellung, und den Umriß $\varphi'\xi'\psi'$ oder $\varphi''\xi''\psi''$ für seine ursprüngliche Stellung erhält man durch Tangenten, welche parallel

* Auf der Zeichnungsebene hat man (wie die Vergleichung zwischen Nr. 362 Nr. 363 zeigt) in dem einen Falle ganz dieselben Constructionen auszuführen, wie im andern, nur in veränderter Ordnung.

zu $o'\gamma'$ und $o'\delta'$ an $a'v'w'$ gezogen sind; daher ist sowohl $\varphi'\psi'$ als $\varphi''\psi''$ die V-Projection eines Parallelkreises, in welchem das Ellipsoid nur von einer mit GH parallelen Ebene berührt wird, und zwar in einem Punkte, dessen H-Projection auf oS liegen muß (Nr. 362, †). Dem Obigen gemäß stellen daher $\varphi'\psi'$ und $\varphi''\psi''$ zwei Tangenten für die V-Projection der gesuchten Berührungscurve vor, zwischen denen diese Projection enthalten ist. Da (wie leicht zu zeigen) $\varphi'\psi' = \varphi''\psi''$ sein muß, so haben die erwähnten zwei Parallelkreise eine gemeinschaftliche H-Projection $\varphi\omega\psi\pi$; die auf ihnen liegenden Punkte der Berührungscurve (der höchste und tiefste) sind (ω, ω') und (π, π'). Es ist rathsam, mit der Bestimmung dieser Punkte die Construction der Curve zu beginnen.

† Die Sehne zwischen irgend zwei auf einerlei Parallelkreis liegenden Punkten E, F der Berührungscurve wird von der durch oS gehenden verticalen Ebene senkrecht halbirt (wie sich aus Fig. 116 leicht beweisen läßt). Daher theilt die durch die Drehungsaxe parallel zu GH gelegte Ebene (oS) die Berührungscurve immer in zwei symmetrische Hälften.

365. Aufg. Einer Fläche zweiter Ordnung einen Cylinder parallel mit einer Geraden GH zu umschreiben.

Fig. 117. **Aufl.** Die Fläche sei ein Ellipsoid; die Grundebenen sind parallel mit zwei Hauptebenen desselben angenommen.

Die Umrisse des Cylinders und vier Punkte (a', a), (b', b), (c, c'), (d, d') der Berührungscurve, welche paarweise in der verticalen und horizontalen Hauptebene liegen, findet man ebenso wie in Nr. 364.

Die beiden Punkte der Berührungscurve, welche auf die in m'n' v-projicirte Lage der Erzeugungsellipse fallen, sind mit Hülfe eines Kegels zu erhalten, welcher nach dieser Ellipse dem Ellipsoid umschrieben ist und seine Spitze in der verticalen Axe (o, o'o'') des letztern hat (Nr. 353); sein verticaler Umriß besteht aus den Tangenten m'o'', n'o'' des Ellipsoid-Umrisses. Schneidet man diesen Kegel durch eine horizontale Ebene x'y' so, daß die H-Projection des Schnittes mit dem horizontalen Umrisse vdw des Ellipsoids zusammenfällt (vgl. Nr. 354), und zieht aus dem Punkte (t, t'), in welchem die Ebene x'y' von einer durch die Kegelspitze (o, o'') parallel zu (gh, g'h') gelegten Geraden (ot, o''t'') geschnitten wird, an die Ellipse (vdw, x'y') Tangenten, so führen deren Berührungspunkte (q, q'), (r, r') auf zwei Mantellinien (oq, o''q'), (or, o''r') des Kegels, nach welchen er von zwei zu GH parallelen

Ebenen berührt wird. Die Punkte, in denen diese beiden Ebenen das Ellipsoid berühren, sind die Schnitte der genannten Mantellinien mit der in m′n′ v-projicirten Ellipse und gehören der gesuchten Berührungscurve an. Man findet zunächst ihre V-Projection e′, f′ und aus diesen auch die H-Projectionen e, f.

Indem man für die Linie m′n′ nach und nach andere Lagen annimmt, erhält man so viele Punkte der Berührungscurve, als man zu ihrer Construction nöthig hat. — Fällt der Punkt t auf die Peripherie der Ellipse vdw, so gibt es nur eine mit GH parallele Berührungsebene des Hülfskegels, also auf der entsprechenden Lage von m′n′ nur einen Punkt für die V-Projection der Berührungscurve, und dieser Punkt ist entweder der höchste oder tiefste.

Ist statt eines Ellipsoids ein Hyperboloid oder elliptisches Paraboloid gegeben, so läßt sich die Aufgabe durch die nämlichen Constructionen lösen. Für ein hyperbolisches Paraboloid hat man statt der umschriebenen Kegel umschriebene Cylinder zu Hülfe zu nehmen (vgl. Nr. 353).

Am zweimanteligen Hyperboloid wird der verlangte Cylinder unmöglich, wenn ein mit der Richtlinie paralleler Durchmesser ein reeller ist; denn an keine der Hyperbeln, deren Ebenen durch einen solchen Durchmesser gehen, ist parallel mit ihm eine Tangente möglich (Nr. 224).

C. **Berührungsebenen, welche durch einen außerhalb der Fläche gegebenen Punkt gehen.**

366. Die Aufgabe, an eine Fläche F eine Berührungsebene durch einen außerhalb gegebenen Punkt P zu legen, ist (wenn nicht noch eine anderweitige Bedingung hinzukommt) im Allgemeinen eine unbestimmte; denn es genügt ihr jede Ebene, welche den der Fläche aus P umschriebenen Kegel K berührt.

Nur wenn die Fläche F entwickelbar ist, wird die Aufgabe eine bestimmte, wie aus der allgemeinen Erörterung der Nr. 356 folgt.

Der Kegel K, welcher einer nicht entwickelbaren Fläche F aus dem Punkte P umschrieben ist, berührt diese Fläche in einer stetigen Curve **X**, und diese stellt den geometrischen Ort für den Berührungspunkt einer durch P gehenden Berührungsebene vor.

Ist F eine Fläche zweiter Ordnung, so ist X eine Linie zweiter Ordnung und ihre Ebene ist dem nach P gerichteten Durchmesser der Fläche zugeordnet (Nr. 298. 302).

367. Aufg. An eine Cylinderfläche, für welche man Leitende und Erzeugende kennt, eine Berührungsebene durch einen außerhalb gegebenen Punkt P zu legen.

Aufl. Eine Gerade H, durch P parallel zur Erzeugenden gelegt, fällt ganz in die gesuchte Ebene, indem letztere eine Mantellinie enthält. Die Spuren der Ebene gehen durch die Spuren der H und berühren die gleichnamigen Cylinderspuren; man kann sie also leicht erhalten, wenn man eine der Cylinderspuren construirt.

† Ist die Leitende eben, so kann man auch aus dem Punkte, wo ihre Ebene von der H geschnitten wird, eine Tangente T an sie ziehen und durch T und H eine Ebene führen; dadurch wird die Cylinderspur entbehrlich.

368. Aufg. An eine Kegelfläche, deren Leitende und Spitze gegeben sind, eine Berührungsebene durch einen außerhalb angenommenen Punkt P zu legen.

Aufl. Man verbinde P mit der Kegelspitze durch eine Gerade H und lege durch diese eine Ebene, deren eine Spur die gleichnamige Kegelspur berührt.

Die Construction der Kegelspur kann wegbleiben, wenn die Fläche eine ebene Leitende hat (vgl. Nr. 358, †).

369. Aufg. An eine entwickelbare Schraubenfläche eine Berührungsebene durch einen außerhalb gegebenen Punkt P zu legen.

Aufl. Die Fläche sei durch ihre Rückkehrcurve gegeben, deren Axe vertical stehen soll.

Die H-Neigung der gesuchten Berührungsebene stimmt mit der H-Neigung φ der Mantellinien überein (Nr. 314), ist also zum voraus bekannt. Zieht man durch P eine Gerade, welche dieselbe H-Neigung φ hat und betrachtet sie als die Erzeugende eines Drehungskegels, dessen Axe das h-projicirende Loth Pp ist, so muß unter den Berührungsebenen dieses Kegels (denen allen die H-Neigung φ zukommt) auch die gesuchte Berührungsebene der Schraubenfläche sein. Die H-Spur derselben ist demnach eine gemeinschaftliche Tangente der horizontalen Kegelspur und der H-Spur der Schraubenfläche, und kann gezeichnet werden, sobald man diese beiden Spuren gezeichnet hat; die Kegelspur ist ein um die

H-Projection p des Punktes P beschriebener Kreis, dessen Halbmesser man leicht findet; die Spur der Schraubenfläche erhält man durch Evolution des Kreises, welcher die H-Projection der Rückkehrcurve vorstellt. Die Berührungsebene ist durch ihre H-Spur und den Punkt P hinreichend bestimmt, so daß man nun auch ihre V-Spur leicht hinzufügen kann.

† Man wird mehrere Berührungsebenen erhalten, und zwar in um so größerer Zahl, je weiter die Evolvente fortgesetzt worden ist. Aber nicht jede gemeinschaftliche Tangente obiger beiden Flächenspuren kann für die H-Spur einer solchen Ebene gelten; denn es ist wohl zu beachten, daß die beiden Mantellinien, in denen der Kegel und die Schraubenfläche berührt werden, parallel sind, und daß also die H-Projectionen derjenigen Stücke, welche von beiden Mantellinien auf einerlei Seite der HE fallen, auch nach einerlei Seite der gemeinschaftlichen Tangente gerichtet sein müssen.

370. Aufg. Eine Ebene berühre eine Drehungsfläche in einem bestimmten Parallelkreise und gehe durch einen außerhalb gegebenen Punkt P; man verlangt den Berührungspunkt.

Aufl. Die Fläche sei durch ihre Axe (o, o′o″) (zu welcher die HE senkrecht angenommen ist) und ihren Hauptmeridian (vw, v′b′w′) gegeben. Der Parallelkreis, auf welchem der Berührungspunkt liegen soll, sei (mfn, m′n′). Fig. 118.

Die fragliche Ebene muß zugleich den Kegel berühren, welcher der Drehungsfläche nach dem Parallelkreise (mfn, m′n′) umschrieben ist und als verticalen Umriß die Tangenten m′k′, n′k″ der Curve v′b′w′ hat. Eine durch P gelegte horizontale Ebene schneidet diesen Kegel nach dem Kreise (q′r′, qxyr) und die Berührungsebene nach einer von P ausgehenden Tangente dieses Kreises (Nr. 338, †), für deren H-Projection man entweder px oder py erhält, woraus zu ersehen, daß zwei Ebenen der Forderung der Aufgabe entsprechen. Die Mantellinien des Hülfskegels, nach denen jene Ebenen ihn berühren, haben die H-Projectionen oex, ofy; die Punkte (e, e′), (f, f′), wo diese Mantellinien den Parallelkreis (mfn, m′n′) schneiden, sind die verlangten Berührungspunkte.

† Die Aufgabe kann immer nur durch höchstens zwei Punkte gelöst werden, und diese liegen so, daß ihre (horizontale) Verbindungslinie von der durch P und die Drehungsaxe geführten Ebene senkrecht halbirt wird.

Beide Punkte fallen in einen zusammen, wenn der Kreis qyr durch p geht; und sie werden unmöglich, wenn p innerhalb dieses Kreises liegt.

371. Aufg. Auf einem bestimmten Meridian **M** einer gegebenen Drehungsfläche einen Punkt zu finden, für welchen die Berührungsebene der Fläche durch einen außerhalb gegebenen Punkt P geht.

Fig. 118. **Aufl.** Die Fläche sei wie in Nr. 370 gegeben; der Meridian **M** habe die H=Projection of.

Ein Cylinder, welcher den gegebenen Meridian als Leitende und eine zur Meridianebene senkrechte Erzeugende hat, wird von der gesuchten Ebene berührt, so daß es möglich ist, die Aufgabe auf Nr. 367 zurückzuführen. Man kann aber auch diesen Cylinder außer Acht lassen und dafür von der Bemerkung ausgehen, daß die Berührungsebene 1) senkrecht auf der Ebene des gegebenen Meridians steht (Nr. 335, 1), mithin durch eine aus P auf letztere gefällte Senkrechte PY geht, und 2) die Meridianebene in einer Tangente der Meridiancurve schneiden muß. Die H=Projection der PY ist py (⊥ of), die V=Projection p′r′ (|| GS). Dreht man die Meridianebene bis sie parallel zur VE wird, so kommt der Fußpunkt Y nach (r, r′); zwei aus (r, r′) an die neue Lage des Meridians gezogene Tangenten berühren diesen in den Punkten (n′, n), (t′, t), welche bei Zurückführung der Meridianebene in ihre eigentliche Stellung die Lagen (f, f′), (g, g′) erhalten. Von den Punkten (f, f′), (g, g′) kann jeder für den gesuchten Berührungspunkt genommen werden.

Wie viele Lagen der gesuchte Punkt haben kann, hängt immer von der Gestalt des Meridians ab.

372. Uebungsaufgaben.

1) An eine gegebene Drehungsfläche durch einen gegeben Punkt eine Berührungsebene zu legen, welche die Drehungsaxe unter einem gegebenen Winkel schneidet.

2) Ein einmanteliges Hyperboloid soll von einer durch einen gegebenen Punkt gehenden Ebene so berührt werden, daß der Berührungspunkt auf einer bestimmten Mantellinie liegt; dieser Punkt ist zu suchen. (Vgl. Nr. 343.)

Man kann beide Aufgaben auch dahin abändern, daß unter dem gegebenen Punkt der unendlich ferne Punkt einer gegebenen Geraden verstanden wird (also die verlangte Ebene parallel zu dieser Geraden sein soll).

373. Aufg. Einer gegebenen Drehungsfläche einen Kegel aus einem gegebenen Punkte P zu umschreiben und die Berührungscurve zu construiren.

Aufl. Ist (o, o′o″) die (verticalstehende) Axe und (vw, v′b′w′) der Hauptmeridian der Fläche, so erhält man zwei auf letzterem liegende Punkte (a′, a), (b′, b) der gesuchten Berührungscurve mit Hülfe der Tangenten p′a′, p′b′ an v′b′w′, welche zugleich den verticalen Umriß des Kegels darstellen. Auf ähnliche Weise ergeben sich zwei Punkte (c, c′), (d, d′), deren H-Projectionen auf dem horizontalen Umriß der Fläche liegen, und der horizontale Umriß cpd des Kegels. Beliebig viele andere Punkte findet man nach Nr. 370 oder nach Nr. 371. Fig. 118.

Bei wiederholter Lösung der Aufgabe der Nr. 370 hat man aus p an die H-Projectionen verschiedener Parallelkreise Tangenten zu ziehen, oder eigentlich nur die Berührungspunkte derselben zu bestimmen; diese Punkte liegen alle in dem über op beschriebenen Kreise.

Wie man (auf den Grund einer in Nr. 370, † enthaltenen Bemerkung) den höchsten Punkt (ω, ω') der Berührungscurve und den tiefsten (π, π') finden könne, zeigt die Figur.

Aus Nr. 370, † folgt auch noch, daß die Berührungscurve von einer durch die Drehungsaxe und durch P gelegten Ebene immer in symmetrische Hälften getheilt wird.

374. Aufg. Einer Fläche zweiter Ordnung einen Kegel aus einem gegebenen Punkte P zu umschreiben.

Die Auflösung dieser Aufgabe stimmt fast ganz mit der Lösung der frühern in Nr. 365 überein; nur daß man hier immer die Linie (ot, o″t′) (Fig. 117) durch Verbindung des gegebenen Punktes P mit der Spitze des Hülfskegels erhält.

375. Der in den beiden letzten Aufgaben geforderte Kegel ist die Umhüllungsfläche für alle Lagen einer Ebene, welche durch den gegebenen Punkt P berührend an die gegebene Fläche gelegt werden soll (Nr. 366).

Im Allgemeinen (bei beliebiger Form der gegebenen Fläche) hat man zur Construction eines solchen Kegels und seiner Berührungscurve die Schnitte der Fläche durch Ebenen nöthig (Nr. 259).

376. Die Ebene L der Curve, nach welcher eine Fläche zweiter Ordnung F von einem aus P ihr umschriebenen Kegel berührt wird,

schneidet eine innerhalb des Kegels beliebig durch P gelegte Gerade in einem Punkte, welcher mit P harmonisch liegt gegen die beiden Punkte *, in denen die Gerade der Fläche F begegnet; denn schneidet eine durch die Gerade gehende Ebene die L nach der Geraden l, die F nach der Curve f, so ist l die Polare für P in Beziehung auf f, indem l die Berührungspunkte zweier von P ausgehenden Tangenten der f verbindet. (Nr. 278, 1.)

Falls die Fläche F von einem nach P gerichteten Durchmesser geschnitten wird, erhält man durch nachstehende Betrachtung den obigen Satz in anderer Form und mit der Erweiterung, daß P auch auf der hohlen Seite eines Ellipsoids, elliptischen Paraboloids oder zweimanteligen Hyperboloids liegen darf, wobei der Berührungskegel nicht existirt. Es seien A, A′ die Punkte, in denen jener Durchmesser die Fläche schneidet, Q der Punkt, welcher harmonisch mit P gegen A und A′ liegt. ** Eine durch den Durchmesser gelegte Ebene schneide die Fläche nach der Curve C. In Beziehung auf diese Curve geht die Polare für P durch Q und ist parallel mit der Tangente in A (da die unter sich parallelen Tangenten in A und A′ sich auf der Polare schneiden sollen). Denkt man also die Ebene C um den Durchmesser gedreht, so ist der Ort der Polaren eine Ebene, parallel mit der Berührungsebene der Fläche F im Punkte A.

Um sich alle möglichen Lagen einer durch P gehenden Geraden zu vergegenwärtigen, kann man sich die Ebene der Curve C (oder auch der Curve f) in jeder ihrer Lagen von solchen Geraden erfüllt denken. Es gilt also der allgemeine Satz: ***

Dreht sich um einen willkürlich angenommenen Punkt P des Raumes eine Gerade, und wird auf jeder ihrer Lagen der Punkt bestimmt, welcher mit P harmonisch liegt gegen die beiden Punkte, in denen die Gerade eine gegebene Fläche zweiter Ordnung trifft, so ist der geometrische Ort jenes

---

* Eine Fläche zweiter Ordnung kann von einer Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden, da jede durch die Gerade gehende Ebene die Fläche nach einer Linie zweiter Ordnung schneidet.

** Im Falle eines Paraboloids verschwindet A′ in unendlicher Entfernung und A halbirt die Strecke PQ (S. 241, †).

*** Er läßt sich leicht auch auf Kegel- und Cylinderflächen zweiter Ordnung, welche in Obigem nicht berücksichtigt sind, übertragen (vgl. Nr. 280).

Punkts eine Ebene; sie heißt die Polar-Ebene des Punkts P in Beziehung auf die gegebene Fläche, und P der Pol. — Liegt P so, daß kein aus ihm der Fläche umschriebener Kegel möglich ist, so wird die gegebene Fläche von der Polar-Ebene nicht geschnitten. Läßt sich aus P ein Kegel um die Fläche beschreiben, so schneidet die Polar-Ebene die Fläche nach der Berührungscurve des Kegels. Liegt P auf der gegebenen Fläche, so wird die Polar-Ebene durch die Berührungsebene in P vertreten, insofern diese Ebene alle die Polaren enthält, welche bezüglich der durch P auf der Fläche zu ziehenden ebenen Linien diesem Punkte entsprechen (Nr. 278).

Liegen mit den Punkten B, B′ der Fläche die Punkte P, P′ der Geraden BB′ harmonisch, so liegt ebensowohl P′ in der Polar-Ebene für P als auch P in der Polar-Ebene für P′; ist also in Beziehung auf eine Fläche zweiter Ordnung die Ebene L Polar-Ebene des Punktes P, so geht für jeden in L angenommenen Punkt die Polar-Ebene durch P. Wird durch P eine Ebene L′ beliebig gelegt und als eine Polar-Ebene betrachtet, so bestimmt sich ihr Pol P′ als Durchschnittspunkt der Polar-Ebenen für drei in L′ willkürlich gewählte Punkte, und da P als einer dieser drei Punkte genommen werden kann, muß der Pol P′ in der Ebene L liegen.

Wählt man auf der Geraden, nach welcher sich zwei Polar-Ebenen L, 𝔏 schneiden, einen Punkt, so muß dessen Polar-Ebene durch die Pole P, 𝔓 von L und 𝔏 gehen; und legt man durch P𝔓 eine beliebige Ebene, so muß deren Pol sowohl in L als in 𝔏 liegen. Schreitet also ein Pol auf einer Geraden fort, so dreht sich seine Polar-Ebene um eine Gerade; und umgekehrt.

Mit Rücksicht auf umschriebene Kegel lassen sich die beiden zuletzt gefundenen Paare von Sätzen so aussprechen:

Dreht sich eine Ebene, welche eine Fläche zweiter Ordnung schneidet, um eine Gerade, und wird der Fläche längs der Schnittcurve ein berührender Kegel umschrieben, so ist der Ort für die Spitze des Kegels eine Gerade.

Bewegt sich die Spitze eines um eine Fläche zweiter Ordnung beschriebenen Kegels in einer Geraden, so dreht sich die Ebene der Berührungscurve um eine Gerade (welche jedoch in unendliche Entfernung fällt, wenn der Weg der Spitze ein Durchmesser der Fläche ist).

Bewegt sich die Ebene der Berührungscurve um einen Punkt, so bleibt die Spitze des Kegels in einer Ebene.

Bewegt sich die Spitze des umschriebenen Kegels in einer Ebene, so geht die Ebene der Berührungscurve durch einen festen Punkt.

D. **Berührungsebenen, welche durch eine gegebene Gerade gehen.**

377. Eine Ebene, welche eine Fläche F berührt und zugleich durch eine Gerade G geht, muß jeden Kegel berühren, welcher der Fläche F aus irgend einem Punkte der G umschrieben ist, und eben so den parallel mit G ihr umschriebenen Cylinder. Hiernach hat man zur Auffindung einer solchen Ebene folgende Wege.

1) Umschreibt man der Fläche F aus zwei beliebigen Punkten der G zwei Kegel, welche die F in den Curven X und X′ berühren, so gibt der Schnitt dieser beiden Curven den Berührungspunkt der gesuchten Ebene.

2) Wird der Fläche ein Cylinder parallel mit G und ein Kegel aus irgend einem Punkte der G umschrieben, so schneiden sich die beiden Berührungscurven in dem gesuchten Berührungspunkte.

3) Man umschreibe der Fläche einen Kegel aus einem beliebigen Punkte der G und lege an diesen Kegel eine Berührungsebene durch G.

4) Man umschreibe der Fläche einen Cylinder parallel mit G und lege an ihn durch G eine Berührungsebene.

Welche von diesen Auflösungsmethoden die passendste für eine hierher gehörige Aufgabe ist, oder welche Punkte man bei (1) und (3) am schicklichsten für die Spitzen der umschriebenen Kegel nimmt, hängt immer von der Natur der gegebenen Fläche ab. Oefters kann man sich die Auflösung erleichtern, wenn man von dieser Fläche außer ihrem Entstehungsgesetz auch noch weitere Eigenschaften kennt.

378. Eine Ebene, welche durch eine gegebene Gerade G geht, kann nur noch eine Bedingung erfüllen, und ist daher bestimmt, wenn sie eine gegebene Fläche F berühren soll.

Sind für eine solche Berührungsebene n bestimmte Lagen möglich, so entsprechen diesen Lagen n bestimmte Berührungspunkte auf der Fläche F. Auf diese n Punkte muß man immer kommen, wie man auch auf G die Spitzen der in Nr. 377, 1 erwähnten Kegel wählen mag, und hieraus folgt der Satz:

Wenn man die Spitze eines Kegels, welcher einer gegebenen Fläche F umschrieben ist, in einer außerhalb der Fläche liegenden Geraden G fortschreiten läßt, so ändert sich fort-

während die Berührungscurve, geht aber immer durch eine bestimmte Anzahl fester Punkte. Dabei kann die Kegelspitze auch in unendliche Entfernung fallen oder der Kegel in einen Cylinder übergehen, dessen Mantellinien mit G parallel sind (vgl. Nr. 377, 2).

(Für Flächen zweiter Ordnung ist der Satz schon unter denen der Nr. 376 enthalten.)

379. Ist die Fläche F entwickelbar, so ist es im Allgemeinen nicht möglich, an sie eine Berührungsebene durch eine gegebene Gerade G zu legen. Denn die Berührungsebene einer entwickelbaren Fläche ist schon bestimmt, wenn sie durch einen gegebenen Punkt der G gehen soll (Nr. 366), und die übrigen Punkte der G werden dann in der Regel nicht in diese Ebene fallen.

In Nr. 377, 3. 4 hat die Gerade G gegen die entwickelbare Fläche eine solche Lage, daß die Aufgabe ausnahmsweise lösbar ist.

380. Aufg. An eine gegebene Kugel eine Berührungsebene durch eine gegebene Gerade GH′ zu legen.

Beide Grundebenen seien durch den Mittelpunkt O der Kugel gelegt, so daß in der Zeichnungsebene die beiden Umrisse sich decken.

Aufl. I. Jeder Kegel, welcher einer Kugel umschrieben ist, berührt Fig. 119. diese nach einem Kreise, dessen Mittelpunkt mit dem Kugelmittelpunkt und der Kegelspitze in gerader Linie liegt und dessen Ebene senkrecht auf dieser Linie ist. Versetzt man die Spitze eines solchen Kegels in die H-Spur G der gegebenen Geraden GH′, so sind die Tangenten GA, GB der horizontale Umriß des Kegels und die Sehne AB die H-Projection (und zugleich der Durchmesser) des Berührungskreises. Die Ebene dieses Kreises schneidet die GH′ im Punkte T und die gesuchte Berührungsebene in einer durch T gehenden Tangente desselben, deren Berührungspunkt zugleich der Berührungspunkt der verlangten Ebene ist (Nr. 260, †). In der horizontalen Umklappung der Kreisebene AB kommt T nach T_1 zu liegen (Nr. 62, †); eine aus T_1 an den umgeklappten Kreis gezogene Tangente berührt letzteren in dem Punkte R_1, dessen Lage nach der Zurückbewegung der Kreisebene den gesuchten Berührungspunkt vorstellt. Die Projectionen dieser Lage erhält man, wenn man $R_1 r \perp AB$, $rr' \perp GS$ fällt und $mr' = R_1 r$ macht. Aus T_1 geht aber an die Kreis-Umklappung AR_1B noch eine zweite Tangente $T_1 S_1$,

und diese führt auf ähnliche Weise zu einer zweiten Lage (s, s′) des gesuchten Punktes.

Die Spuren der beiden Ebenen, welche die Kugel in den Punkten (r, r′) und (s, s′) berühren, gehen von G und H′ aus und stehen senkrecht auf den gleichnamigen Projectionen der Halbmesser OR und OS. (Zugleich müssen die H-Spuren durch die H-Spuren der Tangenten TS, TR gehen, d. i. durch die Schnitte der AB mit T_1S_1 und T_1R_1.)

Fig. 119. **Aufl.** II. Außer dem vorhin betrachteten Kegel umschreibe man der Kugel einen zweiten aus der V-Spur H′ der gegebenen Geraden. Dieser berührt die Kugel nach einem Kreise, dessen V-Projection C′D′ ist. Die Berührungspunkte der gesuchten Ebenen sind die Schnittpunkte der beiden Berührungskreise AB und C′D′, oder (was dasselbe ist) die Punkte, in denen der eine Kreis AB von der Ebene des andern geschnitten wird. Nun schneiden sich beide Kreisebenen nach einer Geraden, deren Projectionen in AB und C′D′ liegen; klappt man daher die Linie (AB, C′D′) mit ihrer h-projicirenden Ebene um (Nr. 34; 60) und zugleich den Kreis AB, welcher in dieser Ebene liegt, so schneidet die umgeklappte Gerade den umgeklappten Kreis in den Punkten R_1, S_1, deren Lagen nach Zurückbewegung der projicirenden Ebene die gesuchten Berührungspunkte sind. Die H-Projectionen r, s dieser Lagen findet man wie vorhin; die V-Projectionen r′, s′ nach Nr. 44.

Die Spuren der Berührungsebenen ergeben sich wie vorhin.

Fig. 120. **Aufl.** III. Eine Ebene, welche durch die nach den gesuchten Berührungspunkten laufenden Halbmesser gelegt wird, steht senkrecht auf beiden Berührungsebenen, mithin auch auf der gegebenen Geraden; man erhält also ihre Spuren OX, OX′, wenn man aus O Senkrechte auf die Projectionen der GH′ fällt. Diese Ebene schneidet die Kugel nach einem größten Kreise, die GH′ in einem Punkte P, und die gesuchten Ebenen in zwei von P ausgehenden Tangenten des größten Kreises, deren Berührungspunkte zugleich jenen Ebenen entsprechen (Nr. 260, †). Die Projectionen des Punktes P findet man nach Nr. 48, seine Umklappung $P_{,,}$ mit der Ebene XOX′ nach Nr. 62; die Umklappung des in derselben Ebene liegenden größten Kreises fällt in den gegebenen Kugelumriß; man findet daher die umgeklappten Lagen $R_{,,}$, $S_{,,}$ der verlangten Berührungspunkte mittels der Tangenten $P_{,,}R_{,,}$, $P_{,,}S_{,,}$, und hat nun noch ihre wahren Lagen R, S zu projiciren, was auf folgendem Wege geschehen kann. Der Schnitt X der $P_{,,}S_{,,}$ und OX ist die H-Spur

der Tangente PS, also pX ihre H-Projection und s (wo pX von der auf OX senkrechten $S_{,,}v$ getroffen wird) die H-Projection von S; die V-Projection s' ergibt sich in x'p' nach Nr. 44. Ebenso wird man die Projectionen des zweiten Berührungspunkts R finden, wenn die H-Spur der Tangente PR eine günstigere Lage hat als in Fig. 120, wo $P_{,,}R_{,,}$ die XO erst in großer Entfernung schneidet. Hier umgeht man diese Spur durch Benützung der Sehne RS. Die H-Spur der (verlängerten) RS ist Z; ihre H-Projection Zs.. wird von $R_{,,}r$ ($\perp$ OX) in der H-Projection r des Punktes R geschnitten, dessen V-Projection r' in z's'.. liegen muß.

Da diese Auflösung unabhängig ist von den Spuren G, H' der gegebenen Geraden, so ist sie namentlich dann anzuwenden, wenn diese Spuren in zu große Entfernung fallen. Die Spuren der gesuchten Ebenen kann man, wenn einmal die Berührungspunkte bekannt sind, ebenfalls ohne Hülfe der Punkte G und H' finden.

Zusatz. Eine durch GH' und O gelegte Ebene halbirt den Winkel beider Berührungsebenen; denn die drei genannten Ebenen werden von der auf ihnen senkrechten Ebene XOX' nach den drei Geraden geschnitten, welche in $OP_{,,}$, $R_{,,}P_{,,}$, $S_{,,}P_{,,}$ umgeklappt sind und von denen die erste den Winkel der beiden andern halbirt. Fig. 120.

Zugleich sieht man, daß jene Ebene GOH' die zwischen den Berührungspunkten gezogene Sehne RS senkrecht halbiren muß.

381. Aufg. An eine Fläche zweiter Ordnung eine Berührungsebene durch eine gegebene Gerade zu legen. Fig. 121.

Aufl. Man lege die Grundebenen parallel zu zwei Hauptebenen der Fläche (welche beispielsweise ein Ellipsoid sein mag) und wähle für die Spitzen zweier umschriebener Hülfskegel diejenigen Punkte G, H, in denen diese Hauptebenen von der gegebenen Geraden GH geschnitten werden. Der aus G beschriebene Kegel hat als verticalen Umriß die Tangenten g'a', g'b' der Ellipse v'a'w' und berührt die Fläche nach einer Ellipse ε, deren V-Projection die gerade Linie a'b' sein muß; denn da die Kegelspitze sich in der verticalen Hauptebene des Ellipsoids befindet, so müssen je zwei (auf verschiedenen Seiten der Hauptebene gelegene) Punkte der Berührungsellipse eine gemeinschaftliche Projection auf dieser Hauptebene und also auch auf der VE haben. Zugleich sieht man, daß (a'b', ab) eine Axe der Ellipse ε sein muß; ihr Mittelpunkt liegt in (m', m), wo diese Axe von dem Flächendurchmesser GO getroffen wird. Die zweite Axe der Ellipse ε ist senkrecht zur VE und

projicirt sich also auf die HE in wahrer Länge nach der Richtung me (⊥ GS). Um aber diese Länge zu finden, benützt man den Umstand, daß das Ellipsoid durch parallele Ebenen in ähnlichen Curven geschnitten wird. Die (zu GO geordnete) Diametralebene, welche parallel zur Ebene der Ellipse ε ist, schneidet die Fläche nach einer Ellipse, deren V-Projection die Gerade c'o'd' (|| a'b') und deren Halbaxen die Linien (o'd', od), (o', ou) sind. Bezeichnet nun x die zweite Axe der Ellipse ε, so ist x : ou = m'b' : o'd' = mb : od; zieht man daher bo || ud, so ist me = x, und man kann nun die H-Projection aeb.. der Ellipse ε zeichnen, nämlich eine Ellipse mit den Halbaxen mb und me.

Der zweite umschriebene Kegel, dessen Spitze H in der horizontalen Hauptebene liegt, berührt das Ellipsoid in einer Ellipse, deren H-Projection die Gerade qr ist. Die Punkte t, s, in denen qr die Ellipse aeb schneidet, sind die H-Projectionen der Punkte, in denen das Ellipsoid von zwei durch GH gehenden Ebenen berührt wird; die zugehörigen V-Projectionen t', s' liegen auf a'b'. Die Spuren der Berührungsebenen sind nun leicht anzugeben.

Die Berührungspunkte (t, t'), (s, s') hätte man auch ohne Hülfe eines zweiten Kegels finden können; denn in diesen Punkten muß die Ellipse ε von zwei Tangenten berührt werden, welche man an sie aus dem Punkte (z', z) zieht, wo ihre Ebene die Gerade GH schneidet (Nr. 260, †). Die H-Projectionen zt, zs dieser Tangenten sammt den Punkten t, s lassen sich finden, wenn man auch die Peripherie der Ellipse aeb nicht gezeichnet, sondern nur ihre Axen (und mittels dieser die Brennpunkte) bestimmt hat (Anmerk. auf S. 185). In Fig. 121 sind die Linien ZT, ZS zugleich zur Auffindung der Spuren für die Berührungsebenen benützt.

Zusatz. Noch eine andere Lösung ergibt sich, wenn die gegebene Fläche ein einmanteliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid ist. Schneidet die gegebene Gerade G die Fläche in dem Punkte P, und sind M, N die durch P gehenden Mantellinien, so stellen die Ebenen [GM], [GN] die verlangten Berührungsebenen dar (Nr. 343). Die G wird die Fläche noch in einem zweiten Punkte P' schneiden, durch welchen die Mantellinien M', N' gehen; die Ebenen [GN'], [GM'] aber sind mit den beiden vorigen identisch, da die zu verschiedenen Systemen gehörigen Mantellinien M und N', sowie N und M', sich schneiden müssen.

Die Schnittpunkte dieser Paare sind die Berührungspunkte der Ebenen [MGN'], [NGM'].

Die graphische Ausführung dieser Auflösung wird möglich, sobald man die Schnittpunkte einer Geraden und einer krummen Fläche zu projiciren weiß (Kap. IV).

Während im Allgemeinen die Existenz einer durch eine gegebene Gerade gehenden Berührungsebene an die Bedingung geknüpft ist, daß die Gerade die gegebene Fläche nicht schneide, verhält sich's in den eben betrachteten besondern Fällen umgekehrt. Diese Eigenthümlichkeit findet sich bei windschiefen Flächen überhaupt und hängt mit der in Nr. 343 erwähnten Eigenschaft der Berührungsebenen solcher Flächen zusammen.

382. Aufg. An eine Drehungsfläche, welche durch ihre Axe (⊥ HE) und einen Meridian **M** gegeben ist, eine Berührungsebene durch eine gegebene Gerade G zu legen.

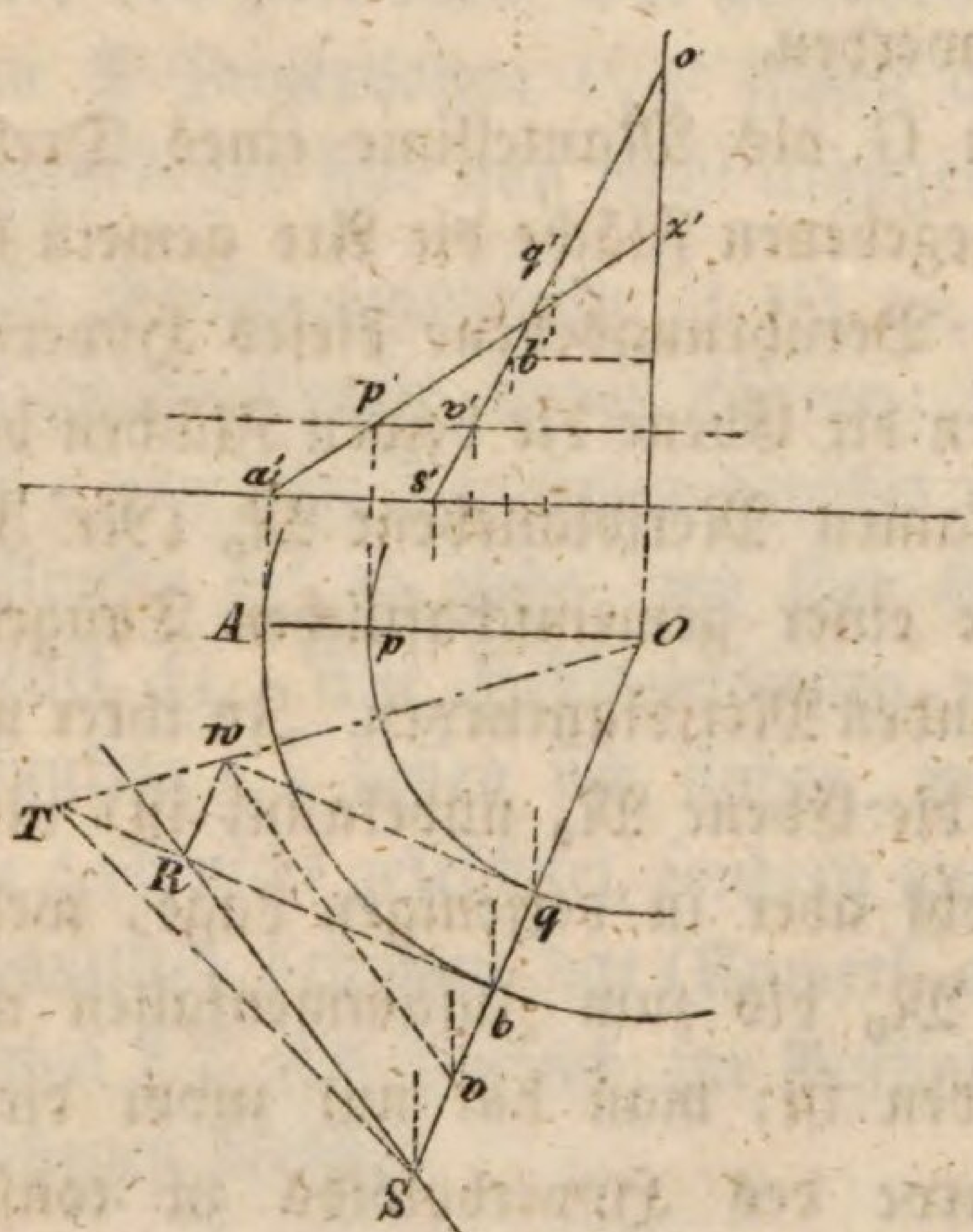
Aufl. Statt der aus Nr. 377 bekannten Methoden kann auch das folgende Verfahren angewendet werden.

Betrachtet man die Gerade G als Mantellinie eines Drehungshyperboloids, welches mit der gegebenen Fläche die Axe gemein hat, so ist die verlangte Ebene zugleich Berührungsebene dieses Hyperboloids (Nr. 344); die Punkte, in denen die Ebene die beiden Flächen berührt, liegen in der nämlichen gemeinsamen Meridianebene M_0 (Nr. 335, 1) und sind die Berührungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente an den beiden in die Ebene M_0 fallenden Meridiancurven. In ihrer wahren Lage kann diese Tangente (da die Ebene M_0 unbekannt ist) nicht unmittelbar gezeichnet werden, wohl aber in derjenigen Lage, welche sie einnimmt, nachdem die Ebene M_0 bis zum Zusammenfallen mit der Meridianebene **M** gedreht worden ist; man hat nur zuvor die in die Ebene **M** fallende Meridiancurve des Hyperboloids zu construiren (Nr. 289). Durch die in **M** gefundenen Berührungspunkte sind auf beiden Flächen die Parallelkreise bestimmt, auf denen die wahren Berührungspunkte liegen. Der dem Hyperboloid angehörige Parallelkreis schneidet die G in dem einen der letztgenannten Punkte; dieser führt nun auch auf den zweiten, auf die Meridianebene M_0 und auf die verlangte Ebene selbst, deren Spuren durch verschiedene Mittel leicht hinzuzufügen sind.

Gibt es für die beiden in der Ebene **M** gezeichneten Meridiancurven keine gemeinschaftliche Tangente, so läßt die Aufgabe keine Auflösung zu.

383. Die in diesem Abschnitt (D) behandelten Aufgaben werden **unbestimmt**, wenn die gegebene Fläche windschief und die gegebene Gerade eine Mantellinie derselben ist. Nimmt man aber eine durch die Gerade beliebig gelegte Ebene als Berührungsebene an, so bleibt noch der Berührungspunkt zu bestimmen. Wie dieß geschieht, ist bereits in Nr. 344 angezeigt.* Auch könnte man, auf Grund der Sätze in Nr. 350, der gegebenen Fläche eine windschiefe Fläche zweiter Ordnung substituiren, welche mit der gegebenen die Berührungsebene für jeden Punkt der Geraden gemein hat. Doch finden sich zuweilen einfachere Mittel, wenn die Natur der windschiefen Fläche näher bekannt ist.

384. Aufg. Eine Schraubenfläche ist (wie in Nr. 331) gegeben und durch eine ihrer Mantellinien eine Ebene beliebig gelegt. Man soll den Punkt bestimmen, in welchem diese Ebene die Fläche berührt.



Aufl. Es sei (Ab.., a′b′..) die gegebene Schraubenlinie **, (O, o′z′) ihre Axe, (bO, b′o′) die gegebene Mantellinie, T die H-Spur der durch B an die Schraubenlinie gelegten Tangente, also ST die H-Spur einer Ebene, welche die Schraubenfläche in B berührt. Auf der durch die Spur A der Schraubenlinie gehenden Mantellinie sei der Punkt P willkürlich gewählt; die neue Schraubenlinie, welche von P während der Erzeugung der Fläche beschrieben wird, schneidet die Mantellinie (Ob, o′b′) in Q. Eine durch p′ parallel zur HE gelegte Ebene H wird von der Mantellinie QB in V,

---

* Ist ein Hyperboloid so gegeben wie in Fig. 103, SR die gegebene Gerade, SU die willkürlich durch S gelegte H-Spur einer Berührungsebene, so ergibt sich der Berührungspunkt (q, q′) unmittelbar.

** Die V-Projection ist nicht gezeichnet, durch die beiden Punkte a′, b′ aber völlig bestimmt.

von der durch Q gehenden Tangente der neuen Schraubenlinie in W geschnitten; wäre also H eine Grundebene, so wäre vw die Spur der Ebene, welche die Schraubenfläche in Q berührt. Da bT = arc bA und qw = arc qp (Nr. 254), die Bögen bA und qp aber sich verhalten wie Ob : Oq, so liegt w in der geraden Linie OT. Da, wenn die Mantellinie AP sich bis zur Lage BQ fortbewegt, die H-Distanzen ihrer sämmtlichen Punkte um gleichviel wachsen, so ist die Erhebung des Punktes Q über der Ebene H gleich der H-Distanz des Punktes B; hieraus (und aus der unveränderlichen H-Neigung der Mantellinie) folgt, daß qv = bS sein muß.

Denkt man sich also den Punkt Q, in welchem die Schraubenfläche von einer Ebene berührt wird, auf der Mantellinie (Ob, o′b′) stetig fortschreitend, so ändert sich das rechtwinkelige Dreieck qvw so, daß die in OS sich verschiebende Kathete qv die nämliche Größe behält und der Endpunkt w in der Geraden OT bleibt; die H-Spur der veränderlichen Berührungsebene dreht sich um S so, daß sie immer zur jeweiligen Lage der Hypotenuse vw parallel ist.

Ist nun statt des Berührungspunkts Q die H-Spur SR einer durch BQ gehenden Berührungsebene gegeben, so ist das Dreieck RSb dem betreffenden Dreieck wvq congruent und muß, um in die Lage wvq zu kommen, auf SO verschoben werden; dabei beschreibt der Punkt R die zu SO Parallele Rw; nachdem w gefunden, ergeben sich die Projectionen q, q′ des gesuchten Berührungspunkts Q.

Die Lösung reducirt sich also auf folgende einfache Construction:

$bT \perp Ob; \quad bT = \text{arc}\, bA; \quad Rw \parallel Ob; \quad wq \perp Ob; \quad qq' \perp$ GS.

385. Uebungsaufgabe. Durch eine Mantellinie eines gegebenen Kugel-Conoids geht eine Ebene; für die Bestimmung ihres Berührungspunkts mit der Fläche sollen die Hülfsmittel aus Nr. 350 gezogen werden.

E. Berührungsebenen, parallel mit einer gegebenen Ebene.

386. Da man einer Ebene, welche mit einer gegebenen Ebene E parallel sein soll, nur noch eine willkürliche Bedingung stellen kann, so ist ihre Lage völlig bestimmt, wenn sie eine gegebene Fläche F zu berühren hat.

Eine solche Ebene berührt zugleich alle möglichen Cylinder, welche

der Fläche F parallel mit jener Ebene E (d. i. parallel mit verschiedenen in E liegenden Geraden) umschrieben sind, und die diesen Cylindern entsprechenden Berührungscurven müssen daher alle durch den Berührungspunkt der erstern Ebene gehen. (Kann die Berührungsebene mehrere Lagen haben, so gilt Obiges von jeder einzelnen Lage.)

Bewegt sich also ein Cylinder so, daß er stets einer gegebenen Fläche umschrieben bleibt und seine Mantellinien einer gegebenen Ebene parallel sind, so geht die Berührungscurve stets durch eine bestimmte Anzahl fester Punkte auf der Fläche.

387. Aus dem Vorigen ist abzunehmen, wie man eine Berührungsebene von der erwähnten Beschaffenheit finden könne. Nämlich:

1) Zieht man in der Ebene E zwei beliebige (aber nicht parallele) Gerade und umschreibt der Fläche F zwei Cylinder parallel mit diesen Geraden, so ist der Schnittpunkt der beiden Berührungscurven der Berührungspunkt der verlangten Berührungsebene. Oder:

2) Man umschreibe der Fläche F einen Cylinder parallel mit irgend einer in E gezogenen Geraden, construire eine Spur desselben und ziehe an sie eine Tangente parallel mit der gleichnamigen Spur der Ebene E; diese Tangente ist die eine Spur der verlangten Ebene; die zweite Spur ist parallel mit der zweiten Spur der E. (Der Berührungspunkt liegt auf der Berührungscurve des umschriebenen Cylinders und auf der Mantellinie, nach welcher letzterer von der gesuchten Ebene berührt wird; er ist also der Durchschnitt jener Curve und dieser Geraden.)

388. Ist die gegebene Fläche F eine entwickelbare, so ist es im Allgemeinen unmöglich, an sie eine Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Ebene E zu legen; denn eine solche Ebene ist schon völlig bestimmt, wenn sie mit einer in E gezogenen Geraden parallel liegt (Nr. 356), und man kann demnach nicht fordern, daß sie überdieß noch mit einer zweiten Geraden in E parallel sei, was doch der Fall sein müßte, wenn sie der Ebene E selbst parallel sein sollte.

389. Die in Nr. 387 angegebenen allgemeinen Auflösungsmethoden können in manchen Fällen durch einfachere ersetzt werden, welche aus der besondern Beschaffenheit der gegebenen Fläche herzuleiten sind. Frühere Untersuchungen krummer Flächen liefern hiezu die beiden folgenden Beispiele.

I) Die gegebene Fläche F sei eine Drehungsfläche mit verticaler Axe.

Aus Nr. 335, 1 ist bekannt, daß die Berührungsebene einer Drehungsfläche senkrecht auf der Meridianebene steht, welche den Berührungspunkt enthält. Führt man daher durch die Drehungsaxe eine Ebene M senkrecht zur gegebenen Ebene E, projicirt den Schnitt L der M und E, zeichnet die V-Projection des in der Ebene M liegenden Meridians (Nr. 289) und zieht an diesen Meridian eine Tangente T parallel mit L, so geht die gesuchte Ebene durch T und berührt die Drehungsfläche in demselben Punkte, in welchem T den Meridian berührt.

Es wurde der Allgemeinheit wegen vorausgesetzt, die gegebene Erzeugende der Fläche sei von der Meridiancurve verschieden. Ist aber als Erzeugende ein Meridian gegeben, so braucht man die V-Projection des in M liegenden Meridians nicht besonders zu zeichnen; vielmehr wird man die Ebene M mit der in ihr liegenden Geraden L durch Drehung in die Ebene des gegebenen Meridians fallen lassen, hier die Tangente parallel mit der neuen Lage der L ziehen und hierauf die M in ihre erste Lage zurückbringen.

II) Die Fläche F sei ein Hyperboloid mit einem Mantel, und auf die in Nr. 319 bezeichnete Art gegeben.*

Die gesuchte Berührungsebene enthält zwei Mantellinien des Hyperboloids, mit denen sich auf seinem asymptotischen Kegel zwei Parallelen K_1, K_2 ziehen lassen. Die durch K_1 und K_2 bestimmte Ebene ist demnach parallel mit der Berührungsebene und folglich auch mit E. Hiernach hat man zuerst die H-Spur des asymptotischen Kegels zu construiren (Nr. 319, 3) und durch den Mittelpunkt der Fläche eine Ebene parallel zu E zu legen (Nr. 51); diese Ebene schneidet den asymptotischen Kegel nach den Geraden K_1, K_2; ihre H-Spur begegnet der Kegelspur in zwei Punkten, welche die H-Spuren für die Linien K_1, K_2 sind und mittels deren die Projectionen dieser Linien gefunden werden. Auf dem Mantel des Hyperboloids lassen sich nun zwei Parallelen mit K_1 und zwei Parallelen mit K_2 ziehen; faßt man von diesen vier Mantellinien je die beiden zusammen, welche sich schneiden, so bestimmt jedes solche Paar eine mit E parallele Berührungsebene und sein Durchschnitt den Berührungspunkt. Diese Mantellinien können aber (mit Rücksicht

* nämlich — bei verticaler Stellung der imaginären Axe — durch die Projectionen der Aequatorialellipse KIL (Fig. 103) und eine Axe AB (|| GS) der H-Spur.

auf Nr. 25) leicht projicirt werden, da ihre H-Projectionen die H-Projection der Aequatorialellipse berühren, und zwar in Punkten, welche zugleich die H-Projectionen für die Schnitte der wahren Mantellinien mit der Aequatorialellipse sind.

Wenn die H-Spur der Hülfsebene, welche durch den Mittelpunkt der Fläche parallel zu E gelegt wurde, die Spur des asymptotischen Kegels berührt, so stellt diese Ebene sogleich die verlangte vor; letztere ist aber dann keine Berührungsebene im engern Sinne mehr, sondern eine asymptotische Ebene (Nr. 345).

Wenn die Spur jener Hülfsebene die Kegelspur gar nicht trifft, so gibt es keine mit E parallele Berührungsebene des Hyperboloids.

390. Kann man eine Ebene B finden, welche eine gegebene Fläche F berührt und einer gegebenen Ebene E parallel ist, so ist man auch im Stande, die Aufgabe zu lösen:

An eine gegebene krumme Fläche F eine Normale parallel mit einer gegebenen Geraden G zu ziehen.

Nimmt man nämlich eine zu G senkrechte Ebene für die Ebene E, so ist der Berührungspunkt der gefundenen Ebene B der Fußpunkt der verlangten Normalen.

F. Gemeinschaftliche Berührungsebenen mehrerer Flächen.

391. Wenn zwei Cylinderflächen die Richtlinie gemein haben und keine die andere einschließt, so kann man an beide Flächen eine gemeinschaftliche Berührungsebene legen. Denn zieht man z. B. an ihre H-Spuren eine gemeinschaftliche Tangente T und durch jeden von den beiden Berührungspunkten eine Mantellinie auf dem entsprechenden Cylinder, so liegen diese beiden Mantellinien mit T in einerlei Ebene und diese Ebene berührt sowohl den einen als den andern Cylinder.

Hiernach kann die Aufgabe: für irgend zwei gegebene Flächen F_1, F_2 eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu finden, dadurch gelöst werden, daß man den Flächen Cylinder parallel mit einer und derselben Geraden G umschreibt und an beide Cylinder eine gemeinschaftliche Berührungsebene legt; diese berührt zugleich die gegebenen Flächen F_1 und F_2.

Da der Geraden G unendlich viele verschiedene Lagen gegeben werden können, so ist die genannte Aufgabe eine unbestimmte. Aber die gesuchte Berührungsebene kann außerdem nur noch eine willkürliche

Bedingung erfüllen; denn sie ist z. B. bestimmt, sobald die Richtung der G bestimmt ist. Wenn also die Ebene alle ihre möglichen Lagen in stetigem Uebergange durchlaufen soll, so bewegt sie sich nach einem bestimmten Gesetz, und ihre successiven Durchschnitte bilden eine entwickelbare Fläche U (Nr. 305. 311).

392. Die obige Aufgabe wird zu einer bestimmten, wenn eine von den gegebenen Flächen F_1, F_2 selbst entwickelbar ist; denn es wurde schon in Nr. 356 bemerkt, daß zur völligen Bestimmung einer Ebene, welche eine entwickelbare Fläche berühren soll, eine einzige weitere Angabe hinreicht; berührt also eine solche Ebene zugleich noch irgend eine zweite Fläche, so kann sie nicht aus ihrer Lage treten, ohne ihren Charakter als gemeinschaftliche Berührungsebene aufzugeben.

In diesem Falle ist demnach die zu Ende der vorigen Nummer erwähnte Fläche U nicht vorhanden.

Sind die gegebenen Flächen F_1, F_2 beide entwickelbar, so gibt es für sie im Allgemeinen keine gemeinschaftliche Berührungsebene. Denn indem eine Ebene an F_1 und eine andere an F_2 berührend fortgleitet, befolgt jede unabhängig von der andern ihr bestimmtes Bewegungsgesetz, und man kann daher nicht fordern, daß beide Ebenen irgend einmal ganz zusammenfallen. Nur ausnahmsweise und in besondern Fällen könnte dieß geschehen, wie z. B. bei den zu Anfang der Nr. 391 betrachteten parallelen Cylindern, oder bei zwei congruenten Drehungskegeln mit parallelen Axen, oder auch bei dem Beispiele der Nr. 369; in allen diesen Fällen aber ist die Möglichkeit einer gemeinschaftlichen Berührungsebene in der gegenseitigen Abhängigkeit der gegebenen Flächen begründet.

393. Eine Ebene, welche zwei nicht entwickelbare Flächen F_1, F_2 berühren soll, kann noch einer dritten Forderung genügen, durch deren Hinzutreten die Aufgabe eine bestimmte wird. Von welcher Art diese Forderung sein darf, läßt sich aus frühern Betrachtungen folgern. Die fragliche Ebene ist nämlich eine Berührungsebene der um F_1 und F_2 beschriebenen entwickelbaren Fläche U (Nr. 391), und von einer solchen kann man z. B. nicht verlangen, daß sie durch eine gegebene Gerade gehe (Nr. 379) oder einer gegebenen Ebene parallel sei (Nr. 388); wohl aber, daß sie durch einen außerhalb gegebenen

Punkt gehe, oder mit einer gegebenen Geraden parallel sei, oder auch eine neue Fläche F_3 berühre (Nr. 392), welche nicht selbst entwickelbar sein darf.

394. Die letzte Bemerkung der vorigen Nummer enthält folgende Wahrheiten:

1) Drei gegebene Flächen gestatten eine gemeinschaftliche Berührungsebene nur dann, wenn keine entwickelbare darunter ist.

2) Eine Ebene, welche drei gegebene Flächen berühren soll, ist vollkommen bestimmt.

3) Deshalb ist es im Allgemeinen unmöglich, an vier oder noch mehr Flächen eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen.

395. Aufg. An eine gegebene Kugel und einen gegebenen Drehungskegel eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen.

Fig. 122. **Aufl.** Man lege die HE durch den Mittelpunkt O der Kugel senkrecht zur Axe des Kegels und die VE durch die Kegelaxe K′k; dann hat man als verticalen Umriß für die Kugel den größten Kreis P′R′H und für den Kegel die Geraden K′A, K′B. Eine mit K′A parallele Tangente L′C (oder 𝔏′D) des größten Kreises P′R′H, um die Verticallinie L′O𝔏′ gedreht, erzeugt eine Kegelfläche, welche der gegebenen congruent ist. Zieht man an die H-Spuren AM_1B, CN_1D beider Kegel eine gemeinschaftliche Tangente und denkt sich durch sie eine Ebene gelegt, deren H-Neigung = W. L′CO = W. K′Ak ist, so muß diese Ebene sowohl durch L′ (oder 𝔏′) als durch K′ gehen; sie berührt also nicht nur den gegebenen Kegel K′, sondern auch den Hülfskegel L′ (oder 𝔏′) und folglich zugleich die gegebene Kugel, welcher der letztere Kegel umschrieben ist. Ihre V-Spur ist die Verbindungslinie beider Kegelspitzen.

Man sieht, daß die auf solche Art gefundene Ebene vier Lagen M_1QK', M_2QK', $\mathfrak{M}_1\mathfrak{Q}K'$, $\mathfrak{M}_2\mathfrak{Q}K'$ annehmen kann, von denen je zwei eine gemeinschaftliche V-Spur haben.

Die Lage M_1QK' berührt den gegebenen Kegel K′ in der Mantellinie (M_1k, m′K′) und den Hülfskegel L′ in der Mantellinie (N_1O, n′L′); auf letzterer liegt der Punkt, in welchem die Kugel von der Ebene M_1QK' berührt wird; und da dieser zugleich ein Punkt des Kreises P′TR′ ist, in welchem die Berührung der Kugel und des Kegels L′ vor sich geht,

so findet man seine V-Projection t' als Schnitt der Geraden P'R' und L'n', seine H-Projection t nach Nr. 44.* — Aehnlich kann man auch für die übrigen Lagen der Berührungsebene die Berührungspunkte auf der Kugel und die Berührungslinien auf dem gegebenen Kegel finden.

Je nach der gegenseitigen Lage der Kreise AM_1 und CN_1 kann sich die Anzahl der Lösungen von 4 auf 3, 2, 1, 0 reduciren.

396. Aufg. Eine Ebene zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Kugeln berührt.

Aufl. Die HE sei durch den gegebenen Punkt S_2 und die Mittelpunkte M_1, M_2 der beiden Kugeln gelegt. Fig. 123.

Zwei an die H-Spuren der Kugeln gezogene gemeinschaftliche Tangenten P_3S_3, $\mathfrak{P}_3\mathfrak{S}_3$, von denen die eine die Centrallinie M_1M_2.. in S_3, die andere in $\mathfrak{S}_3$ schneidet, erzeugen durch Drehung um M_1M_2 zwei Kegel, welche die gegebenen Kugeln in den Kreisen P_3AQ_3, XZY, $\mathfrak{P}_3A\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{XZY}$ berühren.** Eine durch S_2 gehende Berührungsebene eines dieser Kegel genügt der Aufgabe; und da es für jeden einzelnen Kegel zwei solche Berührungsebenen gibt, so sind für die gesuchte Ebene im Allgemeinen vier Lagen möglich. S_2S_3 ist die H-Spur zweier von diesen Lagen; $S_2\mathfrak{S}_3$ die H-Spur der beiden andern.

Um die Punkte zu finden, in denen die beiden ersten Ebenen die Kugel M_1 berühren, denke man sich an den Kreis P_3AQ_3 Tangenten aus dem Punkte gezogen, wo die S_3S_2 die Kreisebene trifft. In der Umklappung der Kreisebene können diese Tangenten gezeichnet werden, und man hat dann nur noch ihre Berührungspunkte auf ihre wahre Lage zurückzuführen, wo sie zugleich die Berührungspunkte der durch S_3S_2 gehenden Ebenen vorstellen. Diese Berührungspunkte sind aber auch dadurch zu erhalten, daß man aus S_2 (oder aus irgend einem andern Punkte der S_3S_2) einen neuen Berührungskegel um die Kugel M_1 beschreibt. Die H-Spur dieses Kegels bilden die Tangenten S_2P_2, S_2Q_2; der Berührungskreis ist in P_2Q_2 projicirt, und der Punkt a, wo P_2Q_2 und P_3Q_3 sich schneiden, gibt die gemeinschaftliche H-Projection der

---

* Probe: $Ot' \perp QK'$.

** Jeder solche Kegel stellt für die gegenwärtige Aufgabe die in Nr. 391 besprochene entwickelbare Fläche U vor. Ueberhaupt wird U ein Kegel (oder der Inbegriff mehrerer Kegel, wobei eine Spitze auch unendlich fern sein kann), wenn die beiden gegebenen Flächen Drehungsflächen mit gemeinsamer Axe sind. (Vgl. Nr. 382.)

Berührungspunkte, deren gleiche (aber entgegengesetzt gerichtete) H=Distanzen aus der Umklappung des Kreises P_3AQ_3 (oder P_2AQ_2) zu ersehen sind. — Die Mantellinien des Kegels S_3, welche in seine Berührungsebenen fallen, projiciren sich beide in aS_3; der Schnittpunkt z der aS_3 und XY ist daher die gemeinschaftliche H=Projection der zwei Punkte, in denen die zweite Kugel M_2 berührt wird.

Auf dieselbe Weise ergeben sich die Berührungspunkte für die beiden andern Ebenen (welche durch $S_2 \mathfrak{S}_3$ gehen und den Kegel $\mathfrak{S}_3$ berühren).

Man sieht, daß die vorliegende Aufgabe sich ohne Hülfe einer VE lösen läßt, da man die H=Spur jeder Berührungsebene, so wie die H=Projectionen und H=Distanzen ihrer Berührungspunkte blos mittels der HE fand. Will man aber eine beliebige VE hinzunehmen, so kann man auf dieser die Projectionen der Berührungspunkte (Nr. 43) und die Spuren der Berührungsebenen (Nr. 27) leicht angeben.

Für die verlangte Ebene gibt es nur drei Lagen, zwei, eine oder auch gar keine, je nachdem S_2 auf dem einen Kegel aber außerhalb des andern liegt, oder innerhalb des einen und außerhalb des andern, oder auf dem einen und innerhalb des andern, oder innerhalb beider Kegel. Unendlich viele Lagen sind möglich, wenn S_2 in eine der Kegelspitzen fällt. — Dabei ist immer vorausgesetzt, daß die beiden Kugeln sich nicht erreichen. Berühren sie sich von außen, so geht der eine Kegel in eine Ebene über und die ihm zugehörigen Berührungsebenen fallen ganz aus, wenn nicht jene Ebene den Punkt S_2 enthält.

397. Aufg. An zwei gegebene Kugeln eine gemeinschaftliche Berührungsebene parallel mit einer gegebenen Geraden zu legen.

Aufl. Man lege die HE durch die beiden Kugelmittelpunkte und zugleich parallel zur gegebenen Geraden G.

Umschreibt man wieder den beiden Kugeln zwei berührende Kegel und zieht durch die Spitzen derselben Parallelen mit G, so gehen durch jede solche Parallele zwei Berührungsebenen des entsprechenden Kegels (Nr. 358) oder der beiden Kugeln, woraus folgt, daß die Aufgabe durch vier Ebenen gelöst werden kann. Jene Parallelen liegen aber ganz in der HE und stellen mithin sogleich die H=Spuren der Berührungsebenen vor. Die Berührungspunkte findet man wie in der vorigen Aufgabe.

398. Aufg. An drei gegebene Kugeln eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen.

Aufl. Die HE gehe durch die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der drei Kugeln. Fig. 123.

Man denke sich um die Kugeln M_1 und M_2 wie in Nr. 396 einen berührenden Kegel (S_3) beschrieben und einen zweiten (S_2) um die Kugeln M_1 und M_3. Die H-Spuren dieser Kegel sind die Tangenten P_3XS_3, Q_3YS_3 der größten Kreise M_1, M_2, und die Tangenten P_2S_2, Q_2S_2 der Kreise M_1, M_3; die Kegel selbst berühren die Kugel M_1 in Kreisen, deren H-Projectionen die Geraden P_3Q_3, P_2Q_2 sind. Für beide Kegel ist eine gemeinschaftliche Berührungsebene möglich, weil sie einer und derselben Kugel M_1 umschrieben sind, und eine solche Ebene löst die Aufgabe. Ihre H-Spur ist die Verbindungslinie S_3S_2 der Kegelspitzen; sie berührt die Kugel M_1 in dem Schnittpunkte A der in P_3Q_3 und P_2Q_2 projicirten Kreise. Da sich nun diese Kreise in zwei Punkten schneiden, denen die gemeinschaftliche H-Projection a zukommt, so gehen durch S_3S_2 zwei Lagen der gesuchten Ebene. Die H-Distanz der Berührungspunkte auf der Kugel M_1 findet man durch Umklappung des Kreises P_3Q_3 (oder P_2Q_2).

Die beiden eben betrachteten um je zwei Kugeln beschriebenen Kegel hatten ihre Spitzen S_3, S_2 auf den Verlängerungen der betreffenden Centrallinien M_1M_2, M_1M_3; es gibt aber, wie leicht zu sehen, noch zwei andere Kegel, welche um die nämlichen Kugelpaare so beschrieben sind, daß ihre Spitzen $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_2$ zwischen den betreffenden Mittelpunkten liegen. Die vier Kegel S_3, S_2, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_2$ lassen sich viermal paaren, und da für jedes Paar sich wiederholt, was oben in Bezug auf S_3 und S_2 abgehandelt wurde, so kann die gesuchte Ebene $4 \cdot 2 = 8$ Lagen erhalten, von denen je zwei die H-Spur und die H-Projection der Berührungspunkte gemein haben, nach folgender Uebersicht:

2 Ebenen gehen durch S_2S_3 und berühren die Kugel M_1 in 2 Punkten A,
" " " " $S_2\mathfrak{S}_3$ " " " " " " " " B,
" " " " $\mathfrak{S}_2S_3$ " " " " " " " " C,
" " " " $\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3$ " " " " " " " " D.

Die Berührungspunkte der Ebenen mit den zwei übrigen Kugeln kann man auf ähnliche Weise wie in Nr. 396 finden.

Für welche Fälle die Zahl der Auflösungen geringer wird, ist leicht zu ermitteln.

Zusatz. So wie man die Kugeln M_1, M_2, und dann die Kugeln M_1, M_3 durch umschriebene Kegel verbunden hat, so kann man auch um die Kugeln M_2, M_3 gemeinschaftliche Berührungskegel S_1, $\mathfrak{S}_1$ beschreiben, deren Spitzen in der Centrallinie M_2M_3

liegen, und von den 8 gemeinschaftlichen Berührungsebenen aller drei Kugeln muß offenbar jede einen dieser neuen Kegel S_1, $\mathfrak{S}_1$ berühren. Man sieht, daß überhaupt jede Berührungsebene der drei Kugeln eine gemeinschaftliche Berührungsebene dreier Kegel ist, deren jeder einem andern Kugelpaare umschrieben wurde; daher liegen die drei Kegelspitzen immer in gerader Linie, nämlich in der H-Spur der Berührungsebene.

Behält man blos die in der Zeichnungsebene ausgeführten Constructionen im Auge, so ist mit Obigem folgender Lehrsatz der ebenen Geometrie ausgesprochen. Legt man an je zwei von drei gegebenen Kreisen so oft als möglich gemeinschaftliche Tangenten, so liegen die sechs Punkte, in denen sich diese Tangenten paarweise auf den betreffenden Centrallinien schneiden, zu je dreien auf vier Geraden.

Viertes Kapitel.

Schnitte krummer Flächen durch Ebenen und gerade Linien.

399. Die Punkte, in denen eine Gerade eine krumme Fläche schneidet, findet man, wenn man durch die Gerade eine Ebene beliebig legt, den Schnitt dieser Ebene mit der krummen Fläche sucht, und dann zusieht, wo die Gerade dem Schnitte begegnet. Die Bestimmung dieser Punkte kommt also immer auf die Aufgabe zurück: den Schnitt einer krummen Fläche und einer Ebene zu projiciren.

In der Regel läßt sich mit Vortheil eine projicirende Ebene der Geraden benützen.

400. Eine stetige krumme Fläche wird von einer Ebene in einer stetigen Curve geschnitten, welche sich aber unter gewissen Verhältnissen in eine oder mehrere Gerade auflösen kann.

In manchen Fällen ist aus der Lage der schneidenden Ebene gegen die krumme Fläche die Natur des Schnittes zum voraus bekannt und seine Projectionen lassen sich unmittelbar oder doch mit nur geringer Vorbereitung zeichnen. Solche Fälle dienen dann zugleich zur Auflösung anderer, bei denen die schneidende Ebene eine weniger günstige Lage hat. Wird nämlich die Curve X gesucht, in welcher eine krumme Fläche von einer beliebig gegebenen Ebene E geschnitten wird, so sieht man sich nach einem System von Ebenen um, deren Schnitte mit der krummen Fläche unmittelbar projicirt werden können, und zeichnet außer diesen Flächenschnitten auch die geraden Durchschnitte der Hülfsebenen mit der Ebene E. Schneidet nun eine solche Hülfsebene die Fläche F in der Curve y und die Ebene E in der Geraden g, so gehören die Punkte, in welchen y und g sich begegnen, der verlangten Curve X an, und man erhält von

dieser auf die angegebene Weise beliebig viele Punkte, wenn man die Lage der Hülfsebene ändert.

401. Sind einmal die beiden Projectionen der Durchschnittscurve gefunden, so kann man diese Curve selbst in wahrer Gestalt und Größe dadurch erhalten, daß man die Schnittebene in eine Grundebene umklappt, die Lagen einer hinreichenden Anzahl von Curvenpunkten in der Umklappung sucht (Nr. 62) und stetig verbindet.

Häufig aber ist es noch bequemer, die Curve in solche Stellung zu bringen, daß ihre Ebene parallel zur Grundebene wird, indem man die Ebene um eine in ihr passend gewählte, der Grundebene parallele Gerade dreht. (Nr. 65.)

402. Eine Tangente, welche durch irgend einen Punkt P der Schnittcurve X an diese gelegt wird, fällt in die durch P gehende Berührungsebene der geschnittenen krummen Fläche. Läßt sich daher diese Berührungsebene einfach construiren, so kann man jene Tangente als Durchschnitt der Berührungsebene und der Schnittebene E finden, ohne daß man die Peripherie der Curve nöthig hat.

Schnitte der Drehungsflächen.

403. Eine Drehungsfläche wird von jeder zur Axe senkrechten Ebene in einem Parallelkreise geschnitten. Ein System solcher Ebenen wird also hier die in Nr. 400 genannten Hülfsebenen liefern, wenn die Drehungsfläche von irgend einer andern Ebene geschnitten werden soll. Dabei nimmt man wieder die HE senkrecht zur Drehungsaxe an; die VE legt man am besten senkrecht zur Schnittebene, weil dann ihre V-Spur sogleich die V-Projection der Schnittcurve enthält und auch die verticale Umklappung der wahren Curve sehr leicht auszuführen ist (Nr. 62, †); in dem nachfolgenden Beispiele ist aber, um die Allgemeinheit des Verfahrens zu zeigen, die VE in einer andern, beliebig gewählten Stellung vorausgesetzt.

Fig. 124. **404.** Es sei (vw, v′u′w′) die Erzeugende, (o, o′o″) die Drehungsaxe der Fläche, PQP′ die gegebene Schnittebene. Eine horizontale Hülfsebene schneidet die Fläche nach dem Parallelkreise (m′n′, man) und die Ebene PQP′ nach der Geraden (S′b′, sb); daher sind (a, a′) und (b, b′) zwei Punkte der Curve, in welcher die gegebene Fläche von

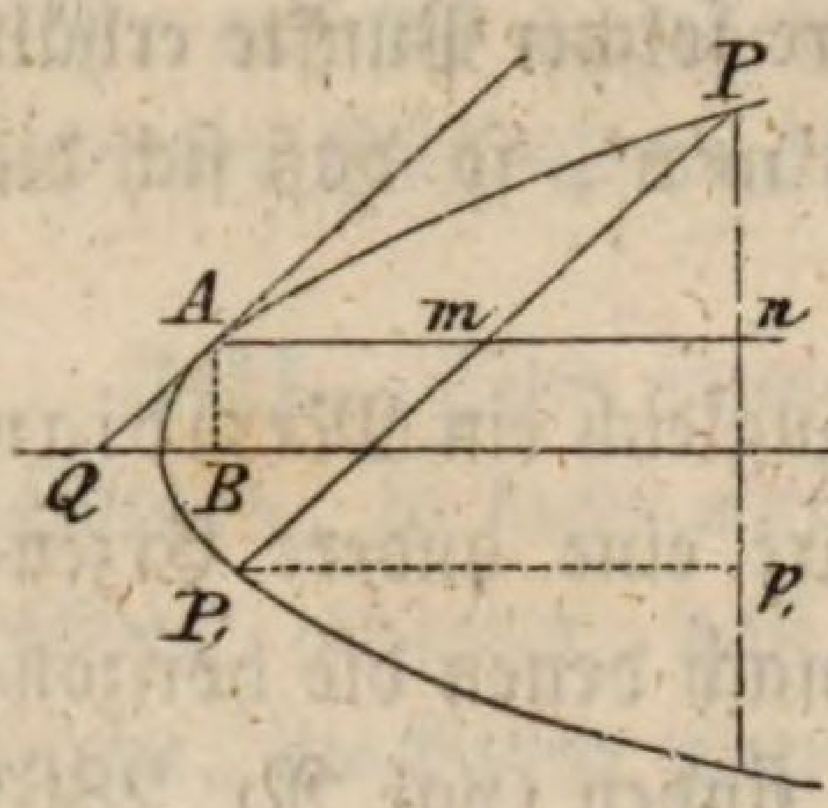
der Ebene PQP′ geschnitten wird. Andere Paare solcher Punkte erhält man durch Verrückung der horizontalen Ebene S′m′n′, so daß sich die Schnittcurve selbst vollständig construiren läßt.

† In Fig. 124 ist die gegebene Erzeugende zugleich ein Meridian der Fläche, und zwar der Hauptmeridian. Wäre eine andere Erzeugende gegeben, so könnte man die Parallelkreise, nach denen die horizontalen Ebenen die Fläche schneiden, eben so leicht finden (vgl. Nr. 286) und das übrige Verfahren bliebe ganz dasselbe wie oben. Aber der Umstand, daß der Hauptmeridian der Fläche gegeben ist, macht es hier möglich, durch einfache Constructionen einige besonders wichtige Punkte der Schnittcurve zu erhalten.

Welche Lage auch die horizontale Ebene S′m′n′ haben mag, so halbirt immer eine zu PQP′ senkrechte Meridianebene PRP′ die Sehne AB der Schnittcurve senkrecht; deshalb theilt diese Meridianebene die Schnittcurve selbst in zwei symmetrische Hälften, und die Curve wird in den auf die Meridianebene fallenden Punkten C, D von den durch dieselben gehenden Parallelkreisen berührt (während jeder andere Parallelkreis die Curve in zwei Punkten schneidet). Um diese (äußersten) Punkte C, D zu finden, projicire man den Schnitt (PR, p′P′) der Ebenen PRP′ und PQP′, welcher der Drehungsaxe im Punkte (o, o″) begegnet, drehe hierauf die Meridianebene in die zur VE parallele Stellung und ziehe die V-Projection p°o″ jenes Schnittes für die neue Stellung der Ebene; dann gehen die V-Projectionen der Parallelkreise, auf denen C und D liegen, durch die Punkte γ′, δ′ (wo p°o″ und v′u′w′ sich schneiden), und die Punkte (c′, c), (d′, d) selbst sind dadurch bestimmt.

Die V-Projection der Schnittcurve wird, wenn sie von dem sichtbaren Theil der Fläche auf den unsichtbaren übergeht, den verticalen Flächenumriß berühren (Nr. 361, I), und zwar in Punkten, welche die V-Projectionen für die Schnittpunkte der Ebene PQP′ und der Peripherie des Hauptmeridians sind. Die Ebene des letztern schneidet die Ebene PQP′ nach der Geraden (Zo, z′o″); daher sind (e′, e), (f′, f) jene Schnittpunkte und e′, f′ die erwähnten Berührungspunkte.

Zusatz. Der Meridian der in Fig 124 dargestellten Fläche ist eine Parabel. Wird ein Drehungsparaboloid von einer Ebene geschnitten, welche gegen die Drehungsaxe unter einem beliebigen Winkel geneigt ist, so projicirt sich auf einer zur Axe senkrechten Ebene die Schnittcurve immer als ein Kreis. Der Beweis kann aus Nr. 245 entnommen werden.



Vertauscht man nämlich die auf rechtwinkelige Coordinaten bezogene Gleichung $y^2 = 2cx$ der Parabel PAP_1 mit der Gleichung $\mathfrak{y}^2 = 2\mathfrak{c}\mathfrak{x}$, welche für die nämliche Parabel gilt, insofern die Abscissen auf einem beliebigen Durchmesser und die Ordinaten parallel mit der Tangente im Anfangspunkt A dieses Durchmessers genommen werden, so hat man (wenn a, b, q dieselben Bedeutungen behalten wie in Nr. 245):

$$2c = \frac{q^2}{a}; \qquad 2\mathfrak{c} = \frac{b^2}{a}; \qquad \mathfrak{c} : c = q^2 : b^2.$$

Es stelle nun die Parabel PAP_1 den Meridian der Drehungsfläche vor, dessen Ebene senkrecht zur Schnittebene liegt und von letzterer nach der Geraden PP_1 geschnitten wird; durch Am sei senkrecht zur Meridianebene PAP_1 noch eine Ebene gelegt, welche die Fläche nach einer Parabel AM schneidet. Dann ist mP ($= \mathfrak{y}_0$) die eine Halbaxe der elliptischen Schnittcurve E; die zweite Halbaxe (y_0) ist die zur Abscisse Am gehörige rechtwinkelige Ordinate der Parabel AM. Da aber diese Parabel der Parabel PAP_1 congruent ist (Nr. 297, b), so gelten, wenn $Am = x_0$ gesetzt wird, die Gleichungen

$$y_0^2 = 2cx_0; \qquad \mathfrak{y}_0^2 = 2\mathfrak{c}x_0; \qquad \text{also } \mathfrak{y}_0 : y_0 = q : b.$$

Das Dreieck AQB (in welchem AQ = q, AB = b) ist dem Dreieck Pmn ähnlich, folglich $Pn = y_0$. Auf einer zur Drehungsaxe senkrechten Ebene Pnp_1 projicirt sich die Ellipse E als eine Ellipse e, deren eine Halbaxe = Pn und deren zweite Halbaxe $= y_0$ ist; mithin ist e ein Kreis.

Fig.125. **405.** Beim Wulst (Nr. 283) findet sich die Eigenthümlichkeit, daß eine Ebene, welche ihn auf der innern Seite berührt*, zugleich seine Fläche in einer stetigen Curve schneidet, für welche der Berührungspunkt ein Doppelpunkt ist. Diese Curve ist in Fig. 125 nach der in voriger Nummer angegebenen Methode projicirt und umgeklappt, wobei die Constructionen noch einfacher sind als vorhin, weil die VE senkrecht zur berührenden Schnittebene PQP′ angenommen wurde.

Schnitte der Regelflächen.

406. Die allgemeine Methode, den Schnitt einer Regelfläche und einer Ebene zu finden, besteht darin, daß man eine hinreichende Anzahl von Mantellinien der Fläche projicirt, deren Schnittpunkte mit der Ebene aufsucht (Nr. 48) und stetig verbindet.

---

* d. h. so, daß der Berührungspunkt auf dem kleinern von den beiden concentrischen Kreisen liegt, nach denen eine zur Axe senkrechte Ebene die Fläche schneidet.

Ein Beispiel folgt in Nr. 407. Um sich noch an andern einfachen Beispielen zu üben, kann man die in Fig. 102 und Fig. 110 dargestellten Flächen durch horizontale Ebenen schneiden, oder die Fläche der Fig. 107 durch eine zum Grundschnitt senkrechte Ebene, oder auch das Kugel-Conoid (Fig. 109) durch eine beliebige Ebene.

407. Aufg. Den Schnitt einer Cylinderfläche und einer Ebene POP′ zu projiciren. Fig. 127.

Aufl. Der Cylinder habe (LMN.., l′n′) zur Leitenden; eine Mantellinie sei (Vx, v′X′). Die h-projicirende Ebene dieser Mantellinie enthält zugleich noch eine zweite Mantellinie (Wx, w′X″) und schneidet die Ebene POP′ nach der Geraden (Vx, Q′h′a′); diese Gerade führt auf die Punkte (a′, a), (b′, b), in denen jene beiden Mantellinien die Ebene POP′ durchdringen (vgl. Nr. 48) und welche auf der verlangten Schnittcurve liegen müssen.

Um noch mehr solche Punkte zu erhalten, sucht man die Schnitte anderer Mantellinien mit der Ebene POP′. Die hiezu nöthigen Schnittlinien zwischen POP′ und den h-projicirenden Ebenen der Mantellinien kann man jetzt, nachdem eine solche Linie (Vx, h′a′) projicirt ist, einfacher finden; denn ihre V-Projectionen sind parallel mit h′a′ (Nr. 5, XVII; Nr. 25). Projicirt man also z. B. die Mantellinien (My, m′Y′), (Ny, n′Y″), fällt Kk′ ⊥ GS und zieht k′c′ ∥ h′a′, so wird in (c′, c) und (d′, d) die Ebene POP′ von MY′ und NY″ geschnitten.

† Soll durch denjenigen Punkt der Schnittcurve, welcher auf der Mantellinie (Ur, u′r′) liegt, eine Tangente an die Curve gezogen werden, so projicire man vorerst den Schnitt R der (Ur, u′r′) und POP′, zeichne dann die H-Spur der durch UR gehenden Berührungsebene des Cylinders (nämlich eine Tangente UT der Cylinderspur im Punkte U) und bemerke, daß T die H-Spur der gesuchten Tangente sein muß, weil letztere der Schnitt der POP′ und jener Berührungsebene ist (Nr. 402). Man erhält demnach Tr, t′r′ als Projectionen der Tangente.

Wäre die H-Spur UT der Berührungsebene parallel zu OP geworden, so müßte die fragliche Tangente ebenfalls parallel zu OP oder zur HE sein (Nr. 5, v) und ihr Berührungspunkt R wäre dann entweder der höchste oder der tiefste Punkt der Schnittcurve. Diese Bemerkung lehrt die genannten Punkte finden. (In Fig. 127 wurden die Mantellinien VX′, WX″ so gewählt, daß A der höchste und B der tiefste Punkt des Schnittes ist.)

408. Wird eine entwickelbare Fläche geschnitten, so kann man nach der Verwandelten der Schnittcurve fragen. Der Construction dieser Verwandelten muß immer die wirkliche Entwickelung der Fläche vorausgehen, und diese Entwickelung selbst läßt sich in den meisten Fällen nur mit Hülfe anderer passend gewählter Schnitte genau ausführen.

Es soll hier zunächst nur von der Entwickelung der Cylinderflächen und der Drehungskegelflächen gehandelt werden.

409. Ist irgend eine Cylinderfläche so dargestellt, daß ihre Mantellinien senkrecht zur HE stehen und ihre Leitende ganz in der HE liegt, so ist ihre Entwickelung deshalb leicht auszuführen, weil die Verwandelte ihrer H-Spur eine Gerade wird (Nr. 311). Eine solche Cylinderfläche werde durch eine Ebene PQP′ geschnitten; man verlangt die Figur des Schnittes und seine Verwandelte.

Fig. 126. Legt man die VE senkrecht zur Schnittebene, so fällt die V-Projection v′w′ der Schnittcurve in die V-Spur QP′ der Schnittebene und die H-Projection in die H-Spur vbw der Cylinderfläche. Die Gestalt $V_1 A_1 B_1 \ldots$ des Schnittes ergibt sich hiernach leicht durch Umklappung.

Durch die Mantellinie Bb des Cylinders sei eine Berührungsebene gelegt (deren H-Spur also die durch b gehende Tangente bP der Curve vbw ist); in diese Ebene soll die Cylinderfläche ausgebreitet werden. Da die Flächenspur eine geschlossene Curve ist, so muß der Cylinder vor der Entwickelung aufgeschnitten werden, und dieß möge längs der Mantellinie Vv geschehen. Eine Anzahl anderer Mantellinien ziehe man durch beliebige Punkte a, b, c, ... der Curve vbc.. und zeichne ihre V-Projectionen 1a′, 2b′, 3c′, ... — Im Anfangspunkt $\mathfrak{v}$ einer Geraden errichte man auf ihr die Senkrechte $\mathfrak{v}\mathfrak{V} = mv'$; dann trage man von $\mathfrak{v}$ aus auf der Geraden die rectificirte Länge der Curve vcwhv ab, und zwar so, daß $\mathfrak{v}\mathfrak{a} = \text{arc}\, va$, $\mathfrak{v}\mathfrak{b} = \text{arc}\, vb$, $\mathfrak{v}\mathfrak{c} = \text{arc}\, vc, \ldots\ldots$, $\mathfrak{v}\mathfrak{v}_0 = \text{arc}\, vchv$. Zieht man hierauf durch die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots, \mathfrak{v}_0$ Senkrechte $\mathfrak{a}\mathfrak{A}, \mathfrak{b}\mathfrak{B}, \ldots$ zu $\mathfrak{v}\mathfrak{v}_0$, macht $\mathfrak{a}\mathfrak{A} = 1a'$, $\mathfrak{b}\mathfrak{B} = 2b'$, $\mathfrak{c}\mathfrak{C} = 3c', \ldots$, $\mathfrak{v}_0\mathfrak{V}_0 = m'v'$, und legt durch die Punkte $\mathfrak{V}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots, \mathfrak{V}_0$ eine stetige Curve, so stellt diese die Verwandelte der Schnittcurve (vcwv, v′w′) vor; die ebene Figur aber, welche die Geraden $\mathfrak{v}\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{v}\mathfrak{V}$, $\mathfrak{v}_0\mathfrak{V}_0$ und die Curve $\mathfrak{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} \ldots \mathfrak{V}_0$ zu Grenzen hat, ist die Entwickelung des zwischen der HE und der Ebene PQP′ enthaltenen Cylinderstücks.

Die Berührungsebene bP des Cylinders schneidet die Ebene PQP′ nach einer Geraden (bP, b′Q), welche die Schnittcurve im Punkte (b, b′) berührt. Diese Gerade muß auch noch nach der Entwickelung des Cylindermantels eine Tangente der verwandelten Schnittcurve sein, denn sie ist die Verlängerung eines Curvenelements, welches auf dem Cylinder und auf der Ebene, in welche er ausgebreitet wird, zugleich liegt. Man erhält sie in der Entwickelung, wenn man b𝔓 = bP macht und 𝔓𝔅 zieht. — Auf ähnliche Weise kann man überhaupt jede Tangente der Schnittcurve auf die Verwandelte übertragen, indem es gleichgiltig ist, in welche von den unendlich vielen Berührungsebenen des Cylinders man diesen ausgebreitet denken will.

Die oben angegebenen Constructionen gelten allgemein für jede beliebige Gestalt der Curve vcw, können sich aber in besondern Fällen vereinfachen; so namentlich in Fig. 126, wo vcw ein Kreis vom Durchmesser vw ist. Dort wählt man am besten die Punkte a, b, c, ... so, daß sie die Kreisperipherie in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. in 12, theilen; dann macht man $\mathfrak{v}\mathfrak{v}_0 = \frac{22}{7}$ vw und theilt $\mathfrak{v}\mathfrak{v}_0$ in 12 gleiche Theile, wodurch sich die (den Punkten a, b, c ... entsprechenden) Punkte 𝔞, 𝔟, 𝔠 ... ergeben. — Wenn es (wie in Fig. 126) eine zur Schnittebene senkrechte Symmetralebene der Cylinderfläche gibt, mithin die Schnittlinie beider Ebenen eine Symmetralaxe der Schnittcurve ist, so zeichnet man die Umklappung der Curve am leichtesten, indem man zuerst die Umklappung V_1W_1 der Axe bestimmt und dann von dieser Axe aus auf den Linien a′A′, b′B′, ... die (aus der HE zu entnehmenden) Längen der betreffenden Ordinaten beiderseits abträgt. Noch kürzer als durch wirkliche Umklappung findet man in solchem Falle die wahre Gestalt der Schnittcurve durch Drehung ihrer Ebene um die Symmetralaxe (vw, v′w′) bis zur Parallelstellung mit der VE. — Da in Fig. 126 die Schnittcurve auch eine zur HE parallele Symmetralaxe (ch, c′) hat, so wurde um diese die Schnittebene in Horizontalstellung gedreht; die neue H-Projection der Curve ist c‵A‵V..; die Tangente in B zeigt sich in der Lage c‵B. *

Zusatz. Die Verwandelte der stetigen Schnittcurve VAW.. ist wieder eine gesetzmäßige stetige Curve, welche aber in dem Bogen 𝔙𝔄..$\mathfrak{V}_0$ nicht vollständig dargestellt ist, vielmehr nach beiden Seiten durch unendlich viele Wiederholungen jenes Bogens fortläuft. Der Grund dieser Fortsetzung leuchtet ein, wenn man sich um den Cylinder einen unendlich langen Ebenenstreifen in übereinanderliegenden Windungen gewickelt denkt, und beachtet, daß die Ebene PQP′ alle diese Windungen zugleich schneidet. — Man kann die vollständige Curve 𝔙𝔄𝔚.. auch

* Daß in Fig. 126 die Curve c‵A‵V.. eine Ellipse ist, kann auch ohne nähere Kenntniß der Cylinderflächen zweiter Ordnung unmittelbar aus dem Satze der Nr. 227 erschlossen werden.

so entstehen lassen, daß der Cylinder sich über eine Ebene hinwälzt und jeder in diese Ebene fallende Punkt der Curve VAW.. einen bleibenden Eindruck auf der Ebene hinterläßt.

410. Um eine Cylinderfläche, deren Mantellinien nicht senkrecht auf der HE stehen, entwickeln zu können, muß man sie durch eine Ebene senkrecht zu den Mantellinien schneiden; von der Rectification dieses senkrechten Schnittes geht die Entwickelung der ganzen Fläche aus, wie im vorigen Beispiele von der Rectification der H-Spur.

Fig. 127. **Als Leitende einer Cylinderfläche sei deren H-Spur VUW.. gegeben und außerdem eine Mantellinie (Vx, v′X′) derselben; man verlangt die Entwickelung der Fläche und die Verwandelten ihrer beiden Spuren.**

Es sei PO ($\perp$ Vx) die H-Spur einer zu den Mantellinien senkrechten Ebene E. Diese Ebene schneidet die h-projicirende Ebene der Mantellinie VX′ nach einer Geraden, welche mit der Mantellinie und ihrer H-Projection ein rechtwinkeliges Dreieck einschließt; die Hypotenuse ist HV; der Scheitel des rechten Winkels liegt in dem Punkte, wo VX′ der Ebene E begegnet und welcher durch A bezeichnet sein möge. Die horizontale Umklappung HA_1V des genannten Dreiecks wird gefunden, wenn man die VX′ mit ihrer h-projicirenden Ebene in die HE nach VX_1 umklappt (Nr. 60) und $HA_1 \perp VX_1$ fällt. Die Mantellinie (Wx, w′X″), welche mit VX′ die h-projicirende Ebene gemein hat, klappt sich nach WB_1 ($\parallel VX_1$) um, so daß B_1 die Umklappung des Punktes B ist, wo sie die Ebene E trifft. Wird nun auch die Ebene E in die HE umgeklappt, so kommen die Punkte A und B nach $A_{,,}$ und $B_{,,}$ zu liegen ($HA_{,,} = HA_1$, $HB_{,,} = HB_1$) und gehören hier der Umklappung der Curve S an, in welcher der Cylinder und die Ebene E sich schneiden. — Das eben erklärte Verfahren, auf zwei andere Mantellinien MY′, NY″ von gemeinschaftlicher H-Projection angewandt, liefert zwei weitere Punkte $C_{,,}$, $D_{,,}$ der mit E umgeklappten Schnittcurve S; die mit der h-projicirenden Ebene umgeklappten Dreiecke MC_1K, ND_1K findet man aber hier noch leichter als vorhin, indem die Linien MC_1 und ND_1 (wegen der gleichen H-Neigung aller Mantellinien) parallel mit VX_1 sein müssen. — Sucht man auf die angegebene Weise noch beliebig viele andere Punkte für die Umklappung der Schnittcurve S, so kann man die Peripherie $A_{,,}C_{,,}..D_{,,}B_{,,}..$ derselben zeichnen.

Bei der Entwickelung des Cylinders (welche an der Mantellinie VX′ beginnen möge) verwandelt sich die Curve S in eine Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$, welche an Länge mit der rectificirten S übereinstimmt. Macht man $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \text{arc}\, A_{,,}C_{,,},\ldots$, $\mathfrak{A}\mathfrak{D} = \text{arc}\, A_{,,}C_{,,}D_{,,}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \text{arc}\, A_{,,}C_{,,}B_{,,},\ldots$, zieht durch die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$,.., $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$,.. Senkrechte $\mathfrak{V}\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{M}\mathfrak{Y}'$,.. zu $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0$ und macht $\mathfrak{A}\mathfrak{V} = A_1V$, $\mathfrak{C}\mathfrak{M} = C_1M$,.., $\mathfrak{D}\mathfrak{N} = D_1N$, $\mathfrak{B}\mathfrak{W} = B_1W$,.., so sind $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{M}$,.., $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{W}$,.. Punkte der verwandelten H-Spur des Cylinders; sucht man ferner die wahren Längen der verschiedenen Mantellinien (soweit sie zwischen den beiden Grundebenen liegen) und macht $\mathfrak{V}\mathfrak{X}' = VX'$ $(= VX_1)$, $\mathfrak{M}\mathfrak{Y}' = MY'$,.., $\mathfrak{N}\mathfrak{Y}'' = NY''$, $\mathfrak{W}\mathfrak{X}'' = WX''$,...., so sind $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$,.., $\mathfrak{Y}''$, $\mathfrak{X}''$,.. Punkte der verwandelten V-Spur. Hiernach lassen sich diese beiden Verwandelten und somit die Entwickelung des zwischen den Grundebenen enthaltenen Cylinderstücks herstellen.

Die Linien $\mathfrak{V}\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{V}_0\mathfrak{X}_0'$ müssen von der Verwandelten $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'\ldots\mathfrak{X}_0'$ unter dem nämlichen Winkel geschnitten werden, oder die beiden Tangenten der Verwandelten in den Punkten $\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{X}'_0$ müssen parallel sein.

† Man sieht, daß man die Projectionen der Curve S zur Entwickelung der Fläche nicht nöthig hat. Will man aber diese Projectionen zeichnen, so kann dieß mit Benützung der bisherigen Constructionen leicht geschehen; denn fällt man $A_1a \perp Vx$, $B_1b \perp Vx$, $C_1c \perp My$, $D_1d \perp My$,...., so sind a, b, c, d,.... die H-Projectionen für die Punkte A, B, C, D... der Curve S und A_1a, B_1b, C_1c, D_1d,... die zugehörigen H-Distanzen. *

Die Curve S ist die gemeinschaftliche Orthogonalprojection der beiden Cylinderspuren auf die Ebene E (PQP′). Da nun in dem gewählten Beispiele die H-Spur VUW.. ein Kreis ist, so ist hier S eine Ellipse (Nr. 236), deren Axen $A_{,,}B_{,,}$ und $E_{,,}F_{,,}$ leicht gefunden werden, und welche demnach aus diesen Axen unmittelbar construirt werden kann.

†† Soll eine Tangente UT an der H-Spur des Cylinders auf die Verwandelte dieser Spur übergetragen werden, so betrachte man UT als die H-Spur einer durch die Mantellinie UR gehenden Berührungsebene des Cylinders und klappe die Schnittlinie TR dieser Berührungs-

* Ein anderer Weg zur Auffindung der Projectionen ist bereits aus Nr. 407 bekannt. Die dort gebrauchten Linien a′h′, c′k′,... sind die V-Projectionen derjenigen, welche bei der gegenwärtigen Auflösung in HA_1, KC_1,... umgeklappt sind.

ebene und der Ebene E mit letzterer in die HE um, indem man T mit der Umklappung R,, des Punktes verbindet, in welchem UR der E begegnet. Nach der Entwickelung fällt die Berührungsebene in die ausgebreitete Cylinderfläche und die Linie TR in die rectificirte Schnittcurve S; entsprechen also in der Entwickelungsfigur die Punkte ℜ, 𝔘 den Punkten R, U, so hat man (in der Richtung nach 𝔙 hin) ℜ𝔗 = R,,T zu machen und die Linie 𝔗𝔘 zu ziehen, welche dann die Tangente an der verwandelten H-Spur des Cylinders ist.

411. Denkt man sich auf der Fläche irgend eines Kegels eine Curve gezeichnet, deren sämmtliche Punkte gleiche Entfernung von der Spitze haben, so ist nach der Entwickelung des Kegels die Verwandelte dieser Curve ein Kreis, und sie dient hier der Entwickelung eben so zur Grundlage wie der senkrechte Schnitt bei einem Cylinder. Eine solche Curve ergibt sich im Allgemeinen auf dem Kegel als Schnitt seines Mantels mit einer Kugel, deren Mittelpunkt in der Kegelspitze liegt (s. Kap. V). Bei einem Drehungskegel aber kann jeder Parallelkreis dafür genommen werden.

412. Aufg. Den Schnitt eines Drehungskegels und einer Ebene zu projiciren, den Kegelmantel zu entwickeln und die Verwandelte des Schnittes zu zeichnen.

Aufl. Es sind hier drei Fälle zu unterscheiden. Für jeden derselben soll die HE senkrecht zur Axe (o, o′s′) des Kegels und die VE senkrecht zur Schnittebene PQP′ angenommen werden.

Fig. 128. I) Wird die Schnittebene PQP′ nur von dem einen der beiden Kegelmäntel getroffen ohne mit irgend einer Mantellinie parallel zu sein, so ist die Schnittcurve in sich geschlossen. Ihre V-Projection ist v′w′. Ihre H-Projection kann auf doppelte Weise gefunden werden, je nachdem man den Kegel als Regelfläche oder als Drehungsfläche ansehen will. Im ersten Falle sucht man die H-Projectionen U_1 o, U_2 o zweier Mantellinien, deren gemeinschaftliche V-Projection s′u′ beliebig angenommen wurde, und hierauf die H-Projectionen a_1, a_2 der in a′ v-projicirten Punkte, wo jene Mantellinien der Ebene PQP′ begegnen; die erhaltenen Punkte (a′, a_1), (a′, a_2) liegen auf der gesuchten Schnittcurve, und man kann deren auf die erklärte Art beliebig viele finden. Im zweiten Falle projicirt man einen beliebigen Parallelkreis (h′i′, a_1 i a_2..)

und die Gerade ($a', a_1 a_2$), nach welcher seine Ebene die PQP′ schneidet; die Begegnungspunkte (a_1, a'), (a_2, a') der Geraden und des Parallelkreises gehören der Schnittcurve an.

Die Tangente der Schnittcurve im Punkte (a_2, a') liegt sowohl in PQP′ als in der Berührungsebene des Kegels, welche durch die Mantellinie ($o a_2 U_2, s'u'$) geht und $U_1 P$ zur H-Spur hat (Nr. 402); daher ist P die H-Spur und $P a_2$ die H-Projection dieser Tangente; die V-Projection fällt in QP′.

(Entwickelung.) — Die Entwickelung des von der Spitze bis zur HE reichenden und nach der Mantellinie SN aufgeschnittenen Kegelstücks liefert einen Kreissector, dessen Bogen die Verwandelte der horizontalen Kegelspur $MU_2N..$ vorstellt. Der Halbmesser $\mathfrak{S}\mathfrak{N}$ dieses Bogens hat die Länge $s'n'$ und heiße $\boldsymbol{\mathfrak{R}}$; der rectificirte Bogen ist der Rectification des Kreises $MU_1N..$ (dessen Halbmesser durch R bezeichnet sein möge) gleich; seine Endpunkte $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_0$ können also entweder nach den Andeutungen der Nr. 212 gefunden werden, oder dadurch, daß man den Centriwinkel $\mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{N}_0 = \varphi$ des Sectors $\mathfrak{N}\mathfrak{S}\mathfrak{N}_0\mathfrak{N}$ unmittelbar (mit Hülfe eines Maßstabes und Transporteurs) aus der Gleichung

$$\varphi = 360^\circ \cdot \frac{R}{\boldsymbol{\mathfrak{R}}} \qquad (\mathfrak{G})$$

sucht, deren Richtigkeit einleuchtet, wenn man bemerkt, daß die ganzen Peripherien der Kreise $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_0 ...$ und $MU_1N..$ sich $= \boldsymbol{\mathfrak{R}} : R$ verhalten und der (dem Kreise $MU_1N..$ gleiche) Bogen $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_0$ zu der Peripherie seines Kreises im Verhältniß von $\varphi : 360^\circ$ steht.

Hat man irgend eine bestimmte Mantellinie ($oU_2, s'u'$) des Kegels in der Entwickelung anzugeben, so macht man arc $\mathfrak{N}_0\mathfrak{U}_2 =$ arc NU_2 und zieht $\mathfrak{S}\mathfrak{U}_2$. — In Fig. 128 sind die Mantellinien, welche man zur Bestimmung der Schnittcurve anwandte, so gewählt, daß ihre H-Spuren den Kreis $MU_1N..$ in 12 gleiche Theile theilen; man erhält daher ihre Lagen in der Entwickelung, wenn man den Bogen $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_0$ in 12 gleiche Theile theilt und die Theilpunkte mit $\mathfrak{S}$ verbindet.

Um den Punkt (a_2, a') der Schnittcurve in der Entwickelung wieder zu finden, trägt man auf $\mathfrak{S}\mathfrak{U}_2$ von $\mathfrak{S}$ nach $\mathfrak{A}_2$ das Stück ($o a_2, s'a'$) ab, dessen wahre Länge $= s'h'$ ist. Auf diese Art kann man alle projicirten Punkte des Schnittes in die Entwickelung übertragen und dann durch stetige Verbindung der erhaltenen Lagen die Verwandelte $\mathfrak{W}\mathfrak{V}\mathfrak{W}_0$ der Schnittcurve zeichnen.

Die Berührungsebene des Kegels, in welcher die Tangente $(a_2P, a'Q)$ der Schnittcurve liegt, fällt nach dem Entwickeln mit der Ebene zusammen, in welche sich der Kegelmantel ausbreitet; U_2P wird dann eine Tangente für die Verwandelte des Kreises MU_1N.. und $(a_2P, a'Q)$ eine Tangente für die verwandelte Schnittcurve. Die Lage der erstern erhält man also, wenn man $\mathfrak{U}_2\mathfrak{P} \perp \mathfrak{S}\mathfrak{U}_2$ zieht; die Lage der letztern, wenn man $\mathfrak{U}_2\mathfrak{P} = U_2P$ macht und $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{A}_2$ verbindet.

† Der Bogen $\mathfrak{W}\mathfrak{V}\mathfrak{W}_0$ des verwandelten Schnitts ist nur ein Theil einer stetigen Curve; um diese vollständig zu erhalten, hat man sich den Kegel von einer Ebene mehrfach umwunden zu denken; die zweite Abwindung gibt dann den Sector $\mathfrak{N}_0\mathfrak{S}2_0$, die dritte den Sector $2_0\mathfrak{S}3_0$, u. s. f., und jene Curve setzt sich durch alle diese neuen Sectoren fort, indem der Bogen $\mathfrak{W}\mathfrak{V}\mathfrak{W}_0$ sich in jedem Sector wiederholt. Diese Wiederholung der congruenten Bögen kann ohne Ende sein; fällt aber irgend einmal einer der weitern Sectoren ganz in den ersten, so kehrt die Curve in sich selbst zurück. Letzteres muß eintreten, wenn die Radien R, $\mathfrak{R}$ der Kreise MU_1N und $\mathfrak{N}\mathfrak{M}\mathfrak{N}_0$.. commensurabel sind oder ein rationales Verhältniß haben. Ist nämlich $R : \mathfrak{R} = n : m$ (wo m und n ganze Zahlen sind), so ist (nach der frühern Gleichung $\mathfrak{G}$)

$$m \cdot \varphi = n \cdot 360^0,$$

d. h. m aneinandergereihte Sectoren vom Winkel φ bilden n mal die ganze Kreisfläche und der $(m+1)$te fällt in den ersten. In Fig. 128 ist $o'n' : s'n' = 2 : 5$, d. i. $R = \frac{2}{5}\mathfrak{R}$ und $\varphi = \frac{2}{5} \cdot 360^0$; das Fünffache des Bogens $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_0$ ist also der doppelten Peripherie des ganzen Kreises $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$.. gleich; daher kehrt der Bogen $\mathfrak{W}\mathfrak{V}\mathfrak{W}_0$ der verwandelten Schnittcurve fünfmal wieder und die sechste Wiederholung kommt ganz in den ersten Bogen zu liegen.

Fig. 129. II) Ist die Schnittebene PQP' parallel mit einer Mantellinie $(oN, s'n')$ des Kegels, so kann die Schnittcurve nicht geschlossen sein, sondern muß in zwei Zweigen einem unendlich fernen Punkte zustreben, indem die Schnitte der Mantellinien mit der Ebene PQP' in um so größere Entfernung von (v, v') fallen, je mehr sich die Mantellinien von beiden Seiten her der $(oN, s'n')$ nähern. Die Schnittcurve und eine ihrer Tangenten läßt sich wie in (I) projiciren. *

(Entwickelung.) — Die Entwickelung des Kegelmantels und die Zeichnung des verwandelten Schnittes geschieht wie vorhin (I). Die Verwandelte setzt sich (wie die ursprüngliche Parabel selbst) über die Punkte b_1 und b_2 ohne Ende fort.

---

* Der Brennpunkt der parabolischen Schnittcurve ist der Fußpunkt einer Senkrechten, welche aus dem Mittelpunkt des durch V gehenden Parallelkreises auf die Schnittebene gefällt wird; denn dieser Mittelpunkt ist zugleich Mittelpunkt einer dem Kegel einbeschriebenen und die Schnittebene berührenden Kugel (vgl. Nr. 233).

† Bei wiederholtem Abwinden der Mantelfläche erscheinen mehrere solche in's Unendliche laufende und mit $b_1 \mathfrak{B} b_2$.. congruente Aeste. Die Anzahl dieser Aeste ist nur dann eine endliche, wenn das Verhältniß o′n′ : s′n′ (R : ℜ) rational ist (wie in Fig. 129, wo der Exponent desselben $= \frac{2}{5}$).

III) Wenn die Schnittebene PQP′ die beiden Kegelmäntel trifft, wie in Fig. 130, so besteht die Schnittcurve aus zwei getrennten unendlichen Aesten und kann (am besten durch Anwendung von Parallelkreisen) wie in (I) projicirt werden. Fig. 130.

Eine parallel zu PQP′ durch die Kegelspitze gelegte Ebene U_1u′s′ schneidet den Kegel in zwei Mantellinien (U_1o, u′s′), (U_2o, u′s′), welche der PQP′ ebenfalls parallel sind. Denkt man sich die Erzeugende des Kegels aus der Lage (oM, s′m′) in die Lage (oU_1, s′u′) gedreht, so rückt während der Drehung der Schnittpunkt der Erzeugenden in der Ebene PQP′ in immer größere Entfernung von (v, v′), und wenn endlich die zuletzt genannte Lage erreicht ist, so sagt man, dieser Schnittpunkt sei in unendliche Entfernung gefallen. Dasselbe gilt für den Schnittpunkt der Lage (oU_2, s′u′). Will man durch den unendlich fernen Punkt der Schnittcurve, welcher auf (oU_2, s′u′) liegt, eine Tangente an sie ziehen, so erhält man statt einer wirklichen Tangente eine Asymptote (Nr. 201); die Projectionen derselben ergeben sich aber nach derselben Methode, welche zur Auffindung einer Tangente dient und oben (I, II) in Anwendung gebracht wurde. Die Asymptote ist nämlich der Schnitt der Ebene PQP′ und einer durch (oU_2, s′u′) gelegten Berührungsebene des Kegels, mithin parallel zu (oU_2, s′u′), und man erhält ihre H-Projection, wenn man $U_2P \perp oU_2$ und Pd || U_2o zieht. In gleicher Weise führt die (oU_1, s′u′) auf eine zweite Asymptote, deren H-Projection ′P′d ist. *

(**Entwickelung.**) — Da hier beide Kegelmäntel geschnitten worden sind, und also auch beide entwickelt werden müssen, wenn man die Verwandelte des Schnitts haben will, so besteht die Entwickelung aus zwei Kreissectoren $\mathfrak{S}\mathfrak{N}\mathfrak{M}\mathfrak{N}_0\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{F}\mathfrak{E}\mathfrak{F}_0\mathfrak{S}$, welche in Fig. 130 einerlei Halbmesser haben, weil man als Begrenzung für den obern Kegelmantel

* Bei dem parabolischen Schnitte in Fig. 129 gibt es eine Mantellinie (oN, s′n′), welche die Ebene PQP′ erst in unendlicher Entfernung trifft. Eine durch sie gelegte Berührungsebene τ des Kegels ist aber hier parallel zu PQP′. Daher hat die Parabel für ihren unendlich fernen Punkt keine Asymptote (indem diese der Schnitt der Ebenen τ und PQP′ sein müßte und ein solcher Schnitt hier nicht existirt).

eine horizontale Ebene EF gewählt hat, welche von der Spitze S eben so weit entfernt ist, wie letztere von der $\mathfrak{H}\mathfrak{E}$. Der Kegel selbst wurde nach der Linie NSF aufgeschnitten; daher besteht die Verwandelte des auf dem obern Mantel gelegenen Asts der Schnittcurve aus zwei getrennten Stücken $\mathfrak{W}\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{W}_0\mathfrak{T}_1$, während die Verwandelte $\mathfrak{Z}_1\mathfrak{V}\mathfrak{Z}_2$ des untern Asts ungetrennt bleibt. Die einzelnen Punkte der Verwandelten ergeben sich leicht, wenn man die Verwandelten der durch die ursprünglichen Punkte gehenden Parallelkreise zeichnet und die betreffenden Mantellinien in die Entwickelung überträgt. So ist zum Beispiel $\mathfrak{H}\mathfrak{J}\mathfrak{H}_0$ die Verwandelte des Parallelkreises (hb$_2$, h''i'') (wobei $\mathfrak{S}\mathfrak{H} = s'h''$) und $\mathfrak{S}\mathfrak{B}_2$ die Lage der Mantellinie SB$_2$ nach dem Entwickeln, also $\mathfrak{B}_2$ der Punkt, welcher in der Verwandelten den Punkt (b$_2$, b') der Schnittcurve darstellt.

Macht man $\mathfrak{U}_2\mathfrak{P} \perp \mathfrak{S}\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_2\mathfrak{P} = U_2P$, $\mathfrak{P}\mathfrak{D} \parallel \mathfrak{S}\mathfrak{U}_2$, so entspricht $\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ in der Entwickelung der Asymptote PD und bleibt auch für die Verwandelte eine Asymptote, welcher sich sowohl der Zweig $\mathfrak{V}\mathfrak{Z}_2$.. als der Zweig $\mathfrak{W}_0\mathfrak{T}_1$.. ohne Ende nähert. Auf gleiche Art ergibt sich die Lage $\mathfrak{P}'\mathfrak{D}$ der zweiten Asymptote.

† Durch wiederholtes Abwickeln der Kegelfläche kehren die eben gezeichneten Bögen der Verwandelten immer wieder und reihen sich zum Theil aneinander. Wenn diese Bögen auf eine endliche Anzahl beschränkt bleiben sollen, müssen s'n' und o'n' ($\mathfrak{R}$ und R) commensurabel sein, wie in Fig. 130, wo o'n' : s'n' = 2 : 3. In Fig. 130^b ist für den vorliegenden Fall die Verwandelte (soweit sie den in Fig. 130 projicirten begrenzten Stücken der Schnittcurve entspricht) vollständig gezeichnet.

413. Anmerk. Wäre über die Natur der Kegelschnitte nichts Näheres zuvor bekannt, so könnte für jeden der drei in Nr. 412 behandelten Fälle die Gleichung der Schnittcurve (für rechtwinkelige Coordinaten) sehr leicht aus der Figur gefunden werden. Gilt nämlich überall VW als Abscissenaxe und wird $h'a' \cdot a'i' = y^2$ gesetzt, ferner (in Fig. 128 und 130) $c'v' = c'w' = \alpha$, $k'c' \cdot c'l' = \beta^2$, $c'a' = x$, dann (in Fig. 129) $v'a' = x$, $v'b' = x'$, $m'b' \cdot b'n' = y'^2$, so ergibt sich aus Betrachtung ähnlicher Dreiecke (und passender Multiplication der erhaltenen Proportionen)

für Fig. 129: $y^2 : y'^2 = x : x'$

„ Fig. 128: $y^2 : (\alpha - x)(\alpha + x) = \beta^2 : \alpha^2$

„ Fig. 130: $y^2 : (x - \alpha)(x + \alpha) = \beta^2 : \alpha^2$.

Bemerkenswerth ist hiebei, daß die beiden Strecken, als deren Produkt der constante Werth β^2 für die Ellipse wie für die Hyperbel erscheint, in beiden Fällen durch die nämliche Construction erhalten werden; nur ist β bei der Ellipse zugleich die Ordinate in einem Parallelkreis, bei der Hyperbel nicht. Daß aber (wie aus Früherem bekannt) für die Hyperbel die durch 2β ausgedrückte Größe das zwischen die Asymptoten fallende Stück der Scheiteltangente ist, läßt sich ebenfalls aus Fig. 130 ersehen. Zieht man nämlich $s'c'$, dann $w'\gamma' \parallel s'c'$ bis an $u's'$.., ferner $\varkappa'\gamma'\lambda' \parallel h'i'$, so ist $\gamma'\lambda' = c'l'$ und $\gamma'\varkappa' = c'k'$, mithin $c'k' . c'l' = \gamma'\varkappa' . \gamma'\lambda'$. Die Größe 2β ist also einer in γ' projicirten Sehne Γ des in $\varkappa'\lambda'$ projicirten Parallelkreises gleich, und diese Sehne hat wieder einerlei Länge mit einer in w' projicirten und durch die Asymptoten begrenzten Geraden B. Denn B bildet die Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks, dessen Spitze in (c, c') liegt und dessen gleiche Seiten in die Asymptoten fallen; Γ ist die Basis eines andern gleichschenkeligen Dreiecks, dessen Spitze in (s, s') liegt und dessen andere Seiten Stücke der (mit den Asymptoten parallelen) Linien $U_1 S$.. und $U_2 S$.. sind; beide Dreiecke sind aber congruent, weil sie in der Höhe ($c'w' = s'\gamma'$) und dem Winkel an der Spitze übereinstimmen; also $B = \Gamma = 2\beta$.

414. An den Verwandelten der in Nr. 409—412 betrachteten Cylinder- und Kegelschnitte finden sich Punkte von besonderer Bedeutung; diese Punkte lassen sich direkt bestimmen.

1) Die Punkte, welche auf der Verwandelten eines Cylinderschnitts die größte und die kleinste Entfernung von der geradlinigen Verwandelten des Normalschnitts haben, sind jene, deren Tangenten parallel zur letztgenannten Geraden, also senkrecht zu den in die Entwickelung übergetragenen zugehörigen Mantellinien liegen; sie entsprechen mithin denjenigen Punkten der ursprünglichen Schnittcurve, in denen diese Curve die betreffenden Mantellinien des Cylinders rechtwinkelig schneidet. (In Fig. 126 und Fig. 127 findet dieß bei V und W statt. Für die V-Spur X'Y'Y'' des in Fig. 127 dargestellten Cylinders würde man die Punkte mittels zweier auf X'v' senkrechten Tangenten der Spur finden; man hätte sodann die durch die Berührungspunkte gehenden Mantellinien zu projiciren und in die Entwickelung überzutragen.)

Aehnlich bestimmen sich in der Verwandelten eines Kegelschnitts die Punkte, in denen die Verwandelte die zugehörigen Radien des um S beschriebenen Kreises senkrecht schneidet.

2) Die (vollständige) Verwandelte des Kegelschnitts in Fig. 128 bietet Doppelpunkte dar. Damit ein Punkt des Bogens $\mathfrak{V}\mathfrak{W}$ mit einem Punkte in der Wiederholung des Bogens $\mathfrak{V}\mathfrak{W}_0$ zusammenfallen könne, muß der Punkt den durch ihn gehenden Kreisbogen zwischen $\mathfrak{S}\mathfrak{N}$

und SM halbiren. Dieser Kreisbogen ist die Verwandelte eines halben Parallelkreises; auf dem Kegel muß also der betreffende Punkt der ursprünglichen Schnittcurve um einen Quadranten seines Parallelkreises von den Linien SN und SM entfernt liegen; mithin ist in d′ der gesuchte Punkt projicirt.

Auf dieselbe Weise gelangt man zu den Doppelpunkten in Fig. 129 und zu den Punkten, in denen bei Fig. 130 ᵇ die durch W und W_0 gehenden Zweige sich schneiden.

3) Auf den in Fig. 126—128 gezeichneten Verwandelten fallen Wendepunkte in die Augen. Den Punkt eines ursprünglichen Kegelschnitts, der zu einem Wendepunkt der Verwandelten wird, findet man, wenn man die Kegelspitze senkrecht auf die Schnittebene projicirt, aus der Projection eine Tangente an die Schnittcurve zieht und den Berührungspunkt bestimmt; ist die geschnittene Fläche ein Cylinder, so wird die Tangente parallel mit der Projection der Mantellinien auf die Schnittebene.

Der Grund dieser Construction liegt in einer Eigenschaft der auf entwickelbaren Flächen zu ziehenden kürzesten Linien, welche in der folgenden Nummer nachgeholt werden soll.

415. Setzt man vorerst an die Stelle einer entwickelbaren Fläche eine gebrochene Fläche, deren ebene Streifen äußerst schmal sind, denkt sich in der Entwickelung dieser Fläche eine Gerade G gezogen, und dann die Ebene der Entwickelung wieder zur ursprünglichen Form gebrochen, so daß aus G eine gebrochene Linie E wird, so ist klar, daß die in einerlei Sinn betrachteten Verlängerungen T_1, T_2 zweier aufeinanderfolgenden Bruchstücke der E gleiche Winkel mit derjenigen Kante M der gebrochenen Fläche bilden, welche durch den gemeinschaftlichen Punkt P beider Bruchstücke geht.* Hieraus folgt ferner, daß die Ebenen [MT_1], [MT_2] gleiche Neigung gegen die Ebene [T_1T_2] haben (Nr. 109, Zus. 2), und diese Neigung wird von einem rechten Winkel um so weniger abweichen, je kleiner der Winkel zwischen T_1 und T_2 ist. Bei fortgesetzter Annäherung der gebrochenen Fläche an eine stetige krumme Fläche kommt jede der Ebenen [MT_1], [MT_2] der durch die Mantellinie M gehenden Berührungsebene unendlich nahe; die Ebene [T_1T_2] aber wird zu einer

* Das entsprechende Winkelpaar für eine andere Kante M′ aber würde dem vorigen nur dann gleich sein, wenn die Fläche prismatisch gebrochen wäre.

Osculationsebene der Curve C, in welche die gebrochene Linie C überzugehen strebt, und steht senkrecht auf jener Berührungsebene. Man hat also folgende Sätze:

1) Die kürzeste Linie, welche auf einer entwickelbaren Fläche zwischen zwei Punkten gezogen werden kann, schneidet jede Mantellinie der Fläche so, daß die auf der Mantellinie zusammenstoßenden Elemente der Linie, in einerlei Sinn verlängert, gleiche Winkel mit der Mantellinie bilden.*

2) Die Osculationsebene für irgend einen Punkt P einer solchen kürzesten Linie enthält die durch P gehende Normale der Fläche.**

Schneidet diese Osculationsebene die entwickelbare Fläche nach der Curve C′, so hat diese mit der kürzesten Linie C die im Punkte P zusammenhängenden Elemente T_1, T_2 gemein; die beiderseits sich anreihenden Elemente T_0, T_3 der C liegen unter gewöhnlichen Umständen auf verschiedenen Seiten der Osculationsebene. In der Entwickelung der Fläche hat also die Verwandelte der C′ mit der geradlinigen Verwandelten der C die nämlichen zwei Elemente gemein und wird von der einen Seite dieser Geraden auf die andere übergehen; P gibt einen Wendepunkt der verwandelten C′.

Ist nun eine entwickelbare Fläche von einer beliebigen Ebene E nach einer Curve C′ geschnitten, so kann auf der Fläche durch jeden Punkt der C′ eine kürzeste Linie C_0 so gezogen werden, daß sie dort die C′ berührt; die Verwandelte der C_0 liefert dann eine gewöhnliche Tangente der verwandelten C′. Soll aber die Tangente in Berührung zweiter Ordnung mit der verwandelten C′ stehen, so muß für den betreffenden Punkt P die Osculationsebene der C_0 mit der Ebene E zusammenfallen, und dieß setzt voraus, daß die (Haupt-) Normale der Curve C′ im Punkte P zugleich Normale der Fläche sei, oder daß die Berührungsebene der Fläche in P senkrecht auf der Ebene E stehe.

---

* Umgekehrt: Wird von einem Punkt der Fläche aus eine Linie nach obigem Gesetz gezogen, so erreicht sie jeden Punkt, durch welchen sie überhaupt gehen kann, auf dem kürzesten Weg.

** Ein Beispiel für den zweiten Satz kommt schon in Nr. 256, † vor, indem die Senkrechte, welche aus einem Punkte der Schraubenlinie auf die Axe des Cylinders gefällt wird, zugleich eine Normale des Cylinders ist.

Hieraus folgt die in Nr. 414 (3) angegebene Regel zur Auffindung derjenigen Punkte eines ebenen Kegel- oder Cylinderschnitts, welche zu Wendepunkten der Verwandelten werden. Bei einem Cylinderschnitt existiren solche Punkte immer, wenn die Schnittcurve in sich geschlossen ist. Für den Schnitt einer Kegelfläche gibt es keinen solchen Punkt, wenn das aus der Kegelspitze auf die Schnittebene gefällte Loth in's Innere des Kegels fällt.

† Aus Obigem geht hervor, daß in demjenigen Punkt eines Cylinder- oder Kegelschnitts, für welchen die Berührungsebene der Fläche senkrecht auf der Schnittebene steht, zwei Elemente der Schnittcurve so zusammenstoßen, daß sie (in einerlei Sinn verfolgt) gleiche Winkel mit der betreffenden Mantellinie machen. Dieß wird an sich klar, wenn man der Curve den Krümmungskreis in dem bezeichneten Punkte substituirt, diesen Kreis als ein reguläres Polygon von sehr großer Seitenzahl betrachtet, als Spur der Berührungsebene auf der Schnittebene aber die strenge Tangente festhält.

416. Unter den windschiefen Flächen gestattet in Beziehung auf ebene Schnitte das Drehungshyperboloid dieselbe einfache Behandlung, wie unter den entwickelbaren der Drehungskegel; nämlich die Anwendung von kreisförmigen Hülfsschnitten.

Um den Schnitt eines Drehungshyperboloids und einer Ebene zu erhalten, braucht man blos ein System von Mantellinien in Betracht zu ziehen; denn die Anwendung des zweiten Systems würde nur wieder auf das nämliche Resultat führen. Zu leichterer Uebersicht des Folgenden soll daher auch nur ein einziges System als vorhanden gedacht werden.

Fig. 131. Wenn ein solches Hyperboloid durch seine verticale Drehungsaxe (o, o′o″) und seine gerade Erzeugende (Vw, v′w′) gegeben ist und die VE senkrecht zur Schnittebene PQP′ angenommen wird, so läßt sich zum Voraus entscheiden, ob die Schnittcurve geschlossen sei oder nicht. Das Erstere wird der Fall sein, wenn die Ebene PQP′ den asymptotischen Kegel in einer Ellipse schneidet; denn da hier alle Mantellinien dieses Kegels der Ebene PQP′ begegnen, so müssen auch alle Mantellinien des Hyperboloids (als Parallelen zu jenen des Kegels) die Ebene PQP′ schneiden und die Schnittcurve kann also keinen unendlich fernen Punkt haben. Wird der asymptotische Kegel von der Ebene PQP′ nach einer Parabel geschnitten, d. h. ist eine Mantellinie des Kegels parallel mit PQP′, so ist auch eine Mantellinie des Hyperboloids parallel mit PQP′; der Schnitt der letztern Fläche hat also einen unendlich

fernen Punkt. Wird endlich der asymptotische Kegel nach einer Hyperbel geschnitten (wobei also zwei seiner Mantellinien parallel zu PQP′ sind), so sind zwei Mantellinien des Hyperboloids parallel zu PQP′ (ohne unter sich parallel zu sein) und mithin hat der Schnitt des Hyperboloids zwei unendlich ferne Punkte. (Vgl. Nr. 300, †.)

Für den letzten Fall paßt die Fig. 131, in welcher $T_1 z T_2$.. die H-Spur und m′o′v′ der verticale Umriß des asymptotischen Kegels ist (vgl. Nr. 292). — Die Schnittcurve hat hier zwei Asymptoten, und diese ergeben sich durch die Schnitte der Ebene PQP′ mit den beiden asymptotischen Ebenen (Nr. 345), welche durch die mit PQP′ parallelen Mantellinien des Hyperboloids gehen. Diese asymptotischen Ebenen berühren zugleich (nach S. 321, *) den asymptotischen Kegel in den beiden Linien (o′t′, oT_1), (o′t′, oT_2), welche mit jenen Mantellinien des Hyperboloids oder mit der Ebene PQP′ parallel sind; hiernach findet man $T_1 S_1$, $T_2 S_2$ als H-Spuren der asymptotischen Ebenen und S_1, S_2 als H-Spuren der Asymptoten. Die Asymptoten selbst laufen parallel mit (o′t′, oT_1), (o′t′, oT_2); daher sind S_1c (|| T_1o) und S_2c (|| T_2o) ihre H-Projectionen. (Man sieht, daß diese Asymptoten zugleich die Asymptoten der Hyperbel sind, in welcher der asymptotische Kegel durch die Ebene PQP′ geschnitten wird. Vgl. Nr. 412, III.)

Die Schnittcurve selbst wird (wie schon oben bemerkt) nach der für Drehungsflächen überhaupt geltenden Methode projicirt. Ihre H-Projection muß die H-Projection des Aequators berühren (Nr. 361, I) und die den Berührungspunkten b_1, b_2 gemeinschaftlich zugehörige V-Projection ist der Punkt b′, wo QP′ die V-Projection des Aequators schneidet.

Schnitte der Rückungsflächen.

417. Die einzelnen Lagen der ebenen Curve, welche durch gesetzmäßige Rückung eine krumme Fläche erzeugt, lassen sich auf eine zu ihnen parallele HE unmittelbar projiciren, da sie unter sich entweder congruent oder ähnlich sind, und eine dieser Lagen gegeben sein muß*; ihre V-Projectionen sind dann Gerade. Die Ebenen dieser verschiedenen Lagen machen also hier das in Nr. 400 erwähnte System von Hülfsebenen aus.

* Wie man eine Curve zeichnen kann, welche einer gegebenen ähnlich ist, folgt aus Nr. 197.

Bei den Flächen zweiter Ordnung würde man nach dem Vorigen die erzeugende Ellipse (oder Parabel) in einer hinreichenden Anzahl von Lagen zu projiciren haben. Da aber jede solche Fläche, mit Ausnahme des hyperbolischen Paraboloids, durch parallele Ebenen in ähnlichen Ellipsen geschnitten werden kann, deren Projectionen wieder ähnliche Ellipsen sind, so vertauscht man besser die von den Lagen der Erzeugungsellipse hergenommenen Hülfsebenen mit einem andern System paralleler Schnittebenen, welche man so wählt, daß die Projectionen der elliptischen Schnitte Kreise geben.

418. Aufg. Den Schnitt eines Ellipsoids durch irgend eine Ebene PQP′ zu projiciren.

Fig. 132. **Aufl.** Man lege die Grundebenen parallel zu zwei Hauptebenen des Ellipsoids, so daß (mon, m′u′n′..), (mtn.., m′o′n′) Hauptschnitte sind. — Macht man $ov_1 = ot$, $v_1v' \perp$ GS und zieht v′o′w′, so schneidet die zur VE senkrechte Ebene Zz′w′ das Ellipsoid in einer Ellipse, deren H-Projection ein Kreis vom Halbmesser ov_1 ist, und die Ebene PQP′ in der Geraden (Zs, z′S′); daher sind die Punkte a_1, b_1, wo Zs jenem Kreise begegnet, die H-Projectionen zweier Punkte der verlangten Schnittcurven; die zugehörigen V-Projectionen sind a′, b′ (in v′w′). — Irgend eine zu Zz′w′ parallele Ebene schneidet das Ellipsoid in einer andern Ellipse, deren V-Projection die Gerade v″w″ ($\parallel$ v′w′) und deren H-Projection wieder ein Kreis ist; den Mittelpunkt c und den Halbmesser cv_2 dieses Kreises findet man, wenn man v″w″ in c″ halbirt, $c''c \perp$ GS und $v''v_2 \perp$ GS fällt. Die H-Projection rb_2a_2 der Geraden, in welcher die Parallel-Ebene die PQP′ schneidet, ist parallel mit sb_1 und also leicht zu erhalten; sie schneidet den Kreis $a_2v_2b_2$ in zwei Punkten a_2, b_2, und diese gehören zwei neuen Punkten der gesuchten Schnittcurven zu, deren V-Projectionen a″, b″ in v″w″ liegen. — Auf dem angedeuteten Wege ergeben sich beliebig viele Punkte der Curve. Dabei ist zu beachten, daß die Mittelpunkte der parallelen Hülfsschnitte alle auf der Geraden (mn, o′c″) liegen und also das Halbiren der V-Projectionen bei ferneren Hülfsschnitten erspart wird.

419. Der Schnitt eines einmanteligen Hyperboloids und einer Ebene läßt sich ganz nach dem Verfahren der vorigen Nummer erhalten.*

* Während für das Ellipsoid die VE parallel mit derjenigen Hauptebene zu legen

Dagegen ist es nicht so leicht, an einem zweimanteligen Hyperboloid die Ellipsen zu finden, welche sich auf der zur reellen Axe senkrechten Grundebene als Kreise projiciren; und am elliptischen Paraboloid gibt es (wie aus dem Zusatz zu Nr. 404, mit Rücksicht auf Nr. 301 und Nr. 268, gefolgert werden kann) gar keine Ellipsen, deren Projectionen auf einer zur Axe senkrechten Ebene Kreise sind. In diesen beiden Fällen kann man ein anderes Verfahren zur Anwendung bringen, welches in der nächsten Nummer begründet werden wird.

Außerdem könnten auch folgende Methoden benützt werden (wobei immer vorausgesetzt sein soll, die HE sei senkrecht zur Axe der Fläche, die VE parallel zu einer Hauptebene oder eine Hauptebene selbst).

1) Es sei E irgend ein elliptischer Hülfsschnitt der Fläche, dessen Ebene senkrecht zu einer Hauptebene H steht und dessen größere Axe in H fällt. Nachdem die kleinere Axe von E bestimmt ist, läßt sich immer eine zu H senkrechte Ebene G finden, auf welche sich E als Kreis projicirt. Nimmt man diese Ebene G als neue HE, so läßt sich ähnlich wie in Nr. 418 verfahren; die H-Projection des Schnitts, den die gegebene Ebene auf der Fläche hervorbringt, kann nöthigenfalls in die alte HE zurück übertragen werden.

2) Ist S die gegebene Schnittebene und gilt als VE eine Hauptebene selbst, so betrachte man die in der VE liegende Hyperbel oder Parabel als Meridian einer Drehungsfläche F und diese als Ableitung (Nr. 268. 301) der gegebenen Fläche F, bestimme die entsprechende Ableitung S der Ebene S (zu welchem Zwecke man blos für einen Punkt der H-Spur von S die Ableitung zu suchen hat), projicire den Schnitt C der F und S und dann die Curve C, nach welcher der v-projicirende Cylinder für C von der Ebene S geschnitten wird.

Ferner könnte man den Schnitt eines Hyperboloids und einer Ebene S noch dadurch erhalten, daß man, nachdem ein Punkt P dieses Schnitts (am besten ein in die verticale Hauptebene fallender Punkt) bestimmt ist, die Curve K construirt, in welcher die S den asymptotischen Kegel schneidet, und zuletzt eine Curve (in ihren Projectionen) zeichnet, welche durch P geht und mit K „entsprechend" liegt (Nr. 300, †).

Endlich ist ein ebener Schnitt eines elliptischen Paraboloids, falls die Grundebenen parallel zu seinen Hauptebenen genommen werden, auf noch einem Wege leicht zu erhalten, der bei späterer Gelegenheit (Nr. 421, Zus.) gezeigt werden soll.

420. Jede Fläche zweiter Ordnung, welche nach Ellipsen geschnitten werden kann, läßt sich durch zwei verschiedene Systeme von Parallelebenen nach Kreisen schneiden. Je zwei zu verschiedenen Systemen gehörige Kreisschnitte liegen auf einer

---

war, welche durch die große Axe des horizontalen Hauptschnitts geht, hat man für das einmantelige Hyperboloid die VE parallel zur kleinen Axe der Kehlellipse anzunehmen.

Kugel.* (Beide Systeme fallen zusammen, wenn die Fläche durch Drehung entstanden ist.)

Fig. 133.134. Beweis. Es bedeute Aq die Axe eines elliptischen Paraboloids, oder die imaginäre Axe eines einmanteligen Hyperboloids, oder die reelle Axe eines zweimanteligen Hyperboloids, oder auch die Richtung der größten Axe eines Ellipsoids. Ein zu Aq senkrechter Schnitt gibt an jeder dieser Flächen eine Ellipse; die durch Aq und die kleinere Axe dieser Ellipse bestimmte Hauptebene sei als Grundebene genommen; die Curve P𝔓′P′𝔓 (welche in Fig. 133 eine Parabel ist, aber zugleich den einen Zweig einer Hyperbel oder auch ein Stück einer Ellipse andeuten soll) ist der in der GE liegende Hauptschnitt; der andere durch Aq gehende (und in Aq projicirte) Hauptschnitt Q..Q′ ist in Q_1...Q_1′ umgeklappt gezeichnet. — Man denke sich nun in der Ebene dieses zweiten Hauptschnitts um einen beliebigen Punkt der Aq einen Kreis so beschrieben, daß er die Curve Q..Q′ berührt (was in zwei gegen Aq symmetrisch liegenden Punkten Q, Q′ geschieht), und lasse durch Drehung dieses Kreises um Aq eine Kugelfläche entstehen. Der Kreis P𝔓..., nach welchem diese Kugel von der Grundebene geschnitten wird, fällt zusammen mit der Umklappung Q_1PQ_1′ des zuerst genannten Erzeugungskreises; er wird von dem in der Grundebene liegenden Hauptschnitt in den vier Punkten P, P′, 𝔓, 𝔓′ getroffen, wobei die Geraden PP′ und 𝔓𝔓′ sich auf Aq kreuzen müssen, und es ist nun zunächst zu beweisen, daß die Kreuzung zugleich auf der Geraden Q_1Q_1′ (also in der gemeinsamen Projection q der Berührungspunkte Q, Q′) erfolgt.

Die gemeinsamen Tangenten Q_1A, Q_1′A des umgeklappten Hauptschnitts Q_1..Q_1′ und des Kreises Q_1PQ_1′ schneiden sich auf Aq in A; bezüglich jeder der ebengenannten beiden Curven ist die Gerade Q_1Q_1′ die Polare des Punktes A. Da aber der umgeklappte Hauptschnitt Q_1...Q_1′ durch Drehung um Aq in solche Lage gebracht werden könnte, daß seine Projection mit dem Hauptschnitt P𝔓′P′𝔓 zusammenfällt (indem, nach Nr. 301, der eine Hauptschnitt als eine Ableitung des andern gedacht werden kann, wobei die Richtungslinie ⊥ Aq ist), mithin die aus A an P𝔓′P′𝔓 zu ziehenden Tangenten ihre Berührungs-

---

* Für Cylinder und Kegel sind diese Sätze schon in Nr. 267 und Nr. 276 erwiesen.

punkte auf der Geraden $Q_1 Q_1'$ haben, so ist diese Gerade auch bezüglich der Curve $P\mathfrak{P}'P'\mathfrak{P}$ die Polare für A. Will man also auf der Geraden AP' den Punkt bestimmen, welcher mit P' harmonisch liegt gegen A und den Punkt, wo AP' und $Q_1 Q_1'$ sich schneiden, so muß der gesuchte Punkt sowohl auf dem Kreise $Q_1 P Q_1'$ als auf der Curve $P\mathfrak{P}'P'\mathfrak{P}$ liegen, also in $\mathfrak{P}$; ebenso liegt $\mathfrak{P}'$ in gerader Linie mit A und P; folglich schneiden sich PP' und $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ auf der Geraden $Q_1 Q_1'$ (Nr. 278, 3).

Werden jetzt durch PP' und $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ Ebenen senkrecht zur Grundebene gelegt, so schneiden diese die Kugel nach zwei Kreisen über den Durchmessern PP' und $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, die gegebene Fläche nach zwei Ellipsen, deren jede eine der Strecken PP', $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ zur einen Axe hat. Da aber die beiden in q projicirten, der Kugel und der gegebenen Fläche gemeinsamen Punkte Q, Q' auf jeder der vier Schnittcurven liegen, so sind je zwei dieser Curven (mit gemeinsamer Projection) identisch; die Ebenen PP', $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ schneiden also die gegebene Fläche nach Kreisen (und in diesen Kreisen wird die Fläche zugleich von der Kugel geschnitten, obwohl beide Flächen in den Punkten Q, Q' gemeinschaftliche Berührungsebenen haben).

Damit ergeben sich zwei Systeme von Kreisschnitten. Daß ein beliebiger Schnitt des einen Systems mit jedem aus dem andern System auf einer Kugelfläche liegt, folgt aus Nr. 281, Zus. (Vgl. S. 238, *).

Am Ellipsoid und einmanteligen Hyperboloid können die kreisförmigen Schnitte viel einfacher nachgewiesen werden, indem man eine Ebene um die mittlere Axe des Ellipsoids oder um die große Axe der Kehlellipse eines Hyperboloids dreht, bis die zweite Axe des Schnitts jener Drehaxe gleich wird.

Für die beiden Hyperboloide geht die Existenz von Kreisschnitten schon aus Nr. 276 und Nr. 300, † hervor.

† Ist eine Fläche zweiter Ordnung (welche kein hyperbolisches Paraboloid sein soll) auf einem Grundsystem, dessen Ebenen parallel mit Hauptebenen der Fläche sind, dargestellt, und zugleich eine Ebene gegeben, deren Schnitt mit der Fläche verlangt wird, so läßt sich nach Obigem eine auf einer Grundebene (oder vielleicht auch auf einer Seitenebene) senkrechte Ebene K finden, welche die Fläche nach einem Kreise schneidet. Nimmt man sodann eine zu K parallele Ebene als eine neue Grundebene, so kann man auf dem neuen Grundsystem leicht (durch Hülfsschnitte || K) die verlangte Schnittcurve projiciren und schließlich auf das ursprüngliche Grundsystem zurückgehen. (Nr. 125.)

421. Aufg. Den Schnitt eines hyperbolischen Paraboloids, dessen Hauptebenen den Grundebenen parallel liegen, und einer gegebenen Ebene zu projiciren.

Fig.135. **Aufl.** Es sei (tv.., v′t′) der horizontale, (vw, w′v′..) der verticale Hauptschnitt, PQR′ die gegebene Ebene. Eine zur HE parallele Hülfsebene c′b′ schneidet die Fläche nach einer dem horizontalen Hauptschnitt congruenten Parabel ACB (mit dem Scheitel C) und die Ebene PQR′ nach einer Geraden, von welcher ein Stück AB als Sehne in die Parabel ACB fällt. Um die Zeichnung der Parabel ACB zu ersparen, denke man dieselbe sammt der Sehne AB so verlegt, daß sie sich auf der HE nach tv... projicirt. Macht man mn = cv, $a_0 n b_0 \parallel ab$, so ist $a_0 b_0$ die H-Projection der Sehne nach der Verlegung; mittels $a_0 a \parallel b_0 b \parallel$ GS findet man die H-Projectionen der wahren Punkte, in denen die Parabel ACB von der Hülfsebene c′b′ geschnitten wird; (a, a′), (b, b′) sind zwei Punkte der gesuchten Schnittcurve; andere Paare ergeben sich durch Aenderung der horizontalen Hülfsebene.

† Man könnte den Schnitt eines hyperbolischen Paraboloids (oder eines einmanteligen Hyperboloids) und einer Ebene auch dadurch erhalten, daß man die Fläche als Regelfläche behandelt (Nr. 406), würde dabei aber weniger bequem arbeiten.

Zusatz. Das obige Verfahren ist auch auf ein elliptisches Paraboloid anwendbar.

(Schnitte krummer Flächen durch gebrochene.)

422. Es kann bisweilen verlangt werden, den Schnitt einer krummen und einer gebrochenen Fläche darzustellen. Eine solche Aufgabe ist immer nach dem in diesem Kapitel Abgehandelten lösbar. Man projicirt die Schnittcurve, welche die Ebene zweier Nachbarkanten (die Ebene eines Bruchstückes) der gebrochenen Fläche auf der krummen Fläche hervorbringt, nimmt aber von dieser Curve nur den zwischen den erwähnten Kanten enthaltenen Bogen; auf diese Art verfährt man mit sämmtlichen Bruchstücken und erhält dadurch die vollständige Schnittfigur. Diese Figur darf jedoch nicht mit einer stetigen Curve verwechselt werden; vielmehr ist sie eine bloße Zusammensetzung von einzelnen Bögen verschiedener Curven.

Als einfache Uebungsbeispiele können dienen: 1) der Schnitt einer Kugelfläche durch eine prismatisch gebrochene Fläche; 2) der Schnitt irgend einer Drehungs-

fläche mit der gebrochenen Oberfläche einer Pyramide, deren Spitze in der Drehungsaxe liegt.

Aufgaben dieser Art lassen sich übrigens auch nach derselben Methode lösen, welche im folgenden Kapitel für die Schnitte krummer Flächen durch Cylinder- und Kegelflächen gelehrt werden wird, indem prismatisch gebrochene Flächen wie cylindrische und pyramidal gebrochene wie Kegelflächen erzeugt werden können, wenn man der leitenden Curve ein leitendes Polygon (oder irgend eine gebrochene Linie) substituirt.

Fünftes Kapitel.

Schnitte krummer Flächen durch krumme Flächen und krumme Linien.

423. Die Schnittpunkte einer krummen Fläche und einer ebenen Curve liegen dort, wo letztere der Curve S begegnet, nach welcher ihre Ebene die Fläche schneidet; sie können also (wenn überhaupt solche vorhanden sind) durch Lösung der im vorigen Kapitel betrachteten Aufgaben gefunden werden.

Wird aber eine krumme Fläche F von einer gewundenen Curve W geschnitten, so hat man zur Bestimmung der Schnittpunkte eine der spätern Aufgaben aufzulösen. Man betrachtet nämlich die Curve W als Leitende irgend einer Regelfläche R (am besten einer Cylinder- oder Kegelfläche), deren weitere Bestimmungsstücke nach der Lage und Beschaffenheit der gegebenen Fläche F passend gewählt werden können, und bestimmt den Schnitt V der Flächen R und F; die Punkte, in denen die Curven W und V zusammentreffen, sind die verlangten. (In vielen Fällen kann für die Fläche R sogleich einer der projicirenden Cylinder der Curve W genommen werden.)

424. Der Schnitt zweier krummer Flächen ist in den allermeisten Fällen eine gewundene Curve, welche in sich geschlossen sein oder in's Unendliche laufen kann, öfters auch aus mehreren getrennten Aesten besteht.

In Bezug auf die Art des Durchschneidens zweier krummen Flächen (oder zweier von krummen Flächen begrenzten Körper) lassen sich dieselben Unterscheidungen machen wie in Nr. 182 für Polyeder-Schnitte; es kann nämlich das Schneiden entweder ein Eindringen der einen

Fläche in die andere, oder ein Durchdringen, oder ein gegenseitiges Ausschneiden sein.

425. Zur Bestimmung des Schnittes X irgend zweier krummen Flächen F_1, F_2 bedient man sich eines Systems von Hülfsflächen, welche gegen die gegebenen in solchen Beziehungen stehen, daß ihre Schnitte mit letzteren unmittelbar angegeben werden können. Diese Hülfsflächen müssen daher immer von möglichst einfacher Natur sein; wo es angeht, nimmt man Ebenen dafür, außerdem meist Kugeln, Cylinder oder Kegel. Ist H eine solche (ebene oder krumme) Hülfsfläche und schneidet sie die gegebenen Flächen F_1, F_2 in den Linien f_1, f_2, so liegen die Punkte, welche f_1 mit f_2 gemeinschaftlich hat, auf der gesuchten Schnittcurve X; je öfter man dann die Lage der H ändert, um so mehr Punkte der X erhält man.

426. Für die Darstellung der Curve X ist die Wahl des Grundsystems nicht gleichgiltig, indem von der Lage desselben in vielen Fällen die Möglichkeit einfacher Hülfsschnitte abhängt. Außer der Rücksicht auf diese Hülfsschnitte sind manchmal auch noch andere Umstände zu beachten. Lassen z. B. die beiden gegebenen Flächen eine gemeinschaftliche Symmetralebene zu (welche also auch die Schnittcurve X selbst in symmetrische Hälften scheiden muß), so wird man dadurch auf eine zu dieser Hauptebene parallele Grundebene hingewiesen, auf welcher dann die Projectionen der beiden symmetrischen Hälften von X ineinanderfallen müssen, so daß jeder Punkt der Projection für zwei Punkte der wahren Curve gilt.

† Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung sich schneiden und so gegen einander liegen, daß sie eine gemeinschaftliche Hauptebene haben, so projicirt sich auf diese Hauptebene (oder auf eine mit ihr parallele Grundebene) die Schnittcurve immer als eine Linie zweiter Ordnung.* (S. Anhang, IV.)

---

* Daß die Projection der Curve von einer in der Grundebene gezogenen Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann, ergibt sich aus folgender Betrachtung. Zwei in einerlei Ebene liegende Linien zweiter Ordnung können höchstens vier Punkte gemein haben, indem ein gemeinschaftlicher fünfter Punkt beide Linien identisch machen würde (Nr. 279, 1); eine Ebene kann daher der Curve, nach welcher zwei Flächen zweiter Ordnung sich schneiden, in nicht mehr als vier Punkten be-

427. Denkt man sich durch einen Punkt P der Curve X, nach welcher zwei krumme Flächen F_1 und F_2 sich schneiden, eine Tangente an dieselbe gezogen, so muß diese in den beiden Ebenen zugleich liegen, welche durch P berührend an F_1 und F_2 gelegt werden können, und ist also die Durchschnittslinie beider Ebenen. Man kann daher durch Construction dieser Ebenen die Tangente finden, wenn man auch außer P keinen weitern Punkt der Curve X kennt.

Schnitt zweier Regelflächen.

428. Wenn zwei Regelflächen sich schneiden, wählt man gewöhnlich Ebenen zu Hülfsflächen, weil eine schicklich gelegte Ebene wenigstens eine der gegebenen Flächen, und in günstigen Fällen auch wohl beide, nach geraden Linien schneidet.

429. Aufg. Den Schnitt zweier Cylinderflächen C und 𝔈 zu finden.

Aufl. Ein Cylinder wird durch eine zu seiner Richtlinie parallele Ebene nach einer oder mehreren Geraden geschnitten. Daher muß eine Ebene, welche den Richtlinien der beiden gegebenen Cylinderflächen zugleich parallel ist, jede von den Flächen nach Geraden schneiden, und die gegenseitigen Schnittpunkte dieser Geraden liegen auf der gesuchten Schnittcurve.

Fig. 136. Es seien VGW und 𝔙𝔊𝔚 die Leitenden (zugleich die H-Spuren) der gegebenen Flächen C und 𝔈; (Vx, v′x′) eine Mantellinie der ersten, ($\mathfrak{K}b_1$, $\mathfrak{k}'b^I$) eine Mantellinie der zweiten. Legt man durch einen beliebigen Punkt (x, x′) in (Vx, v′x′) eine Parallele zu ($\mathfrak{K}b_1$, $\mathfrak{k}'b^I$) und bestimmt ihre H-Spur Z, so ist VZ die H-Spur einer Ebene E, welche den Erzeugenden beider Cylinderflächen parallel ist (vgl. Nr. 52). Diese Ebene schneidet die Fläche C in den Mantellinien (Vx, v′x′), (Wa_4, $w'a^{IV}$) und die Fläche 𝔈 in ($\mathfrak{V}a_1$, $\mathfrak{v}'a^I$), ($\mathfrak{W}a_2$, $\mathfrak{w}'a^{II}$); daher gehören die vier

---

gegnen, und die Projection der Curve auf irgend einer Grundebene wird mithin von einer in der Grundebene liegenden Geraden in höchstens vier Punkten getroffen, da jede solche Gerade sich als Spur einer zur GE senkrechten Ebene betrachten läßt. Unter den oben angegebenen Umständen aber haben je zwei von den vier Punkten, in denen im Allgemeinen die Curve von einer zur GE senkrechten Ebene geschnitten wird, eine gemeinschaftliche Projection.

Punkte (a_1, a^I), (a_2, a^{II}), (a_3, a^{III}), (a_4, a^{IV}), in denen sich jene zwei Paare von Mantellinien begegnen, der Schnittcurve an (und man hat zugleich aus Nr. 10 eine Genauigkeitsprobe). Durch mehrmaliges paralleles Verrücken der H-Spur VZW erhält man beliebig oft vier neue Punkte der Curve.

Dieses Verrücken der VW hat aber seine Grenzen; denn da die Ebene E, deren Spur sie ist, immer beiden Cylindern begegnen soll, so muß die VW auch die beiden Cylinderspuren treffen, und ihre äußersten Lagen sind mithin diejenigen, von denen jede die eine Cylinderspur berührt und die andere schneidet, in Fig. 136 also die Linien GH und KL. Die beiden Lagen der Hülfsebene E, welche den Spuren GH und KL entsprechen, heißen Grenzebenen, und zwischen ihnen sind alle brauchbaren Lagen der Hülfsebene eingeschlossen; die Linien GH und KL mögen Spurgrenzen heißen.

Aus der Lage der Spurgrenzen ist sogleich abzusehen, von welcher Art der Durchschnitt beider Cylinderflächen sein muß. Berühren nämlich diese Spurgrenzen, wie in Fig. 136, nicht eine und dieselbe Cylinderspur, so sieht man, daß ein Stück des Cylinders C gar nicht vom andern Cylinder 𝔈 erreicht wird (nämlich das Stück, dessen H-Spur der Bogen KL ist), und daß ebenso auch ein Stück des Cylinders 𝔈 nicht vom ersten erreicht wird; deshalb findet zwischen beiden Cylindern ein gegenseitiges Ausschneiden statt und die Schnittcurve muß aus einem einzigen geschlossenen Aste bestehen. Würden dagegen die Spurgrenzen beide die Spur VGW berühren und die Spur VGW schneiden, so müßte der Cylinder C den Cylinder 𝔈 durchdringen und die Schnittcurve bestände aus zwei getrennten Aesten.*

Die Schnittcurve muß die durch K und L gehenden Mantellinien des Cylinders C berühren, und ebenso die durch G und H gehenden Mantellinien des Cylinders 𝔈; denn sie hat mit jeder solchen Mantellinie einen Punkt gemein, und liegt übrigens ganz diesseits derselben. Mit der Bestimmung dieser Berührungspunkte (b_1, b^I), (b_2, b^{II}), (c_1, c^I),

---

* Berührt eine der Spurgrenzen beide Cylinderspuren, so berühren sich die Cylinder, können dabei aber gleichwohl sich noch schneiden (wenn ihre Spuren auf einerlei Seite jener Spurgrenze liegen). Ist jede der beiden Spurgrenzen eine gemeinschaftliche Tangente beider Cylinderspuren, so liegen die Cylinder zwischen zwei parallelen gemeinschaftlichen Berührungsebenen. — Wenn die gegebenen Cylinder sich gar nicht begegnen, ist dieß sogleich durch die Lage der Spurgrenzen angezeigt.

(c_2, c'') wird am besten die Zeichnung der Curve begonnen; hierauf sucht man in jeder Grundebene diejenigen Punkte der Curvenprojection, welche auf den gleichnamigen Umrissen der Cylinder liegen und in denen die Projection den betreffenden Umriß berühren muß (Nr. 361, I). Aus diesen wenigen Punkten ist im Allgemeinen schon der Lauf der Curve zu erkennen, und es läßt sich dann leicht beurtheilen, an welchen Orten man noch weitere Punkte zu bestimmen nöthig hat.

† In Beziehung auf das Ausziehen der projicirten Mantellinien ist zu bemerken, daß auch solche, welche auf dem an sich sichtbaren Theile des einen Cylinders liegen, theilweise unsichtbar werden können, indem der andere Cylinder Stücke derselben verdeckt. Was für Stücke zu punktiren sind, läßt sich am besten ermessen, wenn man vorher bestimmt hat, welche Punkte der Schnittcurve sichtbar und welche unsichtbar sind. Ein Punkt der Schnittcurve kann aber nur dann sichtbar sein, wenn von den beiden Mantellinien, durch deren Schnitt er entstanden ist, jede auf ihrem eigenen Cylinder (ohne Vorhandensein des andern) ganz sichtbar wäre; ein Punkt dagegen, in welchem sich eine sichtbare und eine unsichtbare oder zwei unsichtbare Mantellinien schneiden, ist verdeckt, weil er bezüglich des einen oder beider Cylinder auf dem unsichtbaren Theile liegt.

†† Wenn, wie in Fig. 136, die Leitenden der beiden Cylinder geschlossene Curven sind, kann die Schnittcurve niemals einen unendlichen Zweig haben. Denn es gibt hier immer Grenzebenen, über welche die Schnittcurve nicht hinaus kommt und innerhalb welcher sie auch keinen unendlich fernen Punkt haben kann, weil ein solcher das Parallelwerden zweier auf verschiedenen Cylindern liegender Mantellinien und mithin ein Parallelsein der beiden Erzeugenden voraussetzen würde; unter einer solchen Voraussetzung aber schneiden sich zwei Cylinder nicht in einer Curve, sondern in mehreren Geraden.

Zusatz. Hat man nur einen Punkt der Schnittcurve bestimmt, so kann man (nach Nr. 427) sogleich für diesen Punkt die Tangente der Curve finden, ohne weiterer Punkte zu bedürfen. So ist für den Punkt (q, q'), welcher durch den Schnitt der von T und 𝔗 ausgehenden Mantellinien entsteht, die Tangente die Schnittlinie zweier Ebenen, welche die beiden Cylinder in den genannten Mantellinien berühren; die H-Spuren dieser Ebenen sind TR, 𝔗R, also R die H-Spur der Tangente, Rq ihre H-Projection, $r'q'$ ihre V-Projection.

430. Uebungsaufgabe. Die in Fig. 136 dargestellten Cylinder zu entwickeln und auf dem entwickelten Mantel eines jeden die Verwandelte der Durchschnittscurve zu zeichnen.

431. Aufg. Den Schnitt zweier Kegelflächen zu projiciren.

Aufl. Die Kegel seien durch ihre H-Spuren $VZ_1W..$, $M\mathfrak{Z}_1N..$ und ihre Spitzen (s, s'), (t, t') gegeben. Fig. 137.

Läßt man um eine Gerade, welche die Spitzen S, T beider Kegel verbindet, eine Ebene E sich drehen, so schneidet jede Lage dieser Ebene sowohl den einen als den andern Kegel nach geraden Linien (weil sie durch die beiden Kegelspitzen geht), und die gegenseitigen Durchschnitte derselben sind Punkte der gesuchten Schnittcurve.

Wenn E in solche Lage kommt, daß sie den einen Kegel berührt und den andern schneidet, so heißt sie eine Grenzebene. Aus den Lagen der Grenzebenen ist (wie in Nr. 429) die Art des Durchschnitts der gegebenen Flächen zu erkennen. Die H-Spuren der sämmtlichen Lagen von E gehen durch die H-Spur R der ST..; die H-Spuren der Grenzebenen (die Spurgrenzen) erhält man also, wenn man durch R Gerade legt, deren jede die Spur des einen Kegels berührt und die Spur des andern schneidet. Sind die Spurgrenzen Tangenten einer und derselben Kegelspur (wie in Fig. 137), so ist der Schnitt beider Kegel ein Durchdringen (und zwar dringt derjenige Kegel, dessen Spur von den Spurgrenzen berührt wird, durch den andern), wobei die Schnittcurve aus getrennten Aesten besteht. Wenn von den Spurgrenzen jede eine andere Kegelspur berührt, so schneiden die Flächen sich gegenseitig aus.

Die in Fig. 137 dargestellten Kegel sind von solcher Lage und Beschaffenheit, daß sie eine gemeinschaftliche Hauptebene haben, und zu dieser ist die VE parallel gelegt. Deshalb, und weil die Spuren der Kegel Linien zweiter Ordnung (Kreise) sind, muß die V-Projection des Schnitts eine Linie zweiter Ordnung sein (Nr. 426, †). Zugleich sind die Lagen der Hülfsebenen E symmetrisch zu beiden Seiten der gemeinschaftlichen Hauptebene angeordnet, wodurch von den Mantellinien, auf welche man durch ihre Schnitte kommt, je zwei immer eine gemeinschaftliche V-Projection erhalten. — Zuerst läßt man die Ebene E mit der Hauptebene zusammenfallen und findet dadurch die Punkte (a^{I}, a_1), (a^{II}, a_2), (a^{III}, a_3), (a^{IV}, a_4); dann geht man sogleich zu den Grenzebenen über, weil die in ihnen liegenden Mantellinien von der Schnittcurve berührt werden müssen; andere Lagen der E schaltet man nach Bedürfniß ein.

In der Zeichnung der Fig. 137 sind vorzugsweise nur die beiden untern Mäntel der Kegel berücksichtigt, weil durch das Hinzutreten der obern Mäntel die H-Projection völlig verdeckt worden wäre und dabei (wegen des Punktirens aller Linien) die Deutlichkeit gelitten hätte. Deshalb sind auch die Mantellinien, welche in die Hülfsebenen E fallen, nicht über die Kegelspitze hinauf verlängert. Um aber die vollständige

Schnittcurve zu erhalten, müssen nothwendig die obern Mäntel ebenfalls in Betracht gezogen und also die Mantellinien nach oben verlängert werden. Das Zusammentreffen dieser obern Mäntel gibt einen dritten Ast der Schnittcurve; die Anfänge für die Projectionen dieses Astes sind in $x_0 a_4 x$ und $a^{IV} x'$ angedeutet (wobei $a^{IV} x'$ eine Fortsetzung des in a^{I} unterbrochenen Hyperbelastes $a^{II} .. a^{I}$ ist).*

† Welche Theile der Fig. 137 (die obern Kegelmäntel hinweggedacht) ausgezogen und welche punktirt werden mußten, ist dort leicht zu bestimmen. Bei andern Lagen der gegebenen Kegel hält man sich an dieselbe Regel, welche in Nr. 429, † für einen verwandten Fall aufgestellt wurde.

†† Man kann, ehe man noch die Zeichnung der Schnittcurve beginnt, zum Voraus untersuchen, ob diese Curve unendliche Zweige habe oder nicht. Ersteres ist nur dann möglich, wenn irgend einmal zwei in einerlei Hülfsebene E fallende und zu verschiedenen Kegeln gehörige Mantellinien parallel werden (sich erst in unendlicher Entfernung schneiden). Zwei solche Mantellinien müßten aber, wenn man den einen Kegel parallel mit sich selbst bis zum Zusammenfallen beider Spitzen verrückte, in eine einzige Linie sich vereinigen. Denkt man sich nun jene Rückung mit dem Kegel S wirklich vorgenommen, so bilden $t'p'$ ($\parallel s'n'$) und $t'q'$ ($\parallel s'm'$) den verticalen Umriß seiner neuen Lage; und da seine ursprüngliche H-Spur ein Kreis war, so ist auch seine neue Spur ein Kreis über PQ. Dieser Kreis schneidet die H-Spur des gegebenen Kegels T in den Punkten Z_1, Z_2; also haben die beiden Kegel, deren Spitzen in T vereinigt sind, zwei Mantellinien TZ_1, TZ_2 gemein, und hieraus muß, dem Vorigen gemäß, geschlossen werden, daß die Schnittcurve der gegebenen Kegel T und S (nachdem letzterer in seine ursprüngliche Lage zurückgeführt worden) in's Unendliche läuft. ** — Bei der parallelen Zurückbewegung des Kegels S schreitet die Spitze S in der Geraden RTS und die Linie TZ_1 in der Ebene TRZ_1 fort, also der Punkt Z_1 in der Geraden RZ_1; schneidet daher die verlängerte RZ_1 den Kreis über MN im Punkte $\mathfrak{Z}_1$, so muß $s\mathfrak{Z}_1 \parallel tZ_1$ sein und die H-Projection derjenigen Mantellinie vorstellen, welche die TZ_1 in einem unendlich fernen Punkte schneidet. Auf dieselbe Weise findet man die H-Projection $s\mathfrak{Z}_2$ der Linie $S\mathfrak{Z}_2$, welche der TZ_2 in unendlicher Entfernung begegnet. Wegen der Symmetrie beider Hälften jedes Kegels müssen die Linien TZ_1 und TZ_2 eine gemeinschaftliche V-Projection ($t'z'$) haben; ebenso $S\mathfrak{Z}_1$ und $S\mathfrak{Z}_2$.

Zusatz. Eine Tangente der Schnittcurve für einen gegebenen Berührungspunkt findet man auf demselben Wege wie in Nr. 429, Zus.

* Warum auf die V-Projection der Schnittcurve der in Nr. 361, I aufgestellte allgemeine Satz keine Anwendung findet, erklärt sich aus der Doppelgeltung der Bögen $a^{I} .. a^{II}$, $a^{III} y'$; die Tangenten der Schnittcurve in den Punkten (a_1, a^{I}), (a_2, a^{II}), ... projiciren sich auf der VE als Punkte.

** Das Gegentheil wäre der Fall gewesen, wenn die Kreise über PQ und VW sich nicht geschnitten hätten.

Wendet man das Verfahren auf den unendlich fernen Schnittpunkt von $S\mathfrak{Z}_1$ und TZ_1 an (††), so erhält man eine Asymptote der Schnittcurve*, welche mit $S\mathfrak{Z}_1$ und TZ_1 parallel sein muß (Nr. 5, v) und also leicht zu projiciren ist. Ihr nähert sich sowohl der Zweig (a_4x_0.., $a^{IV}x'$..) als der Zweig (a_3Y_0.., $a^{III}y'$..) ohne Ende, und ihre Projectionen sind Asymptoten für die gleichnamigen Projectionen dieser Zweige. Eine zweite Asymptote, welche mit der ersten die V-Projection gemein haben muß und den Zweigen (a_4x.., $a^{IV}x'$), (a_3Y.., $a^{III}y'$..) zugehört, entspricht dem unendlich fernen Schnittpunkte der TZ_2 und $S\mathfrak{Z}_2$. Beide Asymptoten schneiden sich in der gemeinsamen Hauptebene der Kegel.

432. Aufg. Den Schnitt einer Cylinderfläche und einer Kegelfläche zu projiciren.

Aufl. Die hier anzuwendenden Hülfsebenen werden durch die Spitze des Kegels parallel zur Erzeugenden des Cylinders gelegt und gehen demnach alle durch die Gerade, welche man durch die Kegelspitze parallel zur Erzeugenden des Cylinders ziehen kann. Jede solche Ebene schneidet sowohl den Kegel als den Cylinder nach Geraden. Im Uebrigen wird die Aufgabe fast ganz so behandelt wie die in Nr. 429 und Nr. 431.

433. Anmerk. Wenn bei den in Nr. 429—432 behandelten Aufgaben sich zeigt, daß auf jeder Grundebene die Spur für eine der gegebenen Flächen in unbequeme Entfernung fällt oder eine zu gedehnte Form erhält, so hat man eine neue Grundebene in passender Stellung einzuführen. Ist eine der Flächen ein Cylinder, dessen Richtlinie dem Grundschnitt parallel liegt, so sieht man sich auf Benützung einer Seitenebene hingewiesen.

434. Uebungsaufgaben. Man suche den Durchschnitt

1) einer Cylinderfläche und eines hyperbolischen Paraboloids, dessen Richtebene parallel zur Erzeugenden des Cylinders ist;
2) zweier hyperbolischen Paraboloide mit gemeinschaftlicher Richtebene;
3) eines Kugel-Conoids und des in Nr. 329, 1 beschriebenen Conoids, wenn beide einerlei Richtebene haben;
4) einer (windschiefen) Schraubenfläche und einer Kegelfläche, deren Spitze in der Axe der erstern liegt.

* Gegenwärtiges Beispiel mag überhaupt zeigen, wie auch bei gewundenen Curven Asymptoten vorkommen können, nachdem früher nur Asymptoten ebener Curven erwähnt worden sind.

Schnitt einer Drehungsfläche und einer Regelfläche.

435. Die Hülfsflächen, mittels deren man den Schnitt zwischen einer Drehungsfläche und einer Regelfläche zu erhalten sucht, sind entweder Ebenen, oder Kegel, oder Cylinder.

Wo man Ebenen benützt, wählt man diese meist so, daß sie entweder die Drehungsfläche (bei verticaler Stellung ihrer Axe) nach Parallelkreisen schneiden*, oder die Regelfläche nach Geraden.** In besondern Fällen läßt sich Beides durch ein und dasselbe Ebenensystem erreichen; nämlich dann, wenn die sämmtlichen Mantellinien der Regelfläche mit einer Ebene parallel sind, welche senkrecht zur Axe der Drehungsfläche liegt.*** In andern Fällen wird man durch die Natur und gegenseitige Lage der gegebenen Flächen auf Hülfsebenen verwiesen, welche die Regelfläche nach Geraden und die Drehungsfläche nach Meridianen schneiden.†

Wie und in welchen Fällen man sich der Kegel oder Cylinder als Hülfsflächen bedient, wird später (Nr. 440. 441) an Beispielen gezeigt werden.

436. Aufg. Man verlangt den Schnitt einer Drehungsfläche und einer Kegelfläche, welche ihre Spitze in der Drehungsaxe hat.

Fig. 138. **Aufl.** Die HE lege man senkrecht zur Axe (s, o's') der Drehungsfläche, deren Hauptmeridian (mn, m'o'n'..) sein soll; ferner sei PUVW die H-Spur und (s, s') die Spitze der Kegelfläche. Die Drehungsfläche ist hier eine vollkommen geschlossene und die Kegelspitze liegt innerhalb derselben; deshalb kommt jeder Mantel des Kegels mit der Drehungsfläche zum Durchschnitt. Vorläufig aber soll, um eine übersichtliche Zeichnung zu erhalten, der obere Mantel des Kegels weggelassen und von der Drehungsfläche auch nur dasjenige Stück als vorhanden gedacht werden, welches vom untern Kegelmantel getroffen wird; der Parallelkreis (mln, m'n') möge die Grenze dieses Stückes sein.

In die Ebene des Hauptmeridians fallen zwei Mantellinien (Vs, v's'), (Ws, w's') des Kegels; die Punkte (a', a), (b', b), welche diese mit

---

* Ein Beispiel in Nr. 442, 5.

** Beispiel in Nr. 441, ††.

*** Beispiele in Nr. 442, 1—3.

† Beispiele in Nr. 436 und Nr. 442, 3. 4.

dem Hauptmeridian gemein haben, gehören zur gesuchten Schnittcurve, und in a′, b′ berührt die V-Projection dieser Curve den verticalen Umriß der Drehungsfläche. Um den Punkt der Curve zu erhalten, dessen V-Projection auf der Linie u′s′ des verticalen Kegelumrisses liegt, drehe man die der Mantellinie US entsprechende h-projicirende Ebene, welche zugleich eine Meridianebene der Drehungsfläche ist, bis zum Zusammenfallen mit der Hauptmeridianebene; dadurch kommt die Mantellinie in die Lage (U_0s, u^0s') und schneidet den Hauptmeridian in einem Punkte, dessen V-Projection c^0 ist; bei Zurückbewegung des Meridians in seine erste Stellung rückt dieser Punkt nach (c′, c), wo er der gesuchten Curve angehört. Durch das nämliche Verfahren findet man nicht nur den Punkt (d′, d), dessen V-Projection auf die zweite Linie r′s′ des verticalen Kegelumrisses fällt, sondern überhaupt beliebig viele Punkte der Schnittcurve. Dabei dient es zur Abkürzung der Construction, wenn man die Mantellinien des Kegels immer paarweise zusammennimmt, nämlich je zwei solche, deren H-Spuren gleiche Entfernung von s haben, wie SP und SQ; denn man sieht leicht, daß diese beiden nach vorgenommener Drehung der durch sie gehenden Meridianebenen einerlei V-Projection erhalten.

Wäre statt eines Stücks der Drehungsfläche die ganze Fläche beibehalten worden, so hätte man die H-Projection der Schnittcurve und die Stücke sa, sc, … der h-projicirten Mantellinien punktiren müssen. Will man ferner die Schnittfigur vollständig haben, so sind, nachdem der Hauptmeridian ganz angegeben worden ist, die einzelnen Mantellinien des Kegels über die Spitze hinauf zu verlängern, und ebenso die V-Projectionen ihrer gedrehten Lagen; dadurch ergibt sich ein zweiter Curvenast.

† Die V-Projection der Schnittcurve hat in Fig. 138 einen Doppelpunkt f′. Soll zum Voraus untersucht werden, ob ein solcher Doppelpunkt überhaupt vorkommt, und wo er liegt, so bemerke man, daß sf′ die gemeinschaftliche V-Projection zweier Mantellinien ist, deren H-Spuren G, H also in einer zum Grundschnitt senkrechten Sehne der Kegelspur PUVW liegen, und daß zugleich diese Punkte G, H gleichweit von s abstehen, weil die beiden in f′ projicirten Punkte auf einerlei Parallelkreis liegen und mithin die gedrehten Lagen der Mantellinien SG, SH einerlei V-Projection ($s'g^0$) haben müssen. Der Halbirungspunkt x der Sehne GH muß demnach auf VW liegen; ein zweiter geometrischer Ort desselben ergibt sich im Allgemeinen, wenn man durch die Mitten

mehrerer auf dem Grundschnitt senkrechten Sehnen der Curve PUVW eine stetige Curve Y führt. Schneiden Y und VW sich in x, so führt x auf die Punkte G, H und also auch auf den Punkt f'; schneiden sie sich nicht, so hat die Curve a'c'b'd' keinen Doppelpunkt. In Fig. 138 aber ist die Kegelspur PUVW eine Ellipse; daher geht hier die Y in eine gerade Linie über, und zwar in den Durchmesser UR, welcher die Berührungspunkte der auf dem Grundschnitte senkrechten Tangenten Uu', Rr' verbindet (Nr. 237).

437. In Fig. 138 wurde für die gegebene Drehungsfläche eine Kugel angenommen und die Kegelspitze in den Mittelpunkt der Kugelfläche verlegt. Dadurch erhält die vorige Aufgabe noch eine besondere Bedeutung, indem ihre Auflösung zur Entwickelung einer beliebig gegebenen Kegelfläche gebraucht wird (vgl. Nr. 411).

Soll nämlich der in Fig. 138 gegebene Kegel entwickelt werden, so weiß man zum Voraus, daß die Verwandelte der Curve, nach welcher er von jener Kugel geschnitten wird, ein Kreis sein muß, dessen Halbmesser mit dem Kugelhalbmesser übereinstimmt; denn alle Punkte der Schnittcurve sind gleichweit von der Kegelspitze (vom Kugelmittelpunkt) entfernt und behalten diese Entfernungen während der Entwickelung des Kegelmantels bei. Wenn man daher auf diesem Kreise die Punkte angeben kann, welche bestimmten Punkten der ursprünglichen Schnittcurve entsprechen, so kann man bestimmte Mantellinien in die Entwickelung übertragen und auf ihnen die Punkte irgend einer zweiten auf dem Kegel liegenden Curve finden, mithin deren Verwandelte zeichnen. Um ein Beispiel zu geben, soll auf der Entwickelung des vorliegenden Kegels die Verwandelte der H-Spur PUVW gesucht werden.

Man beschreibe mit dem Halbmesser s'm' einen Kreis 𝔄ℭ𝔅.. und betrachte den (verlängerten) Radius S𝔄 als die Lage der Mantellinie (sV, s'v') nach erfolgter Entwickelung; dabei fällt der Punkt V nach 𝔅, so daß S𝔅 = (sV, s'v') = s'v'. Die Lagen, welche in der Entwickelung den Mantellinien (sc, s'c'), (se, s'e'),... entsprechen, lassen sich nur dadurch finden, daß man von 𝔄 aus auf dem Kreise 𝔄ℭ𝔈𝔅.. Bögen 𝔄ℭ, ℭ𝔈,... abträgt, welche gleiche Länge mit den Bögen (ac, a'c'), (ce, c'e'),... der Schnittcurve haben. Da aber diese Curve gewunden ist, so kann eine Aufhebung oder Aenderung ihrer Krümmung erst dann vorgenommen werden, wenn man zuvor die Windung aufgehoben, d. h.

sie (ohne Aenderung ihrer Länge) in eine ebene Curve verwandelt hat, und dieß ist durch Entwickelung eines ihrer projicirenden Cylinder zu erreichen. Die Entwickelung des h-projicirenden Cylinders und die Zeichnung der verwandelten Schnittcurve wird wie in Nr. 409 ausgeführt (denn daß dort eine ebene und hier eine gewundene Curve zu verwandeln ist, macht im Verfahren selbst keinen Unterschied); man erhält dadurch als Verwandelte der (acbd, a′c′b′d′) die Curve A′C′E′..A′₀. Entspricht nun E′ dem Punkte (c, c′), so daß arc A′E′ = arc (ac, a′c′), so mache man arc AE = arc A′C′, ziehe SE.. und trage auf ihr die wahre Länge von (sU, s′u′) ab, d. i. mache SU = s′u⁰; dann ist U der Punkt, welcher auf dem entwickelten Kegel dem ursprünglichen Punkte U entspricht. Macht man arc EE = arc E′E′ und SET = s′t⁰, so ist T die Lage von T in der Entwickelung; u. s. f. Hat man auf diese Art hinlänglich viele Punkte der Spur VUTG..V in der entwickelten Mantelfläche aufgesucht, so läßt sich durch ihre stetige Verbindung die Verwandelte VUTG..V₀ jener Spur zeichnen.*

438. Die H-Spur des gegebenen Kegels ist in Fig. 138 eine Ellipse, und also der Kegel selbst von der zweiten Ordnung. Der Schnitt eines solchen Kegels durch eine um seine Spitze beschriebene Kugel wird ein sphärischer Kegelschnitt (im engern Sinne) genannt, und seine wichtigsten Eigenschaften sind denen der ebenen Kegelschnitte (Linien zweiter Ordnung) analog. Jeder einzelne Ast eines sphärischen Kegelschnitts ist der geometrische Ort eines Punktes auf der Kugelfläche, dessen sphärische (d. h. in Bögen größter Kreise gemessene) Entfernungen von zwei festen Punkten der Kugel eine constante Summe haben; die beiden Aeste zusammen bilden den geometrischen Ort eines Punktes, dessen sphärische Entfernungen von zwei festen Punkten eine constante Differenz haben.

Dieß ergibt sich aus nachstehender Betrachtung.

Auf einer Kugelfläche sei ein Kreis K und ein Punkt F gegeben; ein

---

* Die Kugel, welche für die Entwickelung irgend eines Kegels benützt wird, spielt hier ganz dieselbe Rolle wie die Ebene E, welche in Nr. 410 bei der Entwickelung eines Cylinders zu Hülfe genommen wurde. Sowohl jene Kugel als diese Ebene sind Flächen, welche die sämmtlichen Mantellinien der zu entwickelnden Fläche senkrecht schneiden. (Auch geht die Kugelfläche in eine Ebene über, wenn man den Kegel durch unendliches Fortrücken seiner Spitze in einen Cylinder übergehen läßt.)

veränderlicher Kreis k auf der Kugel gehe durch F und berühre K. Wird der Kreis k als Berührungscurve eines der Kugel umschriebenen Kegels genommen, so ist der geometrische Ort für die Spitze dieses Kegels eine Linie zweiter Ordnung. Denn die Kegelspitze liegt sowohl in der Ebene, welche die Kugel in F berührt, als auch auf der Fläche desjenigen Kegels, welcher der Kugel nach dem Kreise K umschrieben ist, folglich in der Curve C, in welcher dieser Kegel und jene Ebene sich schneiden.* — Die Gerade, welche die Spitze des veränderlichen Kegels mit dem Kugelmittelpunkt verbindet, beschreibt also eine Kegelfläche zweiter Ordnung Z. Diese Gerade schneidet aber die Kugel in zwei Punkten, welche die sphärischen Mittelpunkte des Kreises k sind. Bedeutet P einen dieser Punkte, B den Punkt wo k den Kreis K berührt, F′ den einen sphärischen Mittelpunkt für K, so hat man (wenn die nachfolgenden Bezeichnungen auf sphärische Abstände bezogen werden)

$$F'P + PF = F'B,$$

falls P und F′ auf einerlei Seite des Kreises K liegen; dagegen

$$F'P - PF = F'B,$$

falls P und F′ auf verschiedenen Seiten des Kreises K liegen; F′B aber (als sphärischer Halbmesser von K) ist in jedem Falle ein gegebener unveränderlicher Werth. Demnach kann die Curve W, nach welcher der Kegel Z in die Kugel eindringt, auf der Kugelfläche nach demselben Gesetze beschrieben werden wie eine Ellipse oder Hyperbel in der Ebene.** Die Punkte F, F′ sind die sphärischen Brennpunkte.

Behält man die der Ellipsenconstruction entsprechende Erzeugung der Curve W vor Augen, so sieht man, daß es für sie zwei sphärische Axen gibt, die sich rechtwinkelig schneiden und von denen die größere

* Ein Kegel, welcher den Kugelmittelpunkt zur Spitze und den Kreis K zur Leitenden hat, schneidet die Kugel nach einem zweiten Kreise K′ (parallel zu K und diesem gleich). Je nachdem F zwischen K und K′, oder auf K′, oder in einem der übrigbleibenden Theile der Kugelfläche liegt, kann k in zwei Lagen, oder in einer Lage, oder in keiner Lage ein größter Kreis werden; und da für einen größten Kreis der umschriebene Kegel seine Spitze in unendlicher Entfernung hat, ist C im ersten Falle eine Hyperbel, im zweiten eine Parabel, im dritten eine Ellipse.

** Der geometrische Ort des Punkts P ist auch schon durch die Gleichung PF = PB bestimmt, wobei PB ⊥ K. Dieß erinnert an die Construction einer Parabel, namentlich dann wenn K ein größter Kreis ist (da ein solcher für die Kugelfläche ähnliche Bedeutung hat wie die Gerade für die Ebene).

durch die Brennpunkte geht. Sind diese Axen gegeben, so lassen sich aus ihnen umgekehrt der Kreis K und der Punkt F bestimmen. Da aber die sphärischen Axen die Winkel der beiden Hauptschnitte am Kegel Z messen, so läßt sich nunmehr schließen, daß eine beliebig gegebene Kegelfläche zweiter Ordnung die Stelle des Kegels Z einnehmen kann.

In Fig. 147 ist die Curve W auf einer durch die Brennpunkte F, F′ und den Kugelmittelpunkt O gehenden Ebene dargestellt; SpS′ ist die Projection; SOS′ der Hauptschnitt des Kegels Z. Der zweite Mantel des Kegels schneidet die Kugel nach dem zweiten Curvenast S𝔓S′, dem die Brennpunkte 𝔉, 𝔉′ zugehören. Diese Punkte 𝔉, 𝔉′ können aber auch als Brennpunkte für den Ast SPS′ gedacht werden, ohne daß dieser aufhört als sphärische Ellipse zu erscheinen. Denn legt man durch den in p projicirten Punkt P und durch die beiden Kugeldurchmesser F𝔉, F′𝔉′ zwei größte Kreise, so ist zunächst

$$PF + PF' = SS', \qquad (\mathfrak{G})$$

aber auch (wenn π die halbe Peripherie eines größten Kreises bezeichnet):

$$(\pi - P\mathfrak{F}) + (\pi - P\mathfrak{F}') = 2\pi - S\mathfrak{S}'S',$$

woraus folgt

$$P\mathfrak{F} + P\mathfrak{F}' = S\mathfrak{S}'S',$$

d. h. als Brennpunkte für den (sphärisch-elliptischen) Ast SPS′ können statt F, F′ auch die Punkte 𝔉, 𝔉′ gelten; als sphärische Hauptaxe tritt aber dann statt des Bogens SS′ der Bogen S𝔖′S′ ein.

Die Gleichung (𝔊) läßt sich ferner umändern in

$$PF + (\pi - P\mathfrak{F}') = S'S\mathfrak{S}' - S\mathfrak{S}'$$

$$= \pi - S\mathfrak{S}'$$

oder

$$P\mathfrak{F}' - PF = S\mathfrak{S}',$$

und ebenso hat man für den in 𝔭 projicirten Punkt 𝔓 des Asts 𝔖 . . 𝔖′

$$\mathfrak{P}F - \mathfrak{P}\mathfrak{F}' = S\mathfrak{S}'.$$

Hieraus folgt, daß beide Aeste zusammen den geometrischen Ort eines Punktes vorstellen, dessen sphärische Entfernungen von den Punkten F und 𝔉′ eine constante Differenz S𝔖′ haben (analog der Hyperbel in der Ebene). Nach dieser Ansicht sind dann F und 𝔉′ die sphärischen Brennpunkte für den aus zwei Aesten bestehenden Kegelschnitt. (Man sieht übrigens leicht, daß man ebensowohl die Punkte F′ und 𝔉 dafür annehmen könnte.)

† Wird von der Kugelfläche ganz abgesehen, so bleibt der Satz: Der geometrische Ort für die dritte Kante eines Dreikants, von welchem die Summe der Seiten und die Lagen zweier Kanten gegeben sind, ist eine Kegelfläche zweiter Ordnung.

439. Aufg. Den Schnitt eines schiefen Kreiskegels und einer Kugelfläche zu bestimmen, welche durch die Kegelspitze

geht und ihren Mittelpunkt in dem aus der Spitze auf die kreisförmige Basis gefällten Lothe hat.

Fig. 148. **Aufl.** Die Ebene der Basis sei die eine, der auf ihr senkrechte Hauptschnitt des Kegels die andere Grundebene. In Fig. 148 ist nur die letztere GE berücksichtigt; ba.. ist der Grundschnitt.

Der in die GE fallende größte Kugelkreis wird von den Mantellinien des Hauptschnitts in den Punkten A, B geschnitten, von der durch die Kegelspitze C parallel mit ab gelegten Geraden CT berührt. Da

$$\text{W. } abC = \text{W. } TCB = \text{W. } BAC,$$

so schneidet eine durch AB senkrecht zur GE geführte Ebene den Kegel nach einem Kreise vom Durchmesser AB (Nr. 276); nach dem nämlichen Kreise wird aber auch die Kugel durch jene Ebene geschnitten; also ist dieser Kreis die gesuchte Schnittcurve des Kegels und der Kugel.

† Hätte man zuerst den Kreis A..B auf der Kugel beliebig angenommen und als Leitende eines Kegels betrachtet, der seine Spitze in C hat, so würde eine ganz ähnliche Schlußfolge lehren, daß auf einer zu CO senkrechten Grundebene die Spur des Kegels (die Centralprojection von A..B aus C) ein Kreis a..b ist.

Wenn eine auf einer Kugel liegende Figur auf eine Ebene so projicirt wird, daß die Projectionsstrahlen vom Endpunkte des auf der Projectionsebene senkrechten Kugeldurchmessers ausgehen, so führt dieser besondere Fall der Centralprojection den Namen stereographische Projection.

In Bezug auf solche Projectionen gelten folgende Sätze.

1) Die Projection jedes Kreises der Kugel, welcher nicht durch das Projectionscentrum geht, ist wieder ein Kreis.

2) Der Mittelpunkt für die Projection eines Kugelkreises ist die Projection der Spitze eines Kegels, welcher der Kugel nach jenem Kreise umschrieben ist.

3) Die Projectionen zweier auf der Kugel gezogenen Linien schneiden sich unter demselben Winkel wie die Linien selbst.

Bew. zu 1 ist schon oben angezeigt.

Fig. 148. Bew. zu 2. Die Ebene aCb geht durch die Spitze des um die Kugel nach dem Kreise A..B beschriebenen Kegels und schneidet diesen Kegel nach zwei Geraden AS, BS, welche den Kreis CAB in A und B berühren. Verlängert man AB bis sie die Tangente CT in T trifft, so ist T der Pol der Geraden CSs (Nr. 278) und liegt mithin mit den Punkten A, B, R harmonisch. Deshalb bilden die vier Geraden CT, CR, CB, CA ein System harmonischer Linien, welches von jeder andern Geraden in vier harmonisch gelegenen Punkten geschnitten wird (S. 241, *). Da aber ab || CT, so fällt für die Schneidende ab.. der vierte Punkt in unendliche Entfernung und es ist as = sb oder s der Mittelpunkt der Kreisprojection a..b.

Bew. zu 3. Der dritte Satz läßt folgenden einfacheren Ausdruck zu: „Die Projectionen zweier Geraden, welche die Kugel im nämlichen Punkte berühren, schließen denselben Winkel ein wie diese Tangenten." Es sei nun B der Berührungspunkt; die Ebene CBbv sei senkrecht zu der von beiden Tangenten bestimmten Berührungsebene und schneide letztere nach Bv, die Projectionsebene nach bv. Da W. vBb = W. BAC = W. Cbv, so ist bv = Bv. Die Punkte, in denen die beiden Tangenten die Projectionsebene treffen, und welche P_1, P_2 heißen sollen, liegen in der Geraden, die in v senkrecht auf der Ebene bvB steht; also ist Fig.148.

W. P_1Bv = W. P_1bv, W. P_2Bv = W. P_2bv, mithin W. P_1BP_2 = W. P_1bP_2.

Da aber bP_1, bP_2 die Projectionen von BP_1, BP_2 sind, so ist der Satz erwiesen. *

440. Aufg. Man sucht den Schnitt einer Drehungsfläche und einer Kegelfläche, deren Spitze nicht in der Drehungsaxe liegt. Fig.139.

Aufl. Bei verticaler Stellung der Drehungsaxe (o, o′o″) sei (vw, v′o″w′..) der Hauptmeridian der Drehungsfläche, PRQT die H-Spur des Kegels, (s, s′) seine Spitze.

Um diejenigen Punkte der verlangten Schnittcurve zu finden, welche auf einen beliebig gewählten Parallelkreis (m′n′, man) fallen, nehme man diesen Kreis zur Leitenden eines Hülfskegels, welcher mit dem gegebenen die Spitze (s, s′) gemein hat und letzteren also nur nach Geraden schneiden kann. Der verticale Umriß des Hülfskegels besteht aus den Geraden s′m′k′, s′n′l; seine H-Spur ist ein Kreis vom Durchmesser k′l′, welcher als Mittelpunkt die H-Spur Z der von (s, s′) nach dem Mittelpunkte (o, o′) des Parallelkreises gezogenen Geraden (so, s′o′) hat. Beide Kegelspuren schneiden sich in P und Q; daher gehören die Mantellinien (Ps, p′s′), (Qs, q′s′) den beiden Kegeln gemeinschaftlich zu, und die Punkte (a, a′), (b, b′), wo diese Mantellinien dem Parallelkreise MN begegnen, liegen zugleich auf der gegebenen Drehungsfläche, mithin auf der verlangten Schnittcurve.

Indem man nach und nach den Parallelkreis MN in andere Lagen bringt, ergeben sich auf die vorbeschriebene Weise beliebig viele Punkte der Schnittcurve.

† Die obige Auflösung ist ganz allgemein. Ist aber die H-Spur des gegebenen Kegels ein Kreis, so werden die Hülfskegel entbehrlich

---

* Der Name stereographische Projection ist durch die Geographie eingeführt. Soll mittels solcher Projection ein Bild der Erdoberfläche gegeben werden, so wird die Projectionsebene in der Regel durch den Erdmittelpunkt gelegt.

und können durch Hülfsebenen ersetzt werden, welche zur HE parallel liegen. Eine solche Ebene schneidet nämlich die Drehungsfläche nach einem Parallelkreise und den gegebenen Kegel ebenfalls nach einem Kreise, der sich auf die HE leicht projiciren läßt; die gemeinsamen Punkte beider Kreise sind Punkte der gesuchten Schnittcurve.

441. Aufg. Den Schnitt einer Drehungsfläche und einer Cylinderfläche zu projiciren, deren Erzeugende zur Drehungsaxe nicht parallel ist.

Aufl. Man betrachte einen beliebigen Parallelkreis MN der Drehungsfläche als Leitende eines Hülfscylinders, dessen Erzeugende parallel mit der Erzeugenden des gegebenen Cylinders läuft. Dieser Hülfscylinder schneidet den gegebenen nach Geraden, deren Schnittpunkte mit dem Parallelkreise MN der gesuchten Schnittcurve angehören, so daß sich die gegenwärtige Aufgabe ganz ähnlich wie die vorige behandeln läßt.

† Ist die H-Spur des gegebenen Cylinders (auf einer zur Drehungsaxe senkrechten HE) ein Kreis, so hat man die Hülfscylinder nicht nöthig. (Vgl. Nr. 440, †.)

Hat die Erzeugende des gegebenen Cylinders eine zur Drehungsaxe senkrechte Richtung, so gehen die Hülfscylinder in Hülfsebenen über.

†† Wäre die gegebene Drehungsfläche ein Ellipsoid, so wäre noch eine zweite einfache Auflösung möglich. Man kann nämlich dann ein System von Hülfsebenen parallel zur Erzeugenden des Cylinders annehmen und das Grundsystem so wählen, daß die elliptischen Schnitte der Drehungsfläche und der Hülfsebenen sich auf die eine Grundebene als Kreise projiciren.

442. Uebungsaufgaben. Es schneiden sich

1) ein hyperbolisches Paraboloid und eine Kugel;
2) das in Nr. 329, 1 beschriebene senkrechte Conoid und ein Wulst, für welchen die gerade Leitende des Conoids die Drehungsaxe ist;
3) ein Drehungs-Hyperboloid und eine Wendelfläche (Nr. 332), deren Axe in die Drehungsaxe fällt;
4) irgend eine Drehungsfläche und eine Cylinderfläche, deren Erzeugende parallel zur Drehungsaxe ist;

5) eine entwickelbare Schraubenfläche und ein Drehungs-Paraboloid, dessen Axe mit der Axe der Schraubenfläche parallel liegt. *

Schnitt zweier Drehungsflächen.

443. Haben die beiden gegebenen Drehungsflächen die Axe gemeinschaftlich, so können sie sich nur nach Parallelkreisen schneiden; denn eine zur Drehungsaxe senkrechte Hülfsebene schneidet beide Flächen nach concentrischen Kreisen, welche also, wenn sie nicht ganz ineinander fallen, gar keinen Punkt gemein haben.

444. Sind die Axen zweier Drehungsflächen parallel, so ist ihr Schnitt leicht zu projiciren, da ein und dasselbe Hülfsebenensystem beide Flächen nach Parallelkreisen schneidet.

445. Wenn die Axen der gegebenen Flächen sich schneiden, so wendet man zur Auffindung der Durchschnittscurve sphärische Hülfsflächen an. Es schneidet nämlich eine Kugel, deren Mittelpunkt in der Axe einer Drehungsfläche liegt, die letztere Fläche nach einem Parallelkreise (Nr. 443); wählt man also für den Kugelmittelpunkt den Punkt, wo die Axen zweier Drehungsflächen sich begegnen, so wird jede der beiden Flächen nach einem Parallelkreise geschnitten, und die gemeinschaftlichen Punkte der zwei Parallelkreise liegen auf der Schnittcurve der gegebenen Flächen. Zu leichterer Bestimmung solcher Punkte legt man die HE senkrecht zu der einen Drehungsaxe und die VE parallel zu beiden Axen.

Beispiel.

Bei der vorhin angedeuteten Lage des Grundsystems seien (o, o′o″) und (oX, o″x′) die Drehungsaxen, u′v′t′ und g′k′h′ die verticalen Fig. 140.

---

* Die zu den Axen senkrechten Hülfsebenen (von denen man eine als HE nimmt) schneiden die Drehungsfläche nach Parallelkreisen und die Schraubenfläche nach Kreisevolventen, deren H-Projectionen unter sich congruent sind, aber aus verschiedenen Kreispunkten entspringen. Man reicht mit der Zeichnung einer solchen Evolvente aus, nämlich mit der Flächenspur, wenn man jede Hülfsebene mit dem in ihr liegenden Parallelkreis in sich selbst um den Punkt dreht, wo ihr die Axe der Schraubenfläche begegnet, und zwar so lange, bis die H-Projection der entsprechenden Schnitt-Evolvente mit der Spur der Schraubenfläche zusammenfällt; die erhaltenen gemeinsamen Punkte des Parallelkreises und der Evolvente lassen sich dann durch Rückdrehung leicht an ihren wahren Ort versetzen.

Umrisse zweier Drehungsflächen. Ein Kreis m′k′n′l′, um o″ mit beliebigem Halbmesser beschrieben, stellt den verticalen Umriß einer Kugel vom nämlichen Halbmesser vor, welche ihren Mittelpunkt im Schnitte (o, o″) beider Axen hat, und die gegebenen Flächen nach Parallelkreisen schneidet, deren V-Projectionen die Geraden m′n′, k′l′ sind; daher ist a′ die gemeinschaftliche V-Projection zweier Punkte der Curve, in welcher sich die Drehungsflächen schneiden; die zugehörigen H-Projectionen a_1, a_2 findet man, nachdem die H-Projection ma_1n.. des horizontalliegenden Parallelkreises MN gezeichnet worden ist.

Um für die Schnittcurve andere Paare von Punkten zu erhalten, gibt man der Hülfskugel andere Halbmesser.*

† Zur Bestimmung der Tangente für einen beliebigen Punkt (a_2, a′) der Schnittcurve zeigen sich zwei Wege, von denen zuerst der in Nr. 427 angedeutete betreten werden soll. Zur Unterscheidung der beiden gegebenen Drehungsflächen heiße diejenige, deren Axe vertical steht, die erste.

Die H-Spur PQ der Ebene, welche die erste Drehungsfläche im Punkte (a_2, a′) berührt, wird nach Nr. 336 gefunden. Die Berührungsebene der zweiten Drehungsfläche für den nämlichen Punkt steht senkrecht auf der in (a_2, a′) errichteten Normalen der Fläche; ihre H-Spur RQ ergibt sich also nach Nr. 55, wenn man vorher diese Normale (c′a′, ca_2) bestimmt hat, was wie in Nr. 336, † geschieht. Die H-Spur der gesuchten Tangente ist Q, daher (Qa_2, q′a′) die Tangente selbst.

Ein anderer Weg wird durch die Bemerkung eröffnet, daß eine Ebene ε, durch die von (a_2, a′) ausgehenden Normalen beider Flächen geführt, auf den vorhin benützten Berührungsebenen (Nr. 5, XI) und also auch auf der gesuchten Tangente (Nr. 5, XII) senkrecht steht.** Bestimmt man diese Normalen (c′a′, ca_2), (d′a′, oa_2) und die Spuren

---

* Die Ebene beider Drehungsaxen ist immer eine gemeinschaftliche Hauptebene der gegebenen Flächen. Da nun die in Fig. 140 gewählten Flächen von der zweiten Ordnung sind, so liefert diese Figur ein Beispiel für den in Nr. 426, † angeführten Satz. (Hat ein um o″ beschriebener Kreis mit den beiden verticalen Flächenumrissen zwei Sehnen gemein, welche sich erst in ihren Verlängerungen schneiden, so liegt der Schnittpunkt auf der Fortsetzung der krummen Linie, welche man als V-Projection des Flächenschnittes fand, aber er ist nicht mehr Projection für einen Punkt dieses Schnittes.)

** Demnach ist ε eine Normalebene der Schnittcurve.

der durch sie gehenden Ebene ε, so erhält man die Projectionen a_2Q, $a'q'$ der Tangente nach Nr. 54. In Fig. 140 ist nur die H-Spur EF der Ebene ε gezeichnet; die V-Spur wurde (zur Raumersparniß und zugleich zur Vereinfachung der Construction) durch die Linie ($c'd'$, co) ersetzt, in welcher die ε und die Ebene beider Drehungsaxen sich schneiden. Diese Linie ist nämlich der V-Spur parallel (Nr. 5, XVII) und auf ihrer V-Projection $c'd'$ muß also die V-Projection $a'q'$ der Tangente senkrecht stehen.

446. Liegen die Axen der gegebenen Drehungsflächen nicht in einerlei Ebene, so legt man in der Regel wieder die HE senkrecht zur einen Axe und die VE parallel zu beiden, und bedient sich einer Reihe horizontaler Hülfsebenen. Eine solche Hülfsebene schneidet aber nur die eine Fläche nach einem Kreise; die andere Fläche wird nach einer Curve C geschnitten, deren Punkte man einzeln construiren muß, weshalb hier die Zeichnung weniger einfach ausfällt als in den vorigen Fällen.*

Doch kann unter besondern Umständen ein anderes System von Hülfsebenen größere Vortheile gewähren, wie das folgende Beispiel zeigen mag.

447. Aufg. Den Schnitt zweier Drehungs-Ellipsoide, deren Axen nicht in einerlei Ebene liegen, zu projiciren. Fig. 141.

Aufl. Man lege die VE parallel zu beiden Drehungsaxen, so daß $u'o'$.. und $r'\omega'$.. ihre V-Projectionen, $v'u'w'$.. und $s'r't'$.. die V-Projectionen der Hauptmeridiane, und $o'v'$, $\omega's'$ die V-Projectionen der zweiten Meridian-Halbaxen sind. Kennt man außerdem noch den kürzesten Abstand δ der beiden Drehungsaxen, so sind die beiden Flächen und ihre gegenseitige Lage völlig gegeben. Die vortheilhafteste Wahl der HE wird sich aus nachfolgender Betrachtung ergeben.

---

* Um den Schnitt C einer horizontalen Ebene H und einer Drehungsfläche zu projiciren, deren Axe parallel zur VE, aber geneigt gegen die HE ist, nimmt man zu Hülfsschnitten Parallelkreise. Die V-Projection eines solchen Parallelkreises ist eine Gerade, welche zugleich die Länge seines Durchmessers angibt; die elliptische H-Projection braucht man nicht zu zeichnen; vielmehr projicirt man die (zur VE senkrechte) Sehne des Parallelkreises, welche in die Ebene H fällt und durch die h-projicirende Ebene der Drehungsaxe senkrecht halbirt wird; die Länge der Sehne findet man, wenn man den Parallelkreis in die ebengenannte h-projicirende Ebene umklappt. Die Endpunkte der Sehne gehören der Curve C an.

Das Ellipsoid, dessen Meridian in v′u′w′ projicirt ist, heiße das erste, und das vom Meridian SRT.. das zweite. Man lege durch den Mittelpunkt O des ersten eine Parallele zur Drehungsaxe des zweiten und lasse diese Parallele als Drehungsaxe eines dritten Ellipsoids gelten, dessen Meridian dem Meridian des zweiten ähnlich ist und dessen Aequator mit dem Aequator des ersten einerlei Halbmesser hat. Die V-Projection für den Hauptmeridian dieses dritten Ellipsoids erhält man, wenn man r′o′.. || r′ω′ und o′s′ ⊥ o′r′ zieht, o′s′ = o′v′ macht, die Länge o′r′ aus der Proportion o′r′ : o′s′ = ω′r′ : ω′s′ sucht und über den Halbaxen o′r′, o′s′ eine Ellipse m′r′n′s′ construirt. Diese Ellipse und die Ellipse v′u′w′.. schneiden sich in vier Punkten, welche paarweise in gerader Linie mit o′ liegen; denn zieht man m′o′ und macht (auf ihrer Verlängerung) o′n′ = o′m′, so muß der Punkt n′ auf die Peripherien beider Ellipsen zugleich fallen, indem m′o′ die Hälfte eines den beiden Ellipsen gemeinschaftlichen Durchmessers ist; ebenso ist k′o′l′ ein zweiter gemeinschaftlicher Durchmesser. Demnach haben auch die wirklichen Meridiane VUW.. und SRK.. zwei Durchmesser 𝔐𝔑 und KL gemeinschaftlich. Da ferner das erste und dritte Ellipsoid auch den in o′ projicirten Aequator-Halbmesser gemein haben, so liegt eine Ellipse, welche diesen Halbmesser und die Linie O𝔐 zu Halbaxen hat, auf beiden Ellipsoiden zugleich, und aus denselben Gründen gehört eine zweite Ellipse, deren Halbaxen in o′k′ und o′ projicirt sind, den beiden Ellipsoiden gemeinsam an; folglich schneiden sich diese Ellipsoide in zwei Ellipsen 𝔐..𝔑 und K..L. — Zieht man nun m′ω′n′ || m′n′ und betrachtet m′n′ als V-Projection für einen elliptischen Schnitt M..N des zweiten Ellipsoids, so sind, wie sich leicht zeigen läßt, die Ellipsen 𝔐..𝔑 und M..N ähnlich und überdieß ihre Axen parallel; daher müssen auch ihre Projectionen auf einerlei Grundebene ähnlich sein; wenn also die Projection der einen ein Kreis ist, wird auch die Projection der andern ein Kreis, und zugleich projiciren sich alle mit 𝔐..𝔑 parallelen Schnitte sowohl des ersten als des zweiten Ellipsoids nach Kreisen.

Die H-Projection der Ellipse 𝔐..𝔑 wird ein Kreis, wenn die H-Projection der Halbaxe O𝔐 die Länge der zweiten Axe (welche sich auf die HE in wahrer Größe projicirt) erhält. Die Länge dieser zweiten Axe ist o′v′. Beschreibt man daher über m′o′ einen Halbkreis, trägt von m′ aus die Sehne m′h′ = o′v′ ein und legt die HE parallel zu dieser Sehne, so sind die H-Projectionen aller Schnitte, welche in

den beiden gegebenen Ellipsoiden durch zu m'n' parallele und zur VE senkrechte Hülfsebenen hervorgebracht werden, Kreise, und mittels eines solchen Ebenensystems ist nun die Projection des Schnitts beider Ellipsoide leicht zu finden.

Hätte man den Halbkreis über m'o' auf der entgegengesetzten Seite dieser Linie errichtet, so würde die HE eine andere Lage erhalten, aber wieder die nämlichen Vortheile gewährt haben. Ferner überzeugt man sich leicht, daß statt der vorigen (mit der Ellipse M..N parallelen) Hülfsebenen auch eben so gut ein mit der Ellipse K..L paralleles System in Anwendung gebracht werden kann, und daß es hier abermals zwei verschiedene Lagen einer HE gibt, auf welche sich die Schnitte des genannten Systems kreisförmig projiciren. Für die Lage des Grundschnitts hat man also die Auswahl unter vier verschiedenen Richtungen.

Ist GG (|| m'h') der Grundschnitt und eine beliebige Parallele uo.. die H-Projection der ersten Drehungsaxe, so erhält man für die H-Projection der zweiten Drehungsaxe eine neue Parallele rω.., welche von uo.. um δ absteht. Die V-Spur für eine Hülfsebene der früher erwähnten Art sei p'y' (|| m'n'); dann sind p'q', x'y' die V-Projectionen der Ellipsen, nach denen die gegebenen Flächen geschnitten werden, und pq, xy die Durchmesser der zugehörigen (kreisförmigen) H-Projectionen, folglich (a, a'), (b, b') zwei Punkte der gesuchten Durchschnittscurve. *

Zusatz. Es ist klar, daß auch für den Fall, wo die Drehungsaxen zweier Ellipsoide sich schneiden, die obige Auflösung brauchbar wäre und also der in Nr. 445 gelehrten substituirt werden könnte; doch ist hier die letztere, als die einfachere, vorzuziehen.

(Ebene Schnitte zwischen zwei Flächen zweiter Ordnung.)

448. Wenn eine Fläche zweiter Ordnung F und irgend eine Cylinderfläche sich schneiden, so werden alle die Strecken, welche auf den Mantellinien des Cylinders durch die Fläche F begrenzt sind, von einer Diametralebene der F halbirt. Die Schnittcurve besteht demnach aus

* Aendert man die obige Aufgabe dahin ab, daß statt zweier Ellipsoide irgend zwei Drehungsflächen zweiter Ordnung gegeben sind, so ist nicht schwer zu ermitteln, für welche Fälle die obige Art der Auflösung anwendbar bleibt.

zwei Theilen, welche gegen diese Diametralebene nach dem ihr conjugirten Durchmesser symmetrisch liegen (vgl. Nr. 268, †). Diese Theile bilden getrennte Aeste, wenn der Cylinder die Fläche F durchdringt. Ist in diesem Falle der eine Ast eben, so muß nach Obigem auch der andere eben sein; oder: Wird ein ebener Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung als Leitlinie einer Cylinderfläche genommen, so schneidet diese die erstere Fläche in noch einer Curve, welche gleichfalls eben ist.

449. Durch einen im Raum gegebenen Punkt P sei eine Gerade G gelegt, welche zwei gegebene Ebenen E, E′ in den Punkten A, A′ schneidet. Der Punkt Q sei auf der G so bestimmt, daß er mit P harmonisch gegen A und A′ liegt. Wird nun durch Q und die Schnittlinie der gegebenen Ebenen eine neue Ebene E_0 gelegt, und schneidet irgend eine zweite durch P gezogene Gerade 𝔊 die Ebenen E, E′, E_0 der Reihe nach in den Punkten 𝔄, 𝔄′, 𝔔, so liegt 𝔔 mit P harmonisch gegen 𝔄 und 𝔄′; denn denkt man sich durch die Schnittlinie der drei Ebenen und den Punkt P eine vierte Ebene gelegt, so werden die vier Ebenen von der Ebene [G𝔊] nach vier Geraden geschnitten, welche, da sie einen Punkt mit den vier harmonischen Punkten A, A′, P, Q verbinden, selbst harmonisch liegen, mithin jede in ihrer Ebene gezogene Gerade harmonisch schneiden (S. 241, *). *

Hieraus folgt umgekehrt: 1) Wenn zwei gegebene Ebenen E, E′ von einer um den festen Punkt P sich drehenden Geraden in A, A′ geschnitten werden, so ist der geometrische Ort des Punkts Q, welcher auf der Geraden harmonisch mit P gegen A und A′ liegt, eine Ebene E_0, welche durch die Schnittlinie der E und E′ geht (oder, falls diese beiden Ebenen parallel sind, ihnen parallel liegt, wobei man die gemeinsame

---

* Der obige Satz ist nur ein besonderer Fall des nachstehenden allgemeineren Satzes. Sind durch eine Gerade X vier Ebenen so gelegt, daß sie eine andere Gerade G in vier harmonischen Punkten schneiden, so werden die Ebenen (welche dann selbst „harmonisch liegend" heißen) von jeder beliebigen Geraden G′ in harmonischen Punkten geschnitten. Dieß erhellt schon aus Obigem, falls G′ mit G in einer Ebene liegt. Andernfalls ergibt sich der Beweis, indem man auf X zwei Punkte c, c′ beliebig wählt, die vier gegebenen Ebenen durch die Ebenen [cG], [c′G′] schneidet, und beachtet, daß von den acht Schnittlinien je zwei auf der Geraden zusammentreffen müssen, in welcher die Ebenen [cG], [c′G′] sich begegnen.

Schnittlinie aller drei Ebenen in unendlicher Entfernung zu denken hat). 2) Wenn zwei gegebene Ebenen E, E_0 von einer um P sich drehenden Geraden in A, Q geschnitten werden, so ist der geometrische Ort des Punkts A′, welcher mit A harmonisch gegen Q und P liegt, eine Ebene E′, welche durch die Schnittlinie der E und E_0 geht.

Die Ebene E schneide eine Fläche zweiter Ordnung F nach der Curve C; P sei die Spitze eines Kegels, welcher die C zur Leitenden hat, E_0 die Polarebene für P in Bezug auf F. Da nun, wenn eine Mantellinie des Kegels die Ebene E_0 in Q, die Fläche F in dem auf C liegenden Punkte A und außerdem noch in A′ schneidet, die Punkte A, A′ harmonisch gegen die Punkte Q, P liegen (Nr. 376), so hat der Kegel außer der Curve C noch eine zweite ebene Curve C′ mit der Fläche F gemein. Die Ebenen der Curven C, C′ und die Polarebene der Kegelspitze in Bezug auf die Fläche F schneiden sich in einer Geraden oder sind sämmtlich parallel.

Anmerk. So wie in gewissen Fällen eine Linie zweiter Ordnung durch zwei in einer Ebene liegende Gerade ersetzt werden kann (Nr. 278, Anm.), so können zwei Ebenen eine Fläche zweiter Ordnung vertreten. (Ein hyperbolischer Cylinder verwandelt sich in zwei sich schneidende Ebenen, ein parabolischer Cylinder in zwei parallele Ebenen, wenn man die leitende Hyperbel in ihre Asymptoten, die leitende Parabel in zwei parallele Gerade übergehen läßt.) Die erste Umkehrung des zu Anfang der Nummer erwiesenen Satzes fällt dann mit dem ersten der Sätze in Nr. 376 zusammen, insofern man die Ebenen E, E′ an die Stelle einer Fläche zweiter Ordnung setzt.

450. Durch zwei ebene Curven auf einer Fläche zweiter Ordnung lassen sich immer zwei Kegel legen.

Für den Fall, daß die Ebenen der Curven parallel sind, ist dieser Satz schon früher (Nr. 298. 302) erwiesen. Schneiden sich aber die Ebenen der auf der Fläche zweiter Ordnung F liegenden Curven C, C′ in der Geraden X, so denke man sich zwei Kegel, welche der Fläche F nach den Curven C, C′ berührend umschrieben sind, und lege durch die Verbindungslinie Y der beiden Kegelspitzen eine Ebene H, welche die C in den Punkten A, B, die C′ in den Punkten A′, B′, die X im Punkte D schneidet. Da in Beziehung auf die Schnittcurve der H und F die Gerade Y die Polare des Punkts D ist (Nr. 278, 2), so liegt sowohl der Schnittpunkt S_1 der Geraden AA′, BB′ als auch der Schnittpunkt S_2 der Geraden AB′, A′B auf Y (Nr. 278, 3); also gehen

bezüglich der Fläche F die Polarebenen der Punkte S_1, S_2 durch X (Nr. 376). Betrachtet man die X zunächst als Schnittlinie der Polarebene für S_1 und der Ebene C, so folgt aus Nr. 449, daß die Curve C″, in welcher ein durch die Leitlinie C und die Spitze S_1 bestimmter Kegel die Fläche F zum zweitenmale schneidet, in einer durch X gehenden Ebene liegt; der Curve C″ gehören aber die Punkte A′, B′ an; folglich fällt die Ebene der C″ mit der Ebene der C′ zusammen, oder die Curven C″ und C′ selbst sind identisch. Ebenso erhellt, daß der Kegel, welcher C zur Leitenden und S_2 zur Spitze hat, durch C′ gehen muß.

Zwei Gerade wie X und Y (d. h. zwei Gerade welche gegen eine Fläche zweiter Ordnung F so liegen, daß die Polarebenen für alle Punkte der einen durch die andere gehen, — vgl. Nr. 376) können wechselseitige Polarlinien bezüglich der Fläche F genannt werden.

† Der oben erwiesene Satz führt noch auf zwei Sätze, welche zur Ergänzung Dessen dienen, was in Nr. 376 über die Polarität der Flächen zweiter Ordnung vorkam. Nämlich:

Legt man durch eine gegebene Gerade X beliebig zwei Ebenen, welche eine gegebene Fläche zweiter Ordnung F schneiden, und durch die beiden Schnittcurven zwei Kegel, so fallen die Spitzen dieser Kegel immer auf eine bestimmte Gerade Y, nämlich auf die Gerade, welche bezüglich der Fläche F als Polarlinie zu X gehört.

Gehen durch einen gegebenen Punkt P beliebig zwei Ebenen, welche eine gegebene Fläche zweiter Ordnung F schneiden, so fallen die Spitzen der durch die beiden Schnittcurven gehenden Kegel immer in diejenige Ebene, welche bezüglich der Fläche F die Polarebene des Punktes P ist.

Der erste Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Vorangegangenen. Den zweiten Satz erhält man aus dem ersten, indem man beachtet, daß, wenn drei Gerade X_1, X_2, X_3 durch einen Punkt P gehen, die zu ihnen gehörigen Porlarlinien Y_1, Y_2, Y_3 in einer Ebene (der Polarebene für P) liegen müssen.

451. In Nr. 448—450 ist stillschweigend angenommen, die Fläche F sei weder ein Kegel noch ein Cylinder. Es bleibt daher zu prüfen, ob die dort ausgesprochenen Sätze auch für diese beiden vorläufig übergangenen Fälle gelten, wobei auf die Polaritätseigenschaften der Kegel- und Cylinderflächen zurückzukommen ist.

Der geometrische Ort einer Geraden, welche eine gegebene Kegel- oder Cylinderfläche berührt und durch einen außerhalb der Fläche gegebenen Punkt P geht, wird durch zwei Berührungsebenen gebildet. Dieses Ebenenpaar tritt daher an die Stelle des aus P einer Fläche zu umschreibenden Kegels; die Berührungscurve wird durch zwei Mantellinien der gegebenen Fläche vertreten.

Soll einer Kegel- oder Cylinderfläche zweiter Ordnung ein Kegel so umschrieben werden, daß er die gegebene Fläche längs einer ebenen Curve berührt, so fällt der verlangte Kegel mit der gegebenen Fläche selbst zusammen.

Die Polarebene eines Punkts P in Bezug auf eine Kegelfläche zweiter Ordnung ist diejenige Diametralebene, welche dem durch P gehenden Durchmesser zugeordnet ist. (Vgl. Nr. 280.) Hieraus folgt, daß alle Punkte des nämlichen Durchmessers einerlei Polarebene haben, und daß einer Diametralebene, als Polarebene betrachtet, unendlich viele Pole entsprechen, nämlich alle Punkte des ihr zugeordneten Durchmessers.

Schneidet eine als Polarebene angenommene Ebene die Kegelfläche in einer Curve, so ist der zugehörige Pol die Spitze des gegebenen Kegels (da dieser mit dem nach der Schnittcurve umschriebenen Kegel zusammenfällt). Folglich ist die Polarebene der Kegelspitze unbestimmt.

Betrachtet man einen Durchmesser der Kegelfläche als die eine von zwei wechselseitigen Polarlinien, so kann für die andere jede Gerade genommen werden, welche in der dem Durchmesser zugeordneten Diametralebene liegt.

In Beziehung auf eine Cylinderfläche zweiter Ordnung ist die Polarebene eines gegebenen Punkts P parallel zu den Mantellinien; man findet sie, wenn man die Fläche mittels einer durch P gehenden Ebene nach einer Curve schneidet und bezüglich dieser Curve die Polare für P sucht; diese Polare liegt in der Polarebene. Als Pol kann aber zu der gefundenen Polarebene außer P noch jeder Punkt der Geraden gehören, die man durch P parallel zu den Mantellinien legt.

Der Pol jeder Ebene, welche die Cylinderfläche in einer Curve schneidet, ist der unendlich ferne Punkt, nach welchem die Mantellinien gerichtet sind.

Wird parallel zu den Mantellinien des Cylinders eine Gerade angenommen und in der ihren sämmtlichen Punkten gemeinschaftlichen Polarebene beliebig eine zweite Gerade gezogen, so können beide Gerade als wechselseitige Polarlinien angenommen werden.

Daß die Beweisführung über die Sätze in Nr. 448 und Nr. 449 noch paßt, wenn F eine Kegel- oder Cylinderfläche bedeutet, ist leicht zu ersehen.

Hat F auch in Nr. 450 diese neue Bedeutung, so wird eine der im Satz genannten Kegelflächen durch die gegebene Fläche F selbst vertreten. Von der Existenz des zweiten Kegels überzeugt man sich durch eine unwesentliche Modification des dort gegebenen Beweises. Die Gerade Y nämlich ergibt sich jetzt als derjenige Durchmesser der gegebenen Kegelfläche F, welcher der durch X gelegten Diametralebene zugeordnet ist (oder als die mit den Mantellinien der Cylinderfläche F parallele Ge-

rade, welche die Pole für eine durch X parallel zu den Mantellinien gelegte Ebene enthält); der Schnitt einer durch Y beliebig geführten Ebene H und der Fläche F besteht nunmehr aus zwei Geraden, was aber (Nr. 278, Anm.) ohne Einfluß auf den weiteren Verlauf des Beweises ist.

452. Haben zwei Flächen zweiter Ordnung F_1, F_2 eine ebene Curve C gemein, während sie sich noch nach einem zweiten Curvenast C′ schneiden, so ist auch dieser andere Ast eben.

Legt man nämlich durch drei Punkte A, B, C der Curve C′ eine Ebene, so schneidet diese die Flächen F_1, F_2 nach den Curven C_1, C_2. Zwei Kegel K_1, K_2, von denen der eine durch C und C_1, der andere durch C und C_2 gelegt ist (Nr. 450), schneiden sich in einer ebenen Curve C_0 (Nr. 449. 451), welche mit jeder der Curven C_1, C_2 die drei Punkte A, B, C gemein hat, mithin in der gemeinschaftlichen Ebene dieser beiden Curven liegt. Da aber diese Ebene weder den einen noch den andern der Kegel K_1, K_2 in zwei verschiedenen Curven schneiden kann, so sind die drei Curven C_0, C_1, C_2 identisch, und also fällt auch die Curve C′ mit ihnen zusammen.

453. Wenn die Curve, in welcher zwei Flächen zweiter Ordnung zusammentreffen, sich selbst durchschneidet, so findet in diesem Doppelpunkt zugleich Berührung zwischen den Flächen statt; denn zieht man durch den Doppelpunkt der Curve an jeden der sich kreuzenden Bögen eine Tangente, so ist die von beiden Tangenten bestimmte Ebene eine gemeinschaftliche Berührungsebene beider Flächen.

Hat der Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung zwei doppelte Punkte A, B, so berühren sich die Flächen in beiden Punkten. In diesem Falle zerlegt sich der Durchschnitt in zwei ebene Curven. Um dieß zu erweisen, nehme man auf dem einen der in A sich kreuzenden Bögen einen Punkt D, auf dem andern einen Punkt E, und denke sich die Ebenen ABD, ABE. Die erstere Ebene schneidet die gegebenen Flächen in den Curven C_1, C_2, welche beide durch die Punkte A, B, D gehen und zugleich in A und B sich berühren, also (da an jeder Berührungsstelle die Curven zwei unmittelbare Nachbarpunkte gemein haben) eigentlich in fünf Punkten übereinstimmen, folglich (Nr. 279, 1) iden-

tisch sind. Ebenso zeigt sich, daß die Ebene ABE die beiden gegebenen Flächen nach einer und derselben Curve schneidet.* (Vgl. Nr. 447.)

454. Wenn zwei Kegelflächen zweiter Ordnung zwei gemeinschaftliche Berührungsebenen haben, so schneiden sie sich in ebenen Curven.

Dieser Satz liegt schon im vorigen. Denn in jeder der Berührungsebenen schneidet eine Mantellinie der einen Fläche eine Mantellinie der andern, und jeder dieser Schnittpunkte ist ein den beiden Flächen gemeinsamer Berührungspunkt. Hieraus folgt (wie vorhin) die Existenz einer ebenen Schnittcurve, und diese führt (Nr. 452) auf einen zweiten ebenen Schnitt.

† Man sieht, daß der Satz ungeändert bleibt, wenn man eine der beiden Kegelflächen oder jede durch eine Cylinderfläche zweiter Ordnung ersetzt.

†† Die zwei Punkte, in denen sich die gegebenen Flächen berühren, liegen auf der Schnittlinie der beiden Ebenen, von denen die eine durch die Berührungsmantellinien der ersten Fläche, die andere durch die Berührungsmantellinien der zweiten Fläche bestimmt wird. Zwei Kegel können aber so liegen, daß diese Ebenen parallel sind, also die Berührungspunkte der Flächen in unendlicher Entfernung verschwinden. Führt man in diesem Falle eine Ebene E parallel zu den ebengenannten durch einen auf beiden Kegelflächen liegenden Punkt A, so schneidet diese jeden Kegel nach einer Curve mit zwei unendlich fernen Punkten, also nach einer Hyperbel; jede dieser Hyperbeln hat zu Asymptoten die Schnittlinien der Ebene E mit den beiden Berührungsebenen. Da aber eine Hyperbel durch ihre Asymptoten und einen Peripheriepunkt A völlig bestimmt ist (Nr. 201, Anm.; Nr. 228), so schneidet die Ebene E beide Kegel nach einer und derselben Curve.

Zusatz. Aus dem Satze dieser Nummer, in Anwendung auf zwei Cylinderflächen, folgt:

Ist in jeder der Grundebenen eine Ellipse oder in jeder eine Hyperbel so gegeben, daß beide Curven auf der Zeichnungsebene zwei gemeinschaftliche, zum Grundschnitt senkrechte

---

* An eine Umkehrung des obigen Satzes darf nicht gedacht werden; zwei Flächen zweiter Ordnung können sich in zwei ebenen Aesten ohne Doppelpunkt oder auch in nur einer ebenen Curve schneiden.

Tangenten zulassen, so können diese Curven immer als die Projectionen zweier Ellipsen oder Hyperbeln betrachtet werden. Denn jede dieser Tangenten stellt auf der Zeichnungsebene die Spuren einer Ebene vor, welche die beiden projicirenden Cylinder der im Raume gedachten Curve berührt.

455. Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung in drei gemeinsamen Punkten gemeinschaftliche Berührungsebenen haben, so berühren sie sich noch in unendlich vielen andern Punkten, nämlich längs einer Curve, welche in der durch jene drei Punkte bestimmten Ebene liegt.

Die letztgenannte Ebene muß nämlich die beiden gegebenen Flächen in einer Curve schneiden, da ihre Schnitte mit den einzelnen Flächen drei Punkte sammt den zugehörigen Tangenten, also eigentlich sechs (paarweise zusammenfallende) Punkte gemein haben, mithin identisch sind. Soll der einen Fläche längs dieser gemeinsamen Curve ein Berührungskegel umschrieben werden, so bestimmt sich dessen Spitze als Schnittpunkt der drei vorausgesetzten Berührungsebenen. Weil aber diese Ebenen zugleich die zweite Fläche in Punkten der gemeinsamen Curve berühren, so ist jener Kegel auch der zweiten Fläche längs der Curve umschrieben, oder die beiden gegebenen Flächen haben in allen Punkten der Curve gemeinschaftliche Berührungsebenen.

Schnitt zweier Mäntel einer und derselben Fläche.

456. Wenn eine krumme Fläche sich selbst durchschneidet, so kann man die Schnittcurve durch die nämlichen Mittel erhalten, welche bisher für die Schnitte zweier verschiedenen Flächen benützt wurden. Man behandelt die beiden zum Durchschnitt kommenden Flächenmäntel wie zwei gesonderte Flächen.

457. Aufg. Der Mittelpunkt einer Kugel von constantem Halbmesser bewegt sich in einer Kreis-Evolvente. Man soll die Umhüllungsfläche dieser Kugel darstellen und den Selbstdurchschnitt der Fläche zeichnen.

Auflösung.

Fig. 144. *α*) Es sei $Q_0 a R_0$.. ein in der HE liegender Kreis und aoa... seine Evolvente. Die Umhüllungsfläche der mit ihrem Mittelpunkte in

der Evolvente fortschreitenden Kugel ist eine Röhrenfläche (Nr. 306) und ihre Charakteristik ein größter Kreis, welcher sich auf die HE als eine Normale der leitenden Evolvente projicirt, weil seine Ebene normal auf der Evolvente steht. Die H-Projection für eine Lage desselben sei QR (wobei oQ = oR = dem Kugelhalbmesser). Man kann diesen Kreis als die Erzeugende der Röhrenfläche betrachten und die Kugel außer Acht lassen. Da jede Normale der Evolvente den Kreis $Q_0 a R_0 ..$ berührt (Nr. 213), so wird die (erweiterte) h-projicirende Ebene des Erzeugungskreises in jeder Lage einen verticalen Cylinder C berühren, dessen H-Spur der Kreis $Q_0 a R_0 ..$ ist, und das Entstehungsgesetz der Röhrenfläche läßt sich also auch dahin aussprechen, daß sie durch einen Kreis erzeugt wird, dessen erweiterte Ebene sich, ohne zu gleiten, um einen Drehungscylinder wälzt, oder (was im Wesentlichen dasselbe ist) sich um einen solchen Cylinder aufwickelt. Dabei wird nicht nur der Mittelpunkt o des Kreises, sondern auch jeder Punkt der Peripherie eine Evolvente beschreiben; alle diese Evolventen liegen in parallelen Ebenen, welche den Cylinder C senkrecht zu seinen Mantellinien schneiden, und gehören gleichen Kreisen an; ihre Projectionen auf die angenommene HE sind also unter sich congruent und unterscheiden sich nur hinsichtlich ihres Ursprungs.

Die beiden in die HE fallenden Punkte Q, R des Erzeugungskreises beschreiben zwei Evolventen, welche die H-Spur (und zugleich den horizontalen Umriß) der Fläche vorstellen und in den Punkten Q_0, R_0 des Kreises $Q_0 a R_0 ..$ entspringen. Aus dem Umstande, daß die eine dieser Evolventen die andere durchschneidet, läßt sich schon schließen, daß die Röhrenfläche sich selbst durchschneiden müsse.

Während der Bewegung des erzeugenden Kreises (von der Lage QOR aus beginnend) können sich zwei unendlich nahe Lagen des Durchmessers QR so lange nicht schneiden, als der Punkt R den Punkt R_0 nicht erreicht hat; vielmehr schneiden sich erst die Verlängerungen dieser Lagen, und zwar auf dem Kreise $Q_0 a R_0 ..$, welcher die Umhüllungslinie aller (verlängerten) Lagen abgibt. Ist aber QR in die Lage $Q_0 R_0$ gekommen, so wird sie von der folgenden (unendlich nahen) Lage in einem Punkte geschnitten, welcher nicht auf ihre Verlängerung, sondern zwischen ihre Grenzpunkte fällt und dem Kreisbogen $R_0 a Q_0$ angehört. Dieß wiederholt sich so lange, bis die QR in die Lage $Q_0 R_0$ tritt, von wo aus wieder erst die Verlängerungen zum Durchschnitte kommen. So

wie nun die aufeinanderfolgenden H-Projectionen des Erzeugungskreises sich in Punkten schneiden, deren Gesammtheit den Bogen $R_0 a Q_0$ bildet, so müssen die Lagen des Kreises selbst sich in ihrer stetigen Aufeinanderfolge paarweise schneiden und dadurch eine Curve C zum Vorschein bringen, welche sich in jenen Bogen $R_0 a Q_0$ projicirt, und zwar so, daß jeder Punkt des Bogens die Projection zweier Punkte von C ist. Diese Curve bildet eine Rückkehrcurve für die Röhrenfläche (Nr. 305, $_*$) und kann nichts anders als der um den Cylinder C gebogene Erzeugungskreis sein. Die unendlich vielen, durch die verschiedenen Punkte des Erzeugungskreises beschriebenen Evolventen haben sämmtlich ihre Rückkehrpunkte auf dieser Rückkehrcurve. In derselben stoßen zwei Mäntel der Röhrenfläche zusammen, so daß von jeder der ebengenannten Evolventen der eine Zweig dem einen Mantel, der andere Zweig dem andern Mantel angehört. Beide Mäntel berühren sich in allen Punkten der Rückkehrcurve; denn bestimmt man die Berührungsebene für einen solchen Punkt mittels der durch ihn gehenden Tangenten an der Rückkehrcurve und an der in ihm entspringenden Evolvente, so berührt die letztere Tangente beide Mäntel (weil die beiden Evolventenzweige sich selbst im Ursprunge berühren) und ebenso die erstere (weil die Rückkehrcurve beiden Mänteln zugleich zugehört); folglich ist die Ebene beider Tangenten ebenfalls beiden Mänteln als Berührungsebene gemeinschaftlich.

β) Um den Selbstdurchschnitt der Röhrenfläche zu erhalten, denke man sie durch eine Reihe horizontaler Ebenen geschnitten, und suche die Punkte, welche je zwei in eine solche Ebene fallende Evolventen gemein haben. Macht man den Anfang mit der horizontalen Grundebene, so zeigt sich, daß die in Q_0 entspringende Evolvente sich selbst im Punkte $\mathfrak{Q}$ schneidet und von der in R_0 entspringenden Evolvente in den Punkten $\mathfrak{S}$, S, Σ geschnitten wird; zugleich schneidet die letztere sich selbst in $\mathfrak{R}$; die fünf Punkte $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, S, Σ gehören also dem Selbstdurchschnitt an. In der Umklappung QV_1R.. des Erzeugungskreises sind die Endpunkte V_1, W_1 einer beliebigen mit QR parallelen Sehne die Umklappungen zweier Punkte V, W, welche nach Wiederaufrichtung des Kreises gleiche Höhe über der HE einnehmen, folglich zwei Evolventen beschreiben, welche in einerlei Ebene liegen und sich schneiden; die H-Projectionen dieser Evolventen gehen durch die Projectionen v, w der Punkte V, W, und ihre Ursprünge v_0, w_0 erhält man, wenn man $\text{arc } av_0 = \text{arc } aw_0 = ov = ow$ macht; die nämlichen H-Projectionen

passen zugleich noch für zwei andere Evolventen, welche von den in $V_{,,}$ und $W_{,,}$ umgeklappten Punkten beschrieben werden; nach Zeichnung dieser Evolventen geben ihre gegenseitigen Schnitte die Punkte v, w, x, x, ξ, deren jeder die H-Projection von zwei Punkten des gesuchten Selbstdurchschnitts der Fläche ist. Indem man die Lage der mit QR parallelen Sehne VW ändert, findet man noch beliebig viele Punkte. — Die beiden in o projicirten und in O_1, $O_{,,}$ umgeklappten Punkte (der höchste und der tiefste) des Erzeugungskreises beschreiben zwei Evolventen, deren gemeinschaftliche Projection oaa... ist; der Punkt a, wo die beiden Zweige der letztern sich begegnen, ist also ebenfalls die Projection zweier Punkte des gesuchten Durchschnitts.

Die beiden Zweige der Evolvente oaa... liegen in Beziehung auf den Durchmesser am.. des Kreises $Q_0 a R_0$.. symmetrisch und schneiden sich daher auf der Richtung dieses (verlängerten) Durchmessers. Da ferner (in welcher Entfernung von QR man auch die parallele Sehne $V_1 W_1$ annehmen mag, und selbst wenn man sie mit QR zusammenfallen läßt) immer ov = ow, und also arc av_0 = arc aw_0, so liegen auch die beiden Evolventen vv_0v..., ww_0w... symmetrisch in Beziehung auf die Gerade am...; die Punkte x, x, ξ, in denen die eine die andere schneidet, liegen demnach ebenfalls auf der Richtung von am. Hieraus folgt, daß zwei Zweige des Selbstdurchschnitts sich als gerade Linien aS, SΣ projiciren, deren gemeinschaftliche Richtung durch den Mittelpunkt des Kreises $Q_0 a R_0$.. und den Ursprung der leitenden Evolvente geht.

So wie a auf der Verlängerung des Halbmessers am, so liegt 𝔔 auf der Verlängerung von Q_0m, ℜ auf R_0m..., v auf v_0m..., w auf w_0m...; wegen der Congruenz aller Evolventen des Kreises $Q_0 a R_0$.. ist $a\mathfrak{a} = Q_0\mathfrak{Q} = R_0\mathfrak{R} = v_0\mathfrak{v} = w_0\mathfrak{w}$, daher auch

$$m\mathfrak{a} = m\mathfrak{Q} = m\mathfrak{R} = m\mathfrak{v} = m\mathfrak{w};$$

folglich liegen die Punkte 𝔞, 𝔔, ℜ, 𝔳, 𝔴 um m im Kreise, oder ein dritter Zweig des Durchschnitts projicirt sich als ein Kreisbogen, welcher mit dem Bogen $Q_0 a R_0$ concentrisch liegt und den gleichen Centriwinkel umspannt (W. 𝔔mℜ = W. $Q_0 m R_0$).

Wird die Evolvente oaa..., und mit ihr die Röhrenfläche selbst, nach beiden Seiten weiter fortgesetzt als sie in Fig. 144 gezeichnet ist, so ergeben sich wiederholte Durchschnitte; jeder solche neue Durchschnitt bildet wieder zwei Zweige, von denen der eine sich als Gerade (in der

Richtung von ma..) und der andere als Kreisbogen (concentrisch mit $Q_0 a R_0$ und vom nämlichen Centriwinkel) projicirt.

γ) Auf einer beliebig gewählten VE sind die Projectionen für die Rückkehrcurve und die verschiedenen Zweige des Selbstschnitts leicht auszuführen, da die H-Distanzen der einzelnen Curvenpunkte aus der Umklappung QV_1R.. des Erzeugungskreises zu entnehmen sind; es ist nämlich $O_1 o$ die H-Distanz der vier Punkte, welche paarweise in a und a projicirt sind, und $V_1 v$ die H-Distanz der 14 Punkte, welche paarweise in v_0, w_0, x, r, ξ, v, w projicirt sind (und von denen die zwei ersten Paare zur Rückkehrcurve, die übrigen zum Selbstschnitt gehören). — Am besten thut man, die genannten Curven auf eine zu ma senkrechte VE und auf eine SE zu projiciren.

458. Die entwickelbare Schraubenfläche, unbegrenzt gedacht, hat als H-Spur eine endlose Kreisevolvente. Das mehrmalige Begegnen der beiden Evolventenzweige deutet auf einen Selbstdurchschnitt der Fläche.

Fig. 102. Man denke sich die Schraubenlinie, welche die Rückkehrcurve der Fläche abgibt, vorläufig nicht weiter nach oben fortgesetzt als in Fig. 102, wohl aber nach unten (unter die HE hinab) durch einen Umgang. Dadurch erweitert sich die Schraubenfläche selbst so, daß XWPAZy ihre Spur wird (vgl. Nr. 312, Anm.), und der Punkt Z, welchen die beiden Zweige AKX und Avy gemein haben, gehört zum Selbstschnitt der Fläche. — Da kein Punkt der Schraubenlinie (Abc.., a′b′c′..) vor einem andern etwas voraus hat, vielmehr die Schraubenlinie an allen Punkten immer von derselben Natur ist, so ist klar, daß bei einem parallelen Verrücken der HE immer wieder eine Evolvente als H-Spur der Fläche zum Vorschein kommen müßte, oder daß alle zur HE parallelen Schnitte Evolventen sind, deren H-Projectionen der Spur XPAvy congruent sein werden, aber in immer andern Punkten des Kreises Abc.. entspringen. Der Schnitt beider Zweige einer solchen Evolvente gehört ebenso wie der Punkt Z dem Selbstdurchschnitt der Fläche an. Läßt man nun den Kreis Abc.. sammt der mit ihm fest verbundenen Evolvente sich in sich selber drehen, so fällt die letztere nach und nach mit den Projectionen aller möglichen horizontalen Flächenschnitte zusammen; der Punkt Z beschreibt dabei um o einen Kreis, welcher offenbar die H-Projection für den Selbstdurchschnitt der Fläche vorstellt; eine auf der

Fläche liegende Curve aber, welche sich als Kreis h=projicirt, ist (nach Nr. 313) eine Schraubenlinie von gleicher Axe und Ganghöhe mit der Rückkehrcurve.

Bei noch weiterer Fortsetzung der Schraubenfläche begegnen sich die beiden Zweige jeder durch einen horizontalen Schnitt erhaltenen Evolvente in noch mehreren Punkten, und wenn man wieder, wie vorhin, die (über X und y endlos fortgesetzte) Evolvente A... nach und nach die H=Projectionen aller horizontalen Schnitte durchlaufen läßt, so beschreibt außer dem Punkte Z auch jeder andere Doppelpunkt einen Kreis um o. Hieraus wird klar, daß der Selbstdurchschnitt der unbegrenzten Schraubenfläche aus unendlich vielen Schraubenlinien besteht, welche unter sich und mit der Rückkehrcurve concentrisch liegen und die Ganghöhe der letztern haben.

459. Unter diejenigen Flächen, welche sich selbst schneiden, gehört auch die windschiefe Schraubenfläche, sobald sie vollständig gedacht wird. Indem man, um die Schnittcurve zu finden, den Flächenmantel über die in Fig. 110 angenommene Grenze hinaus erweitert, bietet sich zugleich Gelegenheit, die Fläche selbst noch etwas näher kennen zu lernen.

α) Man denke sich die Linie, welche das in Nr. 331 betrachtete Stück einer Schraubenfläche erzeugte, vorerst einseitig verlängert, nämlich von der Axe aus abwärts (gegen die HE zu); dadurch erweitert sich die Schraubenfläche in der Art, daß ihr Mantel, nach einer Seite in's Unendliche gedehnt, in vielen Windungen um sich selbst läuft, von denen jede alle vorhergehenden einschließt. Von dieser erweiterten Fläche soll die H=Spur gezeichnet werden.

Ist ($a \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots$, $a' \mathfrak{a}' \mathfrak{a}'' \ldots$) die leitende Schraubenlinie und ($o a$, $o' a' z'$) das Dreieck, dessen verlängerte Hypotenuse die Fläche erzeugt, so entspringt die H=Spur in o. Bei der Fortbewegung des Dreiecks schneidet die Hypotenuse die HE in immer andern Punkten P_1, P_2,...; die Entfernungen dieser Punkte von o wachsen offenbar proportional mit den entsprechenden Erhebungen des Punktes Z über die HE, und da diese Erhebungen (nach Nr. 330, c) ihrerseits wieder in Proportion mit den Bögen $a \mathfrak{a}_1$, $a \mathfrak{a}_2$,... stehen, so verhalten sich jene Entfernungen selbst wie die erwähnten Bögen. Die H=Spur der Schraubenfläche wird demnach durch einen Punkt P beschrieben, wenn dieser sich auf einer Fig. 142.

Geraden, welche sich in der HE um o dreht, von o aus so fortbewegt, daß sein Vorwärtsrücken auf der Geraden dem Drehungswinkel der Geraden proportional bleibt. Eine nach diesem Gesetze erzeugte Curve heißt eine archimedische Spirale.

Hiernach läßt sich die H-Spur der Fläche zeichnen, ohne daß man die V-Projectionen der einzelnen Mantellinien nöthig hat. Man bemerke, daß der Punkt (c′, C), wo die leitende Schraubenlinie die HE trifft, der Flächenspur angehören muß, und daß mithin die letztere in C der H-Projection $a a_1 a_2 \ldots$ der Schraubenlinie begegnet. Während also die Linie oa in ihrer Drehung den Winkel aoC durchlaufen hat, ist der Punkt P auf ihr von o aus um die Größe $oC = oa$ vorgerückt. Theilt man demnach den Bogen aC in n gleiche Theile, zieht nach den Theilpunkten Radien oa_1, $oa_2 \ldots$, macht $oP_1 = \frac{1}{n} oa$, $oP_2 = \frac{2}{n} oa, \ldots$, $o'P = \frac{n+1}{n} oa$, $o''P = \frac{n+2}{n} oa, \ldots$, so sind P_1, $P_2, \ldots$, $'P$, $''P, \ldots$ Punkte der gesuchten Spur, welche in ihrer Fortsetzung in unendlich vielen Windungen um den Punkt o läuft.

Dreht man die Linie oa_1 rückwärts gegen oa zu, so muß sich der Punkt P_1 immer mehr dem Punkte o nähern, fällt aber mit diesem erst dann zusammen, wenn oa_1 in oa gefallen ist. Daher ist oa eine Tangente der Spirale.

Fig. 142. β) Verlängert man die Erzeugende der Schraubenfläche auch aufwärts und läßt das Dreieck OAZ sich abwärts bewegen, so setzt sich die H-Spur der Fläche von o aus durch die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2, \ldots$ fort, und bildet einen zweiten Zweig der Spirale, von welchem sich leicht zeigen läßt, daß er dem ersten congruent sein muß.

Rückt man die HE beliebig auf- oder abwärts, so wird man als Schnitt immer dieselbe Spirale erhalten, nur in andern Lagen.

Fig. 110. γ) Bei der nur einseitigen Verlängerung der Mantellinien nach unten muß sich der verticale Umriß der Fläche ebenso in's Unendliche erstrecken wie die Fläche selbst. Der erste in Fig. 110 dargestellte Bogen U^I dieses Umrisses, welcher dort in der Nähe des Punktes a′ abbricht, setzt sich ohne Ende fort, und zwar so, daß die verlängerte z′a′ eine Asymptote desselben ist; denn da die V-Projection jeder Mantellinie eine Tangente des Umrisses ist, deren Berührungspunkt desto entfernter liegt, je größer ihre Neigung gegen o′o″ ist, die z′a′ aber unter allen diesen Tangenten

den größten Winkel gegen o′o″ bildet, so ist sie die **Grenze** aller Tangenten, also die Tangente für den unendlich fernen Punkt, oder eine Asymptote.

Aehnliches gilt von allen übrigen Bögen des Umrisses.

δ) Da in o′o″ auch die V-Projection einer Mantellinie fällt, so muß der vorhin betrachtete Bogen U^I des verticalen Umrisses die o′o″ berühren. Der Berührungspunkt ist in Fig. 110 der Endpunkt der Curve; werden aber die Mantellinien auch **aufwärts** verlängert, so wendet sich jene Curve wieder von o′o″ ab, um einen zweiten Zweig zu bilden, von welchem leicht einzusehen ist, daß er dem ersten Zweig congruent sein und zur Asymptote die V-Projection v′x′ derjenigen Mantellinie haben muß, deren H-Projection in die Verlängerung von AO fällt. Diese Linie v′x′ ist aber zugleich auch eine Asymptote für den auf der entgegengesetzten Seite der o′o″ liegenden unendlichen Bogen U^{II} des verticalen Umrisses. Fig. 110.

In dieser Art überzeugt man sich, daß der vollständige V-Umriß der Schraubenfläche aus unendlich vielen Aesten besteht, welche die o′o″ abwechselnd von der linken und von der rechten Seite her berühren; jeder solche Ast hat zwei Asymptoten; jede von diesen Asymptoten ist aber zweien Aesten gemeinschaftlich, welche nach entgegengesetzten Seiten concav sind; sämmtliche Asymptoten bilden zwei Systeme von Parallelen.

ε) Wird die Erzeugende der Schraubenfläche nach beiden Seiten unbegrenzt angenommen, so muß **sich die Fläche selbst durchschneiden**. Denn so wie die Mantellinie (ao.., a′z′..) der in derselben h-projicirenden Ebene liegenden Mantellinie (vo, v′x′) im Punkte (s′, s) begegnet, so muß auch jede andere Mantellinie eine entsprechende schneiden, welche mit ihr und mit der Axe in einerlei Ebene liegt. Läßt man nun die erweiterte Ebene des Dreiecks OAZ mit allen in ihr liegenden Linien sich nach dem in Nr. 330, c ausgesprochenen Gesetze bewegen, so bleibt sowohl die Linie (ao, a′z′) als die Linie (vo, v′x′) auf der Schraubenfläche, folglich auch ihr Schnittpunkt (s, s′), und dieser Punkt beschreibt also die Curve, welche den Selbstdurchschnitt der Fläche vorstellt; diese Curve ist aber nach Nr. 330, c eine **Schraubenlinie**, welche mit der leitenden Schraubenlinie ($a a_1 a_2$.., a′a′a″..) Axe und Ganghöhe gemein hat. Fig. 142.

Von den in der verticalen Ebene av.. liegenden Mantellinien schneiden sich noch (ao, a″z″) und (vo.., v′x′..) in (r′, r), (ao.., a″z″..)

und (vo, v''x'') in (s'', s), (ao, a'''z''') und (vo.., v''x''..) in (r'', r), u. s. f.; alle diese Punkte aber beschreiben offenbar nur eine und dieselbe Schraubenlinie, weil die (vo, v'x') während ihrer Bewegung nach und nach mit allen den genannten Mantellinien zusammenfällt, und also der Punkt (s, s'), welcher von (o, x') immer einerlei Entfernung s'x' behält, nach und nach in die Lagen (r, r'), (s, s''), (r, r''),... kommen muß.*

Dagegen schneidet die (ao.., a'z'..) alle mit (vo, v'x') parallelen Mantellinien in Punkten, denen verschiedene Schraubenlinien entsprechen; woraus man sieht, daß die endlos erweiterte Schraubenfläche sich in unendlich vielen Schraubenlinien durchschneidet, welche aber sämmtlich in der Ganghöhe und der Lage der Axe übereinstimmen.

Will man eine solche Schraubenlinie, etwa die innerste, zeichnen, so projicirt man beliebig oft zwei Mantellinien, welche eine gemeinschaftliche H-Projection haben, bemerkt den Schnittpunkt für jedes Paar, und verbindet diese Schnittpunkte. Auf diese Art ist die Fig. 143 hergestellt, wobei man, zu leichterer Uebersicht, den h-projicirenden Cylinder der leitenden Schraubenlinie als Grenze für die Schraubenfläche angenommen hat.

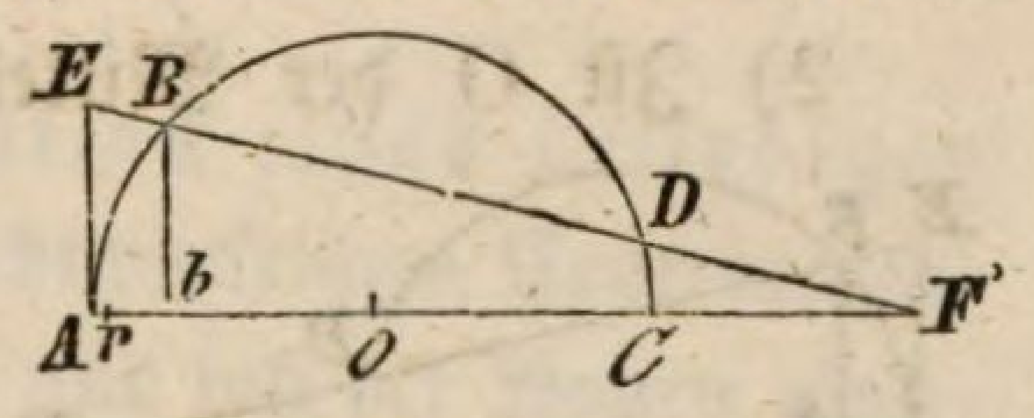
* Die Linie, welche die Schraubenfläche beschreibt, schneidet also eine Schraubenlinie zweimal und begegnet zugleich der Axe dieser Schraubenlinie; hierin ist abermals eine neue Erzeugungsart der Fläche gegeben. Da ferner die erzeugende Linie, beiderseits von der Schraubenlinie begrenzt gedacht, während ihrer Bewegung von constanter Länge bleibt, so erscheint die Schraubenfläche als ein besonderer Fall der in Nr. 329, 3 angeführten Fläche (wenn man dort von der willkürlichen Beschränkung absieht, daß die Erzeugende kleiner als die Ganghöhe sein soll).

Anhang.

In Nr. 209, Nr. 210 und Nr. 426 sind einige Sätze ohne genauere Begründung angeführt worden, weil ihre Beweise mehr mathematische Kenntnisse erfordern als im Buche selbst vorausgesetzt oder entwickelt sind. Diese Beweise finden sich hier anhangsweise zusammengestellt. Zugleich ist in diesen Anhang eine nähere Betrachtung über das Grenzverhältniß zweier in's Unendliche wachsenden Strecken verwiesen worden, obwohl sie sich auf Elementarbegriffe beschränkt.

I.

(Zu Nr. 209, 5.) Genäherte Rectification eines Kreisbogens. — 1) Der Durchmesser AC sei so verlängert, daß CF dem Halbmesser gleich ist. Setzt man den Halbmesser $= r$, $\text{arc}\, AB = r\omega$, W. $BFA = \psi$, so ist



$$r \sin \omega = (2r + r \cos \omega) \operatorname{tg} \psi$$

$$AE = 3r \operatorname{tg} \psi = \frac{3r \sin \omega}{2 + \cos \omega}.$$

Da nun
$$\sin \omega = \omega - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \frac{\omega^7}{7!} + \cdots$$
$$\cos \omega = 1 - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{4!} - \frac{\omega^6}{6!} + \cdots$$

so findet man durch Division:

$$\frac{AE}{r} = \omega - \frac{2\omega^5}{3.5!} - \frac{2.5\omega^7}{3.7!} + \cdots$$
$$= \omega - \frac{\omega^5}{180} - \frac{\omega^7}{1512} + \cdots$$

Also weicht AE von der Rectification des Bogens AB sehr wenig ab, so lange $\omega < 1$ bleibt.

Ist $\omega = 1$ oder wenig von 1 verschieden, so nehme man Ap gleich dem nten Theil von Ab und mache CF = Op (wo O den Mittelpunkt des Kreises bedeutet). Dann ist

$$Ab = r\,(1 - \cos\omega),\ CF = Op = \frac{r}{n}(n - 1 + \cos\omega),$$

$$r \sin\omega = Fb \operatorname{tg}\psi = \frac{r}{n}[2n - 1 + (n + 1)\cos\omega] \operatorname{tg}\psi,$$

$$AE = AF \operatorname{tg}\psi = \frac{r\,(3n - 1 + \cos\omega)\sin\omega}{2n - 1 + (n + 1)\cos\omega}$$

$$\frac{AE}{r} = \frac{(3n - 1)\sin\omega + {}^1/_2 \sin 2\omega}{2n - 1 + (n + 1)\cos\omega}$$

Entwickelt man $\sin\omega$, $\cos\omega$ und $\sin 2\omega$ in Reihen und führt nach den erforderlichen Reductionen die Division aus, so ergibt sich

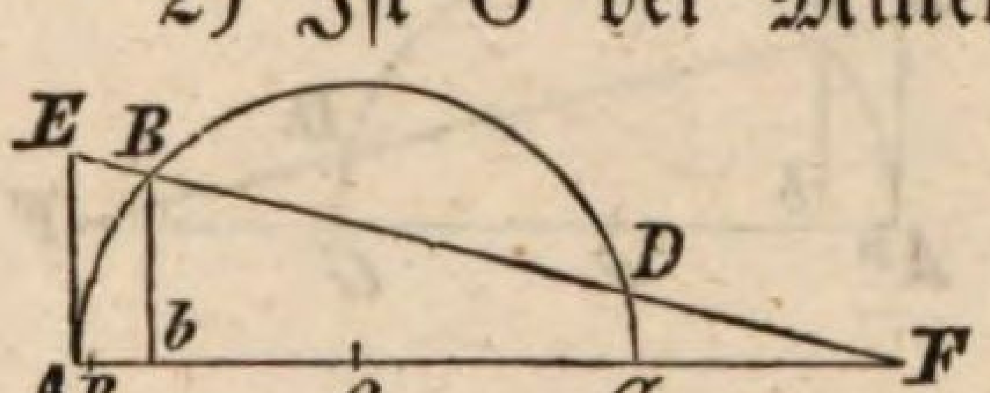
$$\frac{AE}{r} = \omega - \frac{2\,(n - 5)}{3n.5!}\omega^5 - \frac{2.5\,(n^2 - 7)\,\omega^7}{3n^2.7!} + \ldots$$

Da somit für jeden Werth von n die dritte Potenz von ω ausfällt, wird, so lange ω nicht > 1 ist, der Fehler klein sein, welchen Punkt der Strecke Ab man auch für p wählen mag. — Für $n = 5$ kommt

$$\frac{AE}{r} = \omega - \frac{\omega^7}{2100} + \frac{17\,\omega^9}{126000} - \ldots,$$

so daß der theoretische Fehler bei $\omega < 1$ oder $\omega = 1$ völlig ohne Belang ist und selbst noch für solche Werthe von ω, welche um Weniges größer als 1 sind, nicht beträchtlich wird.

2) Ist O der Mittelpunkt des Kreises, W. AOB $= \omega = 3\varphi$, W. DOC $= \varphi$, so ist, wie leicht zu erweisen, auch W. DFO $= \varphi$. Man hat also, wenn AE $\perp$ AO errichtet wird und r den Halbmesser des Kreises bezeichnet:



$$AE = (r + 2r\cos\varphi)\operatorname{tg}\varphi = r\,(\operatorname{tg}\varphi + 2\sin\varphi).$$

Da nun $\quad \operatorname{tg}\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3} + \frac{2\varphi^5}{3.5} + \frac{17.\varphi^7}{3^2.5.7} + \ldots$

und $\quad \sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi\,7}{7!} + \ldots,$

so ist $\quad \operatorname{tg}\varphi + 2\sin\varphi = 3\varphi + \frac{3\varphi^5}{4.5} + \frac{3\varphi^7}{7.8} + \ldots$

$$= \omega + \frac{\omega^5}{20.3^4} + \frac{\omega^7}{56.3^6} + \ldots$$

also $\quad AE = r\omega + r\left(\frac{\omega^5}{1620} + \frac{\omega^7}{40824} + \ldots\right).$

Mithin ist AE stets größer als der Bogen AB ($= r\omega$); der Ueberschuß

erweist sich aber zugleich als völlig unerheblich, solange $\omega < 1$ bleibt (oder, in Graden ausgedrückt, den Werth 57,3° nicht erreicht).

Ist ω oder φ in Geraden gegeben, so berechnet sich dieser Ueberschuß $\mathfrak{R}$ (d. i. der Fehler, den man begeht, wenn man AE statt der genauen Länge $\mathfrak{B}$ des Bogens AB nimmt) direct nach der Formel

$$\mathfrak{R} = \left(\operatorname{tg}\varphi + 2\sin\varphi - \frac{\pi\varphi}{180}\right) r; \text{ er beträgt}$$

für $\omega = 12°$:	$0{,}0000003 \cdot r$	oder	$0{,}0000014 \cdot \mathfrak{B}$.
„ $\omega = 30°$:	$0{,}000025 \cdot r$	„	$0{,}000047 \cdot \mathfrak{B}$.
„ $\omega = 57° 18'$:	$0{,}000717 \cdot r$		
„ $\omega = 60°$:	$0{,}000913 \cdot r$	„	$0{,}000874 \cdot \mathfrak{B}$.
„ $\omega = 75°$:	$0{,}00255 \cdot r$	„	$0{,}00195 \cdot \mathfrak{B}$.
„ $\omega = 90°$:	$0{,}00655 \cdot r$	„	$0{,}00417 \cdot \mathfrak{B}$.

Gegenüber den Anforderungen, welche man an die Genauigkeit graphischer Arbeiten stellen kann, ist selbst im letzten Fall die Größe des Fehlers nicht sehr bedeutend. Man könnte sich daher erlauben, die hier besprochene Näherungsconstruction bis fast auf den Viertelskreis auszudehnen.

II.

(Zu Nr. 210.) Genäherte Rectification eines beliebigen Curvenbogens. — Ist in Bezug auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem die Gleichung einer Curve C gegeben, und soll der Bogen s derselben, welcher zwischen der Ordinatenaxe und der zur Abscisse a gehörigen Ordinate liegt, rectificirt werden, so hat man

$$s = \int_0^a \sec\varphi \,.\, dx,$$

wobei φ den veränderlichen Winkel der Curve gegen die Abscissenaxe bezeichnet. Setzt man $a \sec\varphi = Y$, so nimmt die obige Formel die Gestalt

$$s\,a = \int_0^a Y \,.\, dx$$

an, und drückt folgenden Satz aus: Das Rechteck aus dem rectificirten Bogen und der Abscisse x hat gleichen Inhalt mit dem Flächenraum F zwischen den beiden Coordinatenaxen, der zu a gehörigen Ordinate und

einer Curve C_0, welche man erhält, wenn man jede Ordinate des ursprünglichen Curvenbogens mit dem zwischen die Grenzordinaten fallenden Stück seiner durch den betreffenden Punkt gelegten Tangente vertauscht. Hiernach läßt sich für die genäherte Rectification eines Bogens die Simpson'sche Regel benützen; denn verwandelt man mittels dieser Regel näherungsweise die Fläche F in ein Rechteck mit der Seite a, so ist die andere Seite dieses Rechtecks als Rectification des Bogens s zu nehmen.

Wenn a nicht zu groß angenommen wurde, kann man sich bei Anwendung der Simpson'schen Formel mit einer Theilung der Strecke a in blos zwei gleiche Theile begnügen. Die Curve C werde von der Ordinatenaxe im Punkte B, von der zu a gehörigen Ordinate in A, von der mittlern (durch den Halbirungspunkt von a gehenden) Ordinate in M geschnitten; die Neigungen der Curve C gegen die Abscissenaxe in den Punkten B, A, M seien beziehungsweise φ_0, φ_1, φ_2. Setzt man $a \cos \varphi_0 = Y_0$, $a \cos \varphi_1 = Y_1$, $a \cos \varphi_2 = Y_2$, so hat man

$$F = \frac{a}{6}(Y_0 + 4Y_1 + Y_2) = sa.$$

Ist die Curve C eine Parabel, deren Axe den Ordinaten parallel liegt, so fällt der Schnittpunkt T der durch A und B gezogenen Tangenten auf die Ordinate von M, und die durch M gehende Tangente ist der Sehne AB parallel; es ist also $Y_0 = 2BT$, $Y_2 = 2AT$, $Y_0 = AB$; folglich

$$s = \frac{AT + BT + 2AB}{3}.$$

In diesem Falle wird also der dem Näherungsresultat anhaftende Fehler nur aus der Abweichung zwischen dem strengen Werthe von F und dem durch Simpson's Formel gelieferten Werthe entspringen können.* Ist

* Dabei ist die Curve C_0 eine Hyperbel. Denkt man sich nämlich durch den Scheitel der Parabel C zwei neue Coordinatenaxen, parallel zu den ursprünglichen, und ist in Beziehung auf das neue Coordinatensystem $x^2 = 2py$ die Gleichung der Parabel, so ist

$$\sec \varphi = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}},$$

also

$$Y = a\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}$$

oder

$$\frac{Y^2}{a^2} - \frac{x^2}{p^2} = 1.$$

aber C irgend eine andere Curve, so liegt hierin eine zweite Quelle für einen Fehler; dagegen würde sich der vorige Fehler aufheben, wenn C so gestaltet wäre, daß C_0 eine Parabel mit einer zu den Ordinaten parallelen Axe würde, da dann die Quadratur nach Simpson's Formel den streng richtigen Werth von F gäbe. Mithin sind beide Fehler um so kleiner, je weniger die Curven C und C_0 innerhalb der hier in Betracht kommenden Grenzen von solchen Parabeln abweichen. Da nun bekanntlich durch drei Punkte immer eine Parabel so gelegt werden kann, daß ihre Axe einer gegebenen Richtung parallel ist, und alle stetigen Curvenbögen, welche überhaupt durch drei gegebene Punkte gehen können, einander um so näher kommen, je kürzer und flacher sie sind, so sieht man, daß unter den in Nr. 210 angegebenen Umständen die angenäherte Rectification auf keine erheblichen Fehler führen kann.

III.

(Zu Nr. 297, b.) — Ist der Meridian $\mathfrak{M}$ eine Parabel, so bleibt der Werth

$$\frac{Mp \,.\, pN}{Ap}$$

constant bei paralleler Verlegung sowohl der Sehne MN als der Geraden Ap. Ist aber $\mathfrak{M}$ eine Hyperbel, so findet Unveränderlichkeit des obigen Werths nur bei Parallelverschiebung der MN statt, während ein paralleles Verschieben der Ap auf einen neuen Werth des Bruches führt. Um den Grund dieses Unterschieds darzulegen, ist etwas weiter auszuholen (wobei jedoch nichts vorausgesetzt wird, was nicht schon in dem vor der Nr. 297 liegenden Theile des Buchs berührt wäre).

1. Sowie das Verhältniß zweier unendlich kleinen Größen, so kann auch das Verhältniß zweier unendlich angewachsenen Größen sehr verschiedene Werthe zur Grenze haben.* Wo dieser Werth = 1 gesetzt

* Denkt man z. B. zwei unbegrenzte, in O unter dem Winkel φ sich kreuzende Gerade von einer dritten Geraden in den Punkten A, B geschnitten und diese Gerade parallel fortschreitend, so bleibt das Verhältniß OA : OB immer das nämliche, selbst wenn die Punkte A, B in unendliche Entfernungen von O rücken (oder auch unendlich nah an O kommen); das Verhältniß hängt vom Winkel φ ab und kann mit diesem die manchfaltigsten Werthe annehmen.

wird, hat man sich stets von der Richtigkeit noch besonders zu überzeugen (und dieß soll bei dieser Gelegenheit auch für einige frühere Stellen des Buches, wo es vorläufig übergangen wurde, nachgeholt werden).

2. Liegen auf einer Geraden drei Punkte A, B, U, und rückt U auf ihr in unendliche Entfernung, während A, B fest bleiben, so hat das Verhältniß AU : BU den Grenzwerth 1; denn es ist

$$\frac{AU}{BU} = \frac{AB + BU}{BU} = 1 + \frac{AB}{BU} = 1 + \beta$$

und β wird bei unendlichem Anwachsen von BU verschwindend klein. (Im Zusammenhang hiemit steht, daß von zwei Punkten, welche auf einer Geraden harmonisch gegen A, B liegen, der eine in die Mitte der Strecke AB rückt, wenn der andere in unendlicher Entfernung verschwindet).

3. Bestimmen drei Punkte A, B, U ursprünglich ein Dreieck, und läßt man dieses sich so ändern, daß die Basis AB Lage und Größe beibehält, während U sich unendlich von der Geraden AB entfernt, so ist für das Verhältniß AU : BU der Grenzwerth = 1. Denn die Gerade, welche den Winkel AUB des ursprünglichen Dreiecks halbirt und also die Strecke AB im Verhältniß von AU : BU theilt, hat die wesentliche Eigenschaft, daß jeder ihrer Punkte gleichweit von den Seiten AU, BU absteht; sie wird also, wenn AU || BU geworden ist, durch die Linie vertreten, welche durch die Mitte von AB parallel zu AU geht. (Vgl. S. 186.)

4. In Nr. 281, † kamen drei Gerade AC, BC, AB zur Sprache, von denen die erste in B′, B″, die zweite in A′, A″ einem Kegelschnitt begegnet. Dabei ist

$$\frac{CA'}{CB'} = \frac{CB \mp BA'}{CA \mp AB'} = \frac{CB}{CA} \cdot \frac{1 \mp \frac{BA'}{CB}}{1 \mp \frac{AB'}{CA}}$$

Läßt man die Spitze C des Dreiecks ABC durch Drehung der BC um B sich unendlich entfernen, so wird, wenn nicht zugleich auch der Punkt A′ in unendliche Ferne rückt, der zweite Factor des zuletztstehenden Ausdrucks = 1, der erste Factor (dem Satze 3 zufolge) ebenfalls = 1; mithin ist der in Nr. 281, † angegebene Grenzwerth des Verhält-

nisses CA′ : CB′ außer Zweifel. Dasselbe gilt bezüglich des Verhältnisses CA″ : CB″.

5. Werden zwei parallele Gerade AU, 𝔄𝔘 von einer durch den Punkt P gehenden Geraden in A, 𝔄, von einer zweiten durch P gelegten Geraden in U, 𝔘 geschnitten, und denkt man sich die letztere Gerade um P gedreht, während die drei andern Linien unbewegt bleiben, so ist für die zu AU, 𝔄𝔘 parallele Lage der PU das Verältniß AU : 𝔄𝔘 der unendlich gewordenen Strecken = PA : P𝔄; denn dieses von der Größe des Winkels APU unabhängige Verhältniß gilt noch, wenn PU der zu AU parallelen Lage äußerst nahe gekommen ist, und tritt auch sogleich wieder ein, sobald die PU in ihrer stretigen Drehung jene Lage um eine äußerst kleine Abweichung überschritten hat.

Ebenso gilt der Satz: Drehen sich um die festen Punkte A, 𝔄 zwei sich stets parallel bleibende Gerade AU, 𝔄𝔘, welche eine feste Gerade G in den veränderlichen Punkten U, 𝔘 schneiden, und bezeichnet P den Schnittpunkt der Geraden A𝔄 und G, so ist, nachdem AU und 𝔄𝔘 unendlich groß geworden sind,

$$AU : 𝔄𝔘 = PA : P𝔄$$

zu setzen.

6. Schneiden aber die um A und 𝔄 sich drehenden Parallelen eine gegebene, in's Unendliche sich erstreckende Curve in den Punkten U und 𝔘, deren Verbindungslinie die A𝔄 in P trifft, so ändert sich mit der Lage des Punkts P auch das Verhältniß PA : P𝔄 oder AU : 𝔄𝔘; einen von 1 verschiedenen Grenzwerth für dasselbe wird es geben, wenn die veränderliche Sehne U𝔘 (und also auch der Punkt P) sich einer bestimmten Grenzlage nähert; das Verhältniß wird den Werth 1 annehmen, wenn P sich in unendlicher Ferne verliert. — Die Curve sei von der zweiten Ordnung. Je weiter die Punkte U, 𝔘 sich fortschieben, um so flacher wird der Bogen U𝔘, um so kleiner also der Abstand zwischen der Sehne U𝔘 und der ihr parallelen Tangente des Bogens, so daß die Grenzlage der Sehne mit der Grenzlage der Tangente zusammenfallen müßte. — Die Parabel läßt keine Grenzlage für die Tangente zu; vielmehr verliert sich eine Gerade, welche berührend an der Parabel fortgleitet, in unendlicher Entfernung (wofür unter Anderem die Bemerkung in Nr. 222, * als Verdeutlichung dienen kann); also kommt das Verhältniß AU : 𝔄𝔘 dem Werthe 1 um so näher, je kleiner der

Winkel der Parallelen AU, 𝔄𝔘 gegen die Parabelaxe wird. Bei der Hyperbel aber ist die Grenzlage der fortbewegten Sehne oder Tangente diejenige Asymptote, mit welcher die Geraden AU, 𝔄𝔘 parallel zu werden streben.

Anknüpfend an die erste Gleichung in Nr. 281, † gestaltet sich nunmehr die Betrachtung wie folgt. Werden in einer Parabel oder Hyperbel zwei parallele, im Uebrigen beliebige Sehnen B′A𝔄B″, A′B𝔅A″ gezogen und zwei andere Sehnen C′ABC″, ℭ′𝔄𝔅ℭ″ so angenommen, daß sie in der Parabel sehr nahe parallel zur Axe, in der Hyperbel sehr nahe parallel zu einer Asymptote sind, wobei diese Asymptote von der A𝔄 in P getroffen werden soll und der Werth des Verhältnisses PA : P𝔄 durch m bezeichnet sein mag, so ist mit größter Annäherung

für beide Curven: $\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}''}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}''} = 1$; (2)

für die Parabel: $\frac{AC''}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}''} = 1$, also $\frac{AC''}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}''} = 1$;

für die Hyperbel: $\frac{AC''}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}''} = m$, also $\frac{AC''}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}''} = m$.

Aus der dritten Gleichung in Nr. 281, † wird demnach

für die Parabel: $\frac{AB' \,.\, AB''}{AC'} = \frac{\mathfrak{B}A' \,.\, \mathfrak{B}A''}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}'}$;

für die Hyperbel: $\frac{AB' \,.\, AB''}{AC'} : \frac{\mathfrak{B}A' \,.\, \mathfrak{B}A''}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}'} = m$.

Für beide Curven aber ist (nach der zuerst citirten Gleichung und dem Satze 2):

$$\frac{AB' \,.\, AB''}{AC'} = \frac{BA' \,.\, BA''}{BC'}.$$

Hiemit ist auch Nr. 297, b erschöpfend erledigt.

IV.

(Zu Nr. 426, †.) Lehrsatz. Die Durchschnittscurve zwischen zwei Flächen zweiter Ordnung, welche eine gemeinschaftliche Hauptebene haben, projicirt sich auf diese Hauptebene als eine Linie zweiter Ordnung.

Beweis. Wählt man die gemeinschaftliche Hauptebene zur Ebene der xz, so kommt y in den Gleichungen beider Flächen nur in der zweiten Potenz vor. Beide Gleichungen lassen sich daher ganz allgemein unter den Formen

$$a_1 y^2 = b_1 x^2 + c_1 z^2 + d_1 xz + e_1 x + f_1 z + g_1$$
$$a_2 y^2 = b_2 x^2 + c_2 z^2 + d_2 xz + e_2 x + f_2 z + g_2$$

darstellen. Die Gleichung für die Curve, welche sich auf der Ebene

der xz als Projection des Flächendurchschnitts ergibt, findet man, wenn aus den beiden vorigen Gleichungen y eliminirt wird; dadurch erhält man

$$Mx^2 + Nz^2 + Oxz + Px + Qz + R = 0$$

(wo $R = a_1 g_2 - a_2 g_1$, $Q = a_1 f_2 - a_2 f_1$, $P = a_1 e_2 - a_2 e, \ldots$ ist), und diese Gleichung gehört einer Linie zweiter Ordnung an.

Druckfehler.

Seite 49 (letzte Zeile der Nr. 85) lies: „erhält“ statt „enthält“.
„ 130, Z. 14 v. u. lies: „n Seiten“ statt „n-Seiten“.
„ 210: In der Gleichung soll a^2 und b^2 (statt a und b) stehen.
„ 251 (letzte Zeile der Nr. 284) lies: L′ statt L.

Druck der J. B. Metzler'schen Buchdruckerei in Stuttgart.

Gugler, Bernhard,

Lehrbuch der descriptiven Geometrie

Bd.: [1]

Stuttgart 1857